Questioni di Stile

Alberto Cogliati[a]

[a] Dipartimento di Matematica "F. Enriques"
Università degli Studi di Milano
via Saldini 50, 20133 Milano, Italy
alberto.cogliati@unimi.it

Abstract

Nel presente intervento è proposta una riflessione sulla nozione di stile in matematica e sugli usi che di tale nozione si possono fare in ambito storiografico. Si offrono due casi di studio: un confronto stilistico tra gli apporti di Abel e di Jacobi nel campo della teoria delle funzioni ellittiche e una descrizione del paradigma stilistico che si costituisce a Berlino intorno alla figura di Weierstrass nel campo dell'algebra lineare.

Cominciamo col delimitare i termini dell'intervento: è lecito introdurre nel discorso intorno alla matematica considerazioni che attengono alla nozione di stile? e, in caso affermativo, quali sono i vantaggi che da esse è possibile trarre sul terreno dell'indagine storiografica.

Adotteremo nel seguito un approccio di natura prevalentemente storico – descrittiva lasciando in secondo piano gli aspetti più prettamente epistemologici. Ciononostante è utile sottolineare come la categoria di stile sia stata proficuamente impiegata in ambito filosofico ad esempio in (Dubucs & Dubucs 1994), dove viene affrontata la questione del valore cognitivo degli elementi stilistici nel discorso matematico e precedentemente in (Granger 1968) che rappresenta un tentativo, assai ambizioso, di edificare una teoria generale dello stile in matematica.

L'impiego in ambito scientifico di considerazioni di carattere stilistico, tradizionalmente limitate all'area ristretta delle discipline umanistiche (critica letteraria, storia dell'arte, ecc.), produce sin da subito alcune difficoltà. Secondo una tradizione antica che risale nientemeno che ad Aristotele,[1] infatti il dominio della dimostrazione di verità matematiche, poichè estraneo alle dinamiche proprie del discorso persuasivo intorno a verità contingenti, sarebbe sottratto all'ambito di azione della retorica e, in quanto tale, esso sarebbe estraneo a qualsivoglia riflessione di natura stilistica.

Tuttavia, è un fatto che spesso nel corso della storia, almeno sin dal '600, matematici di prima grandezza siano ricorsi alla nozione di stile tanto come strumento di descrizione del proprio lavoro quanto come mezzo di comprensione dell'opera di altri matematici. Apparentemente Bonaventura Cavalieri è stato l'antesignano delle considerazioni di natura stilistica in ambito matematico. Nel 1635 egli forniva infatti una caratterizzazione della propria teoria degli indivisibili in opposizione al classico metodo di esaustione di Archimede e allo stesso tempo avvertiva di essere ben consapevole di come i risultati da lui ottenuti fossero riconducibili allo stile archimedeo ("*Scio autem praefata omnia ad stylum Archimedeum reduci posse*" (Cavalieri 1635, p. 235)).

Nel corso dei secoli, innumerevoli sono i riferimenti alla categoria di stile; celebre, ad esempio, è l'analisi di G. Monge che Chasles offre nel suo *Aperçu historique*:

[1] Si veda ad esempio (Aristotele, Topica, I, XI).

> La Géométrie descriptive de Monge est une source de bonnes doctrines, qui n'a point encore été épuisée. Après y avoir reconnu le germe, plus ou moins dévéloppé, de plusieurs méthodes, qui accroisent la puissance et étendent le domaine de la Géométrie, nous y voyons aussi l'origine d'une nouvelle manière d'écrire et de parler cette science. Le style, en effet, est si intimament lié à l'esprit des méthodes, qui il doit avancer avec elles; de même qu'il doit aussi, s'il a pris les devans, influer puissament sur elles et sur les progrès généraux de la science (Chasles 1837, p. 208).

Proponiamo, dal canto nostro, la seguente definizione operativa di stile: esso è quell'insieme di caratteristiche della produzione matematica e del processo euristico che ad essa conduce, che attengono alla forma e all'organizzazione del pensiero matematico piuttosto che alla sua sostanza. In altri termini, secondo tale definizione, lo stile non si riduce alla semplice scelta del modo espositivo degli enunciati matematici, esso coinvolge altresì il processo stesso della scoperta, vale a dire l'euristica.

