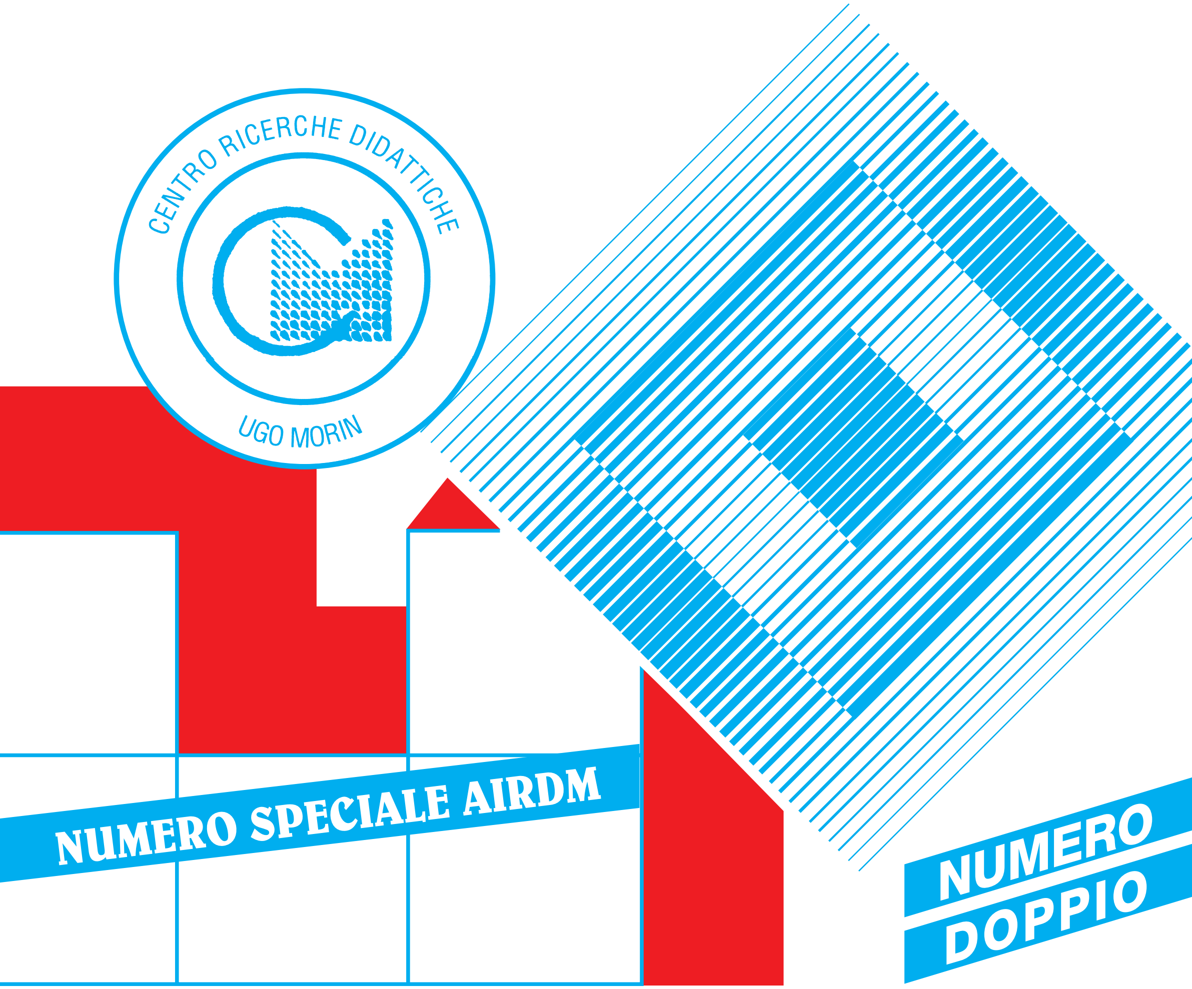
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL. 38 A-B N. 3 - MAGGIO-GIUGNO 2015