La definizione adottata suggerisce una possibile strategia di lavoro: indagare episodi della storia della matematica nei quali un medesimo problema o ambito di indagine viene affrontato con metodi espositivi e procedimenti euristici differenti. I casi di studio scelti sono due: la genesi della teoria delle funzioni ellittiche nei lavori di Abel e Jacobi, con particolare enfasi sui lavori di quest'ultimo e l'affermazione della cosiddetta scuola di algebra lineare di Berlino intorno alla figura di K. Weierstrass.

La genesi della teoria delle funzioni ellittiche: un'analisi stilistica

Quando, nel 1827, pressochè contemporaneamente, Abel e Jacobi pubblicano i primi lavori che pongono le fondamenta della teoria delle funzioni cosiddette ellittiche, la disciplina è dominata dagli apporti di A. M. Legendre il quale, da ormai quasi trent'anni, ha intrapreso uno studio dettagliato degli integrali ellittici pervenendo ad una loro completa classificazione in tre specie distinte e ottenendo altresì una lunga lista di tavole per i valori numerici di queste trascendenti.

La portata rivoluzionaria delle idee di Abel e Jacobi può essere ricondotta a due pensieri tanto semplici quanto profondi. Citando l'efficace sintesi che Felice Casorati offre nella prima parte del suo trattato (Casorati 1868), "l'uno di questi pensieri è quello di considerare come principale funzione da studiarsi, non già la dipendenza dell'integrale (ellittico di prima specie) dal suo limite, ma la dipendenza del limite dal valore dell'integrale. Il secondo di questi pensieri," prosegue Casorati, "comune esso pure ad Abel e Jacobi, fu quello di introdurre l'immaginario in questa teorica."

Pur nella comunanza dei risultati ottenuti e delle idee di fondo soggiacenti alle loro ricerche (segnatamente, il procedimento di inversione e di complessificazione), le peculiarità degli approcci di Abel e Jacobi offrono un interessante caso di studio dove la nozione di stile, inteso come categoria storiografica, può trovare un'utile applicazione.

Nonostante Abel abbia iniziato ad occuparsi di integrali ellittici già a partire dal 1823, è solo nel 1827 che egli dà alle stampe i risultati delle proprie ricerche sulla materia. Si tratta di una ponderosa memoria dal titolo *Recherches sur les fonctions elliptiques*. Richiamiamo brevemente lo schema del ragionamento lì seguito. Abel esordisce scrivendo l'integrale ellittico di prima specie:

$$\alpha(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}. \tag{1}$$

e immediatamente mette all'opera le innovazioni alle quali si riferisce Casorati ponendo al centro della propria indagine la funzione inversa $x = \phi(\alpha)$ e consentendo che le variabili α e x possano assumere valori complessi. A partire da queste semplici posizioni, Abel ricava, in uno stile che potremmo definire diretto e costruttivo, una folta schiera di proprietà, quali ad esempio i teoremi di addizione, la doppia periodicità, e le formula per la divisione vale a dire, formule che restituiscono il valore di $\phi(\alpha)$ a partire da $\phi(m\alpha)$, per m intero.

Affatto diverso è il percorso intrapreso da Jacobi il quale, pressoché contemporaneamente ad Abel, produce i propri contributi alla nascente disciplina.

L'ambito di ricerca che Jacobi si prefigge di investigare è più ristretto rispetto a quello di Abel; il suo obiettivo, almeno agli esordi, non è, come per il collega norvegese, quello di edificare una teoria generale delle trascendenti ellittiche, ma quello di affrontare e risolvere alcune questioni specifiche che ormai da tempo sono state poste nell'ambito della cosiddetta teoria delle trasformazioni degli integrali ellittici per opera di Legendre.

Mentre Abel intende operare una fondazione *ex novo* della teoria, Jacobi, al di là delle innovazioni introdotte, procede all'insegna di una sostanziale continuità con le precedenti ricerche di Legendre. Tale continuità coinvolge non solo le priorità della ricerca e le tecniche dimostrative ma anche il modo espositivo adottato.

A questo proposito, è interessante ricordare il punto di vista di Legendre il quale, nel corso del fitto scambio epistolare con lo stesso Jacobi, dichiara apertamente di preferire lo stile di Jacobi e di nutrire qualche perplessità sulle scelte operate da Abel. Legendre scrive:

> Vous avez eu la bonté dans votre dernière lettre et dans les précédentes de me réduire à des expressions plus simples quelques–uns des beaux résultats de M. Abel. Je trouve comme vous que ces résultats, qui sont fort intéressants, ont été préséntes par leur jeune et ingenieux auteur, d'une manière fort méthodique, mais un peu embrouillée; je ne vois pas par exemple pourquoi il s'est si fort appesanti sur les propriétés des fonctions qu'il désigne par f et F; sans doute il aurait pu atteindre son but sans le secours de ces fonctions. Au reste je pense que dans la suite de vos publications vous presenterez à votre manière les belles formules de M. Abel, et que vous donnerez à son travail plus de précision sans qu'il perde rien de son élégance ni de sa généralite (Jacobi's Werke, I, pp. 421-422).

Pur esaltando la generalità e l'organicità della trattazione di Abel, Legendre considera il suo stile costruttivo-deduttivo inutilmente ingarbugliato e per questo di difficile comprensione; di contro, anche in forza di una certa uniformità di vedute soprattutto per quanto concerne l'enfasi sul problema della trasformazione degli integrali ellittici di prima specie, egli apertamente privilegia la trattazione meno astratta e più algoritmica di Jacobi.

Vediamo ora nel dettaglio in che cosa consista tale concretezza e tale carattere algoritmico.[2] Jacobi è condotto allo studio delle funzioni ellittiche nel corso delle sue ricerche intorno al seguente:

Problema 1 *Si vogliono trovare, se esistono, trasformazioni razionali* $y = \dfrac{U(x)}{V(x)}$ *di grado qualunque p (p può essere supposto primo) tali che valga la seguente relazione tra integrali ellittici di prima specie*

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}; \tag{2}$$

[2] Per maggiori dettagli si veda (Cogliati 2014).

ove λ, M, k sono costanti reali.

Allorquando nel 1827 Jacobi intraprende le prime ricerche intorno alla questione, il numero di trasformazioni razionali note del tipo descritto è assai esiguo. Da tempo si conoscono trasformazioni di grado 2 mentre solo recentissimamente Legendre ha esibito una trasformazione razionale di grado 3; e tuttavia tale circostanza è ignota a Jacobi il quale sarà informato della scoperta dallo stesso Legendre nell'autunno del 1827.

Già nell'estate dello stesso anno, Jacobi annuncia alla comunità dei matematici un risultato inatteso: esistono infinite funzioni razionali (una per ciascun primo p) tali da operare la trasformazione cercata tra integrali ellittici di prima specie. Esse assumono la forma seguente[3]

$$y = \frac{U}{V} = \frac{x}{M} \frac{\prod_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ 1 - \dfrac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am} \dfrac{2mK}{p}} \right\}}{\prod_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ 1 - k^2 x^2 \sin^2 \mathrm{am} \dfrac{2mK}{p} \right\}} \tag{3}$$

Jacobi curiosamente si limita a produrre l'espressione di tali trasformazione e, salvo nei casi in cui $p = 3$ e $p = 5$, non fornisce alcuna dimostrazione del suo asserto né, tantomeno, alcuna indicazione del procedimento che lo ha condotto a tali formule.

Solo qualche mese più tardi in (Jacobi 1827c), egli produce una verifica chiara e rigorosa della veridicità della proposizione e tuttavia anche in tale circostanza non è dato di sapere in quale modo tali trasformazioni siano state ottenute. Contrariamente ad Abel, Jacobi rifugge ostinatamente dal procedimento costruttivo. Come l'analisi della corrispondenza con Legendre mostra chiaramente, Jacobi predilige un approccio di tipo induttivo che consiste nell'esame attento di casi particolari e relativamente semplici, segnatamente il caso ($p = 3$), a partire dai quali, non senza disinvoltura egli trae *Ansatz* di carattere più generale i quali sono suscettibili soltanto di una verifica *a posteriori*. Allo stesso tempo risulta chiaramente come Jacobi sia condotto ad introdurre la funzione ellittica $\mathrm{sinam}\phi$ in maniera indiretta, quasi forzato dalla natura del problema algoritmico affrontato, laddove Abel ha operato una definizione preliminare sulla quale si innesta il processo deduttivo.