Poste Italiane s.p.a. - Spedizione in Abbonamento Postale - D.L. 353/2003 - (conv. In L. 27/02/2004 n° 46)
art. 1, comma 1, NE/PD - Rivista mensile - Tiratura inferiore a 20.000 copie - Taxe Perçue



Organo del CENTRO RICERCHE DIDATTICHE UGO MORIN - Istituti Filippin - PADERNO DEL GRAPPA

Il trascinamento di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica

Sommario

In ambienti di geometria dinamica, il trascinamento di mantenimento è una particolare modalità di trascinamento che consiste nel muovere un punto base di una figura in modo che la figura mantenga certe proprietà. L'uso del trascinamento di mantenimento è stato riscontrato nell'attività spontanea di studenti e, anni dopo, proposto esplicitamente ad alcuni allievi nel corso di un progetto di ricerca di cui questo articolo riporta alcuni dei risultati più significativi. In particolare, dopo l'analisi di un caso, sarà presentato un modello per l'analisi cognitiva dei processi di generazione di congetture con l'uso del trascinamento di mantenimento. Concluderemo con alcune riflessioni sulle implicazioni didattiche.

Abstract

Maintaining dragging is a specific dragging modality used in dynamic geometry environments; it consists in moving a base point of a figure so that the figure maintains certain properties. The use of maintaining dragging was initially noticed in students' spontaneous activity and, years later, explicitly taught to students during a research study of which this article presents some of the main findings. In particular, after the analysis of a case, we present a model for the cognitive analysis of processes of conjecture generation when maintaining dragging is used. We conclude with some observations on didactical implications.

Samuele Antonini
Anna Baccaglini-Frank

VOL.38 A-B N.3
MAGGIO - GIUGNO 2015

Il trascinamento di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica

Samuele Antonini*, Anna Baccaglini-Frank**

**Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia*
***Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia*

1. Introduzione

Congetturare, argomentare e dimostrare sono cardini essenziali dell'attività matematica la cui rilevanza educativa è stata evidenziata con forza sia in documenti istituzionali sia nella ricerca in didattica della matematica. In documenti quali "Matematica 2003" (MIUR, UMI et al., 2003) le attività di "argomentare, congetturare, dimostrare" sono tra i "nuclei trasversali" (p. 8). Le Indicazioni Nazionali del 2010 (MIUR, 2010) delineano un profilo educativo culturale e professionale dello studente a conclusione dei percorsi liceali. Tra gli aspetti del lavoro scolastico di cui propone la "piena valorizzazione" vi sono "la pratica dell'argomentazione e del confronto" e "l'uso degli strumenti multimediali a supporto dello studio e della ricerca".

La ricerca in didattica della matematica negli ultimi decenni ha evidenziato l'importanza dei "problemi aperti" (nel senso di Arsac, 1999 e Silver, 1995) come consegne che favoriscono attività di produzione di congetture e di argomentazioni. Nel contesto di problemi aperti, gli studenti si trovano davanti ad una situazione in cui non ci sono istruzioni precise, ma sono lasciati liberi di esplorare la situazione e trarre le proprie conclusioni. Spesso il processo risolutivo richiede la generazione di condizionalità dopo un'esplorazione fisica o mentale della situazione problematica (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, Garuti, 1997) e in

letteratura, si fa spesso riferimento a problemi aperti con la richiesta esplicita di produrre congetture (per esempio: Boero, Garuti e Mariotti, 1996; Olivero, 2001; Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002; Boero, Garuti e Lemut, 2007). La natura dinamica dell'esplorazione di problemi aperti diventa particolarmente evidente negli ambienti di geometria dinamica (AGD), dove le figure possono essere effettivamente esplorate attraverso il trascinamento, pertanto questi ambienti risultano ideali per porre problemi aperti e osservare e analizzare processi di generazione di congetture[1]. In un AGD un problema aperto di congettura spesso prende la forma di una richiesta generica di produzione di un enunciato sulle relazioni tra gli elementi della configurazione o tra le proprietà della configurazione. Le domande sono generalmente espresse nella forma "quale configurazione assume … quando…?", "Che relazione riesci a scoprire tra … e …?", "In quali tipi di figura può… essere trasformato?".
Obiettivo della ricerca che presentiamo in queste pagine è l'analisi dei processi coinvolti nella formulazione di congetture e argomentazioni nel contesto di problemi aperti assegnati in ambienti di geometria dinamica con particolare attenzione ad una specifica modalità di trascinamento.