Lo stesso Legendre mostra le proprie riserve sullo scelte espositive adottate da Jacobi. In un commento a (Jacobi 1827c), Legendre scrive:

> [...] on doit regretter que l'auteur remplisse la tâche qu'il s'est imposée par une sorte de divination, sans nous mettre dans le secret des idées dont la filiation l'a amené progressivement à la forme que doit avoir $1 - y$ pour satisfaire aux conditions du problème (Legendre 1828, p. 203).

Al di là dei modi espositivi, l'euristica adottata da Jacobi è quella caratteristica del matematico algorista. Secondo la celebre definizione di Eric Bell,

> [s]i chiama algorista il matematico che formula degli algoritmi per la soluzione di problemi di una certa specie [...]. Nell'analisi diofantea come nel calcolo integrale, la soluzione di un problema può non apparire finché non si è operata una qualche sostituzione ingegnosa di una o parecchie variabili con funzioni di altre variabili; l'algorista è il matematico al quale simili artifici ingegnosi si presentano naturalmente alla mente. Non vi è d'altronde un procedimento uniforme da seguire; algoristi, come poeti, si nasce (Bell 2010, pp. 187-188).

[3]Si intende che $p > 2$; inoltre, $K = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. Posto $F(\phi) = \int_0^\phi \dfrac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$, Jacobi definisce $\mathrm{am} F = \phi$.

Lo stile della scuola di algebra lineare di Berlino

È noto come la scuola di Berlino e Weierstrass in particolare abbiano segnato la storia dell'analisi incentivando e sviluppando quel processo di rigorizzazione della disciplina noto come aritmetizzazione dell'analisi. Largamente trascurata è invece la circostanza, altrettanto importante per la storia della matematica, che vede i nuovi standard di rigore produrre in Weierstrass e nei suoi studenti (Frobenius e Killing, ad esempio) il superamento di uno stile di pensiero e di esposizione cosiddetto *generico* assai diffuso in algebra lineare sino alla prima metà dell'Ottocento a favore di un approccio più critico e sistematico.

Con l'espressione stile generico si intende quella tendenza a ragionare e operare con simboli che assumono valori generici e a trascurare quasi completamente le difficoltà che possono emergere quando tali simboli assumono valori specifici.

A questo proposito, T. Hawkins ha parlato esplicitamente di un cambiamento di paradigma stilistico che si realizza a Berlino a partire dal 1858 allorquando Weierstrass presenta all'Accademia delle Scienze di Berlino una breve memoria recante il titolo *Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen.*

L'oggetto del contributo di Weierstrass è costituito dagli aspetti algebrici di un problema al quale matematici di prima grandezza da svariati decenni hanno dedicato sforzi ripetuti: l'integrazione e lo studio della stabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti del tipo

$$B\ddot{y} + Ay = 0, \tag{4}$$

ove $y \in \mathbb{R}^n$ e A, B sono matrici $n \times n$ reali, simmetriche e definite positive.

Il problema già affrontato da D'Alembert alla fine degli anni '40 del Settecento, è stato estesamente discusso da Lagrange in (Lagrange 1766) e più diffusamente nella *Mécanique Analytique* ove Lagrange ha proposto, in connessione con il problema delle piccole oscillazioni di un sistema meccanico, discreto e conservativo, il seguente metodo risolutivo. Si suppone la possibilità di soluzioni della forma particolare $q = \xi(t)\nu$ con $\xi(t) = C\sin(\sqrt{\lambda} \cdot t + \epsilon)$ e con le componenti di ν, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ costanti arbitrarie. Quindi, la sostituzione di tale *Ansatz* in (4) si traduce in $(B\lambda - A)\nu = 0$; dal che si ottiene l'equazione alla quale λ deve soddisfare. Essa è data dall'annullarsi del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det(B\lambda - A) = 0$. La genericità del procedimento si manifesta nella supposizione che le radici del polinomio siano tutte distinte. Siano tali radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; se $\nu^{(j)} = (\nu_1^{(j)}, \ldots, \nu_n^{(j)})$ è una soluzione non nulla di $(B\lambda_j - A)\nu_j = 0$, allora $q_j = \nu_j \sin(\sqrt{\lambda_j} \cdot t + \epsilon)$ è una soluzione di (4) e ogni soluzione di (4) è una combinazione lineare di soluzioni siffatte:

$$q(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \nu_j \sin(\sqrt{\lambda_j} \cdot t + \epsilon) \tag{5}$$

Ora, affinché tale generica soluzione rappresenti effettivamente il comportamento di un sistema meccanico in prossimità dell'equilibrio, Lagrange osserva, è necessario che la soluzione $q(t)$ rimanga limitata per $t \to \infty$. A tal fine, le radici λ_j, $j = 1, \ldots, n$ devono essere reali e positive altrimenti la soluzione contiene termini esponenziali illimitati.

Giova sottolineare come Lagrange non sembri in alcun modo sospettare che il fatto che $\lambda_j \in \mathbb{R}$ dipenda dalla simmetria delle "matrici" A e B. Non solo, la genericità del procedimento adottato induce Lagrange in errore portandolo a sostenere esplicitamente l'incompatibilità di soluzioni λ_j con molteplicità $m_j > 1$ con la richiesta di stabilità per le soluzioni del sistema (4).

È solo con A.-L. Cauchy che si realizza una chiara presa di posizione circa l'inadeguatezza di un tale ragionamento generico. Già in (Cauchy 1829), Cauchy fornisce una dimostrazione rigorosa della realtà delle radici del polinomio caratteristico associato ad una data forma quadratica $\Psi(x) = x^t Ax$. La dimostrazione, tutt'altro che banale (si tenga presente che la nozione di prodotto interno hermitiano non è a quel tempo disponibile), procede per assurdo e mostra, per la prima volta, i vantaggi derivanti dall'impiego della notazione matriciale della nozione di determinante. Contestualmente, Cauchy produce una dimostrazione del seguente teorema che costituisce una generalizzazione del teorema degli assi principali ad un numero n arbitrario di dimensioni.

Teorema 1 *Data una funzione omogenea di secondo grado $\Psi = x^t Ax = \sum_{ij} a_{ij}x_i x_j$, esiste un cambiamento lineare di variabili $y = Px$ tale che $\sum x_i^2 = \sum y_i^2$ e $\Psi = \sum_i s_i y_i^2$, dove $s_1, \ldots, s_n$ sono le radici di $f(s) = \det(A - sI) = 0$.*

Cauchy suddivide opportunamente la dimostrazione in due casi; il primo, quello in cui le radici del polinomio $f(s)$ sono tutte distinte non presenta particolari difficoltà. Quanto al secondo invece, cioè il caso di radici multiple, egli è costretto a procedere con considerazioni di carattere euristico (un procedimento al limite analogo a quello già adottato da Lagrange nello studio della stabilità delle soluzioni del sistema (4)) che sembrano tradire la volontà ostentata di raggiungere un maggiore grado di sistematicità.

Solo cinque anni più tardi, nel 1834, Jacobi dà alle stampe una corposa memoria dal titolo *De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant ...* nella quale, facendo un uso diffuso della teoria dei determinanti di Cauchy, mostra ad esempio che se $y = Px$ è una trasformazione ortogonale allora $\det P = \pm 1$. Inoltre per la particolare trasformazione $y = Px$ che trasforma una data forma quadratica $\Psi = \sum a_{ij}x_i x_j$ in $\Psi = \sum_k s_k y_k^2$ egli ottiene la seguente elegantissima formula che restituisce i coefficienti della matrice P_{ij} in termini del polinomio caratteristico $f(s) = \det(A - sI)$:

$$P_{ik}P_{jk} = -\frac{B_{ij}(s_k)}{f'(s_k)}, \tag{6}$$

dove B_{ij} è il coefficiente (i, j) della matrice aggiunta classica (la matrice trasposta dei cofattori) di $A - sI$, cioè $B = \mathrm{Adj}(A - sI)$.

Secondo una consuetudine tipica di Jacobi, il suo ragionamento, unitamente allo stile espositivo impiegato, si mantiene ad un livello generico. Egli non si cura di specificare le condizioni di validità (6) a dispetto delle palesi complicazioni che derivano dalla evenutualità di radici multiple. In effetti, si consideri il caso in cui $s_k = a$ è una radice multipla di $f(s) = 0$ con molteplicità $m > 1$. In tal caso $f'(a) = 0$ e la validità di (6) viene messa in discussione. Due anni più tardi A.-V. Lebesgue, ricorrendo alla simmetria dei coefficienti della matrice dimostrava che se $s = a$ è una radice doppia di $f(s) = 0$ allora $B_{ij}(a) = 0$, pervenendo alla forma di indeterminazione $0/0$. In realtà, una estensione della formula di Jacobi al caso non generico di radici multiple richiederebbe la dimostrazione della seguente proprietà:

Proprietà 1 *Se $s = a$ è una radice multipla del polinomio caratteristico $f(s)$ con molteplicità $m > 1$, allora $(s - a)^{m-1}$ divide ogni cofattore di $A - sI$.*

La stessa difficoltà che affligge la formula (6) si presenta a Cauchy nel 1839 nel corso delle sue ricerche sulla teoria ondulatoria della luce. Nel tentativo di sviluppare la matematica soggiacente a tale approccio, Cauchy è condotto a riprendere il problema già trattato da Lagrange della stabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie e lineari del secondo ordine[4]. Per semplicità ci limitiamo al caso più semplice di un sistema di equazioni lineari del primo ordine del tipo:

$$\dot{y} + Ay = 0, \quad y(0) = c_0, \tag{7}$$

che lo stesso Cauchy considera in grande dettaglio. Indicate con $s_1, \ldots, s_k$ le radici distinte del polinomio caratteristico $f(s) = \det(sI + A)$, Cauchy scrive la soluzione $y(t)$ del sistema nella forma $y = R(t)c_0$, dove $R(t)$ indica la matrice così definita:

$$R(t) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{s=s_j} \left[e^{st} \frac{\mathrm{Adj}(sI + A)}{f(s)} \right]. \tag{8}$$

Ora, la validità della precedente soluzione è generale (non generica) nel senso che essa comprende anche il caso specifico di radici multiple dell'equazione caratteristica. La questione della stabilità delle soluzioni di (7) è ricondotta alla dimostrazione del fatto che la funzione $\dfrac{B_{ij}(s)}{f(s)}$, con $B = \mathrm{Adj}(sI + A)$, o non ha poli in corrispondenza di radici dell'equazione caratteristica oppure ha poli al più di ordine 1. Più esplicitamente, la formula integrazione di Cauchy assicura che le soluzioni del sistema sono limitate (e quindi stabili) se e solo se vale la proprietà menzionata sopra la cui validità consentirebbe di estendere la formula (6) oltre il caso generico di radici distinte.

Questo è, a grandi linee, lo stato dell'arte della disciplina allorquando K. Weierstrass comincia ad interessarsi del problema delle piccole oscillazioni di un sistema meccanico e, di riflesso, del teorema generalizzato degli assi principali. Nell'introduzione a (Weierstrass 1858) Weierstrass scrive:

> non mi pare che particolare attenzione sia stata prestata alle circostanze specifiche che si realizzano allorquando le radici di $f(s) = 0$ non sono tutte distinte; inoltre, le difficoltà che esse presentano – delle quali fui reso consapevole per via di una questione che sarà discussa più dettagliatamente nel seguito – non sono mai state opportunamente chiarite. Inizialmente, ritenevo che ciò non sarebbe stato possibile senza una estesa (weitläufige) discussione alla luce del gran numero di casi differenti che si possono presentare. Per questo, fui tanto più sorpreso di scoprire che la soluzione prodotta dai matematici summenzionati [Weierstrass ha citato Jacobi e Cauchy] potesse essere modificata in maniera tale che sia irrilevante se le soluzioni $s_1, \cdot, s_n$ sono distinte oppure no.

Il contenuto matematico della memoria di Weierstrass può essere sintetizzato nel seguente risultato che costituisce insieme una generalizzazione del teorema degli assi principali e una soluzione al problema della stabilità per le soluzioni del sistema di EDO di Lagrange e Cauchy.

Teorema 2 *Siano $\Phi = y^t B y$ e $\Psi = y^t A y$ forme quadratiche (reali) nelle variabili $y_1, \ldots, y_n$ (quindi, A e B sono matrici simmetriche) $\Phi(y) > 0$ per ogni $y \neq 0$, allora le radici del polinomio $f(s) = \det(sB - A)$ sono reali. Inoltre, esiste un cambiamento di variabili non singolare $z = Ly$ tale che $\Phi(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$ e $\Psi(z) = s_1 z_1^2 + \ldots + s_n z_n^2$, dove $s_1, \ldots, s_n$ sono le n radici di $f(s) = 0$, ciascuna ripetuta secondo la propria molteplicità.*

La dimostrazione del teorema fornita da Weierstrass poggia interamente sulla dimostrazione della proprietà (1). Essa consiste in un'abile applicazione di alcuni risultati della teoria

[4](Cauchy 1839)

delle funzioni analitiche (teorema dei residui e espansione in serie di Laurent). Non è qui necessario ripercorrere nel dettaglio i particolari della dimostrazione; ben più importante è sottolineare come Weierstrass, nell'ultimo paragrafo di (Weierstrass 1858) affronti esplicitamente il problema della stabilità delle soluzioni di (4) imputando l'erronea conclusione di Lagrange circa l'incompatibilità di soluzioni stabili e l'esistenza di radici multiple del polinomio caratteristico associato, alla inadeguatezza dello stile di ragionamento generico. In particolare, tale tipo di approccio ha impedito di notare come la stabilità delle soluzione sia in realtà garantita anche nel caso di radici multiple dalla simmetria delle matrici A e B.

La memoria di Weierstrass non si limita a produrre nuove dimostrazioni e nuovi risultati; essa si fa latrice, ed in effetti tale è considerata dai colleghi e dagli studenti di Berlino, di un nuovo ideale di ragionamento e di stile. Esso può essere riassunto così:

> Generic reasoning is unacceptable due to its lack of rigor, but this does not mean that the elegance of generic reasoning and the resulting theorems must be completely abandoned due to the need for "extensive discussions in view of the large number of different cases that can occur." On the contrary, new mathematical tools (e.g., the theory of determinants and Laurent expansions) make it possible to avoid a case-by-case analysis and to achieve truly general results in a manner that retains the elegance of the generic approach (Hawkins 2013, p. 113).

(Weierstrass 1858) e le successive (precisamente nel 1868) generalizzazioni dei risultati lì contenuti con la teoria dei divisori principali inaugura una nuova stagione dell'algebra lineare. Kronecker, Frobenius e Killing esplorano nuovi campi di applicazioni della teoria nei quali gli ideali stilistici di Weierstrass trovano una felice incarnazione; costituiscono esempi importanti il problema della trasformazioni per forme bilineari del tipo $\lambda\Psi + \Phi$ nel caso in cui Ψ è singolare (Kronecker 1874), il problema dell'integrazioni di sistemi di forme differenziali completamente integrabili (Frobenius 1877) e la classificazione delle algebra di Lie complesse e semplici (Killing 1888-1890).

In tale contesto, Kronecker sembra assumere il ruolo di portavoce di tali nuovi ideali di stile e di rigore. Ciò risulta particolarmente evidente ad esempio in (Kronecker 1874, p. 408), dove dichiara polemicamente:

> È frequente, soprattutto in questioni algebriche, imbattersi in difficoltà essenzialmente nuove quando ci si allontana da quei casi che per consuetudine sono detti *generali*. Non appena ci si spinge al di sotto della superficie di questa supposta generalità, che esclude ogni caso particolare, e si penetra nella *vera generalità*, la quale comprende ogni caso particolare, è allora che solitamente si presentano le vere difficoltà del problema; ma allo stesso tempo anche la ricchezza di nuovi punti di vista e di nuovi fenomeni in tutta la loro profondità.

Conclusioni

Per quanto ineffabile e controversa, la categoria di stile costituisce uno strumento essenziale per il lavoro dello storico. Non è infrequente infatti che essa sia assunta come principio ordinatore di un intero discorso storiografico ovvero come espediente euristico per tracciare confronti e individuare ciò che di essenziale vi è nell'opera che si intende analizzare.

I due casi di studio succintamente ripercorsi in questo intervento offrono due declinazioni distinte della categoria: il primo attiene alla dimensione individuale di stile (è prerogativa esclusiva dei grandi matematici la capacità di farsi latori di uno stile proprio), il secondo invece offre un esempio di come, a partire da una singola figura carismatica, tratti stilistici comuni si affermino all'interno di una cerchia più o meno ristretta di matematici e in seguito influenzino le aree più svariate della ricerca matematica.

Infine, osserviamo che per quanto lo stile e la sostanza matematica di un lavoro costituiscano, per così dire, due entità ben distinte, cionondimeno esse sono soggette ad una reciproca dipendenza. Da un lato, si è visto, lo stile algoritmico di Jacobi è riflesso nell'enfasi che egli pone sul problema della trasformazione degli integrali ellittici di prima specie e viceversa, l'individuazione delle priorità di ricerca influenza in maniera determinante il processo euristico della scoperta e le scelte espositive.

Dall'altro, l'esempio di Weierstrass rappresenta un caso emblematico in cui lo stile e lo sostanza del discorso matematico sono strettamente intrecciate: la dimostrazione della stabilità del sistema di equazioni di Lagrange-Cauchy richiede precise scelte stilistiche che attengono agli standard di rigore accettati e implicano l'abbandono di uno stile di ragionamento generico; contemporaneamente, la necessità di un tale cambiamento di paradigma stilistico sembra, come si è mostrato, essere dettata per larga parte dalla logica interna della disciplina, cioè da problemi specifici che per lungo tempo sono rimasti irrisolti.

References

[Aristotele] ARISTOTELE (1960), *Posterior Analytics and Topica*, traduzione inglese, Harvard University Press, 1960.

[Bell 2010] BELL Eric (2010), *I grandi matematici*, Milano, BUR.

[Casorati 1868] CASORATI Felice (1868), *Teorica delle funzioni di variabili complessa*, Pavia, Tipografia dei Fratelli Fusi.

[Cavalieri 1635] CAVALIERI Bonaventura (1635), *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota*, Bologna, Clemente Ferroni.

[Cauchy 1829] CAUCHY Augustin-Louis (1829), Sur l'équation à l'aide de laquelle on determine les inégalités séculaires des mouvements des planètes. *Exer. de math.*, 4.

[Cauchy 1839] CAUCHY Augustin-Louis (1839), Mémoire sur l'intégration des équations linéaires. *Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris*, 8. Ripubblicato dallo stesso Cauchy come (Cauchy 1840).

[Cauchy 1840] CAUCHY Augustin-Louis (1840), Mémoire sur l'intégration des équations linéaires. *Exer. danalyse*, 1.

[Chasles 1837] CHASLES Michel (1837), *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, Hayez.

[Cogliati 2014] COGLIATI Alberto (2014), On Jacobi's transformation theory of elliptic functions, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 68, 529-545.

[Dubucs & Dubucs 1994] DUBUCS Jacques e DUBUCS Monique (1994), La couleur des preuves, in V. de Coorbyter, (ed.) *Structures rhétorique en science*, PUF, 231-249.

[Frobenius 1877] FROBENIUS Georg (1877), Über das Pfaffsche Problem, *Jl. fušr die reine u. angew. Math.*, 82, 230-315.

[Granger 1968] GRANGER Gilles (1968), *Essai d'une philosophie du style*, Paris, Armand Colin.

[Hawkins 2013] HAWKINS Thomas (2013), *The Mathematics of Frobenius in context*, New York, Springer.

[Jacobi 1827c] JACOBI Carl Gustav Jacob (1827), Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis, *Astronomische Nachrichten*, Nr. 127, 133-142. Anche in (Jacobi's Werke, I, p. 37-48)

[Jacobi 1834] JACOBI Carl Gustav Jacob (1834), De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant ... *Jl. für die reine u. angew. Math.*, 12, 1-69. Anche in (Jacobi's Werke, III, p. 37-48) 3, 191.

[Jacobi's Werke] JACOBI Carl Gustav Jacob (1881-1891), *C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke*, Borchardt, C. W. and K. Weierstrass (eds). 7 vols. and Supplementband, Berlin, G. Reimer.

[Killing 1888-1890] KILLING Wilhelm (1888-1890), Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, *Math. Ann.*, 31, 252-290; 33, 1-48; 34, 57-122; 33, 161-189.

[Kronecker 1874] KRONECKER Leopold (1874), Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen, *Monatsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin*, 59-76.

[Lagrange 1766] LAGRANGE Joseph-Louis (1766), Solution de différents problèmes de calcul intégral. . . . Misc. Taurinensia.

[Legendre 1828] LEGENDRE Adrien Marie (1828), Note sur les nouvelles propriétés des fonctions elliptiques découvertes par M. Jacobi, *Astronomische Nachrichten*, 130, 201-208.

[Weierstrass 1858] WEIERSTRASS Karl (1858), Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen, *Monatsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin*, 1858.

Torino, 19 Febbraio 2015