2. Il trascinamento

Il *trascinamento (dragging)* è un'azione che consiste nel selezionare un elemento di una figura dinamica (in genere un punto) e muoverlo sullo schermo (con la mediazione del mouse o direttamente con il dito, se il software è utilizzato in un ambiente con schermo touch). Come è noto, con il trascinamento le figure mantengono le proprietà determinate dalle relazioni geometriche definite dai comandi usati nella costruzione e quelli che sono conseguenza logica nella Teoria della Geometria Euclidea (Laborde & Strässer, 1990). Grazie a questa scelta di design del software, per

[1] Esempi di tali ambienti sono Cabri, Geogebra, Geometer's Sketchpad.

cui vengono mantenute durante il trascinamento della figura le proprietà costruite direttamente e tutte quelle derivate da esse, in una figura dinamica è possibile distinguere punti (e in generale oggetti) *base* – cioè costruiti come nuovi oggetti sullo schermo – da punti (oggetti) *dipendenti* – cioè costruiti a partire da altri elementi, con cui sono messi in relazione[2].
Alcuni ricercatori hanno individuato e classificato diverse modalità di trascinamento, in base agli obiettivi dello studente e rispetto all'attività di esplorazione in situazioni in cui è richiesta la formulazione di una congettura (Arzarello et al., 2002). A partire dalle modalità di trascinamento individuate da Arzarello e altri (2002) ne sono state riprese quattro e proposte ad alcuni studenti del primo biennio di scuola secondaria di secondo grado, lavorando con l'AGD Cabri II Plus. Le quattro modalità e le loro descrizioni (come sono state fornite agli studenti) sono le seguenti[3]:

- *trascinamento libero*: muovere a caso un punto sullo schermo;
- *trascinamento di mantenimento (TdM)*: muovere un punto base in modo che la figura mantenga una certa proprietà;
- *trascinamento con traccia*: trascinare un punto base avendo attivato su di esso la traccia (un segno sullo schermo lasciato dal punto trascinato);
- *test di trascinamento*: trascinare punti, per vedere se la figura mantiene le proprietà desiderate.

Nelle prossime pagine, presentiamo un modello per l'analisi dei processi di generazione di congetture con l'uso del trascinamento di mantenimento. Per meglio comprendere i diversi aspetti del

[2] Il lettore interessato ad approfondire l'idea di "gerarchia" tra gli elementi costituenti una figura dinamica può consultare Mariotti (2010) e Baccaglini-Frank (2012a, 2012b).

[3] Per una descrizione più dettagliata di come sono state elaborate queste modalità di trascinamento e delle loro relazioni con le modalità del 2002 si veda la sezione 2.5 di Baccaglini-Frank (2010, pp. 63-66).

modello e la loro articolazione, premettiamo innanzitutto l'analisi di un caso.

3. Studio di un caso

Analizziamo una intervista ripresa da Baccaglini-Frank e Mariotti (2010) e Baccaglini-Frank (2010). La consegna richiede innanzitutto di effettuare la seguente costruzione in un AGD:

- un punto P e una retta *r* per P;
- la perpendicolare a *r* per P;
- un punto C sulla perpendicolare;
- un punto A simmetrico di C rispetto a P;
- un punto D nel semipiano individuato a *r* contenente A;
- la retta per P e D e la circonferenza di centro C e raggio CP;
- B come seconda intersezione della circonferenza con la retta per P e D;
- il quadrilatero ABCD.

La consegna data agli studenti durante lo studio era: "Formulare delle congetture sul quadrilatero ABCD (figura[4] 1), e descrivere *tutti* i modi in cui è possibile ottenere un certo tipo di quadrilatero".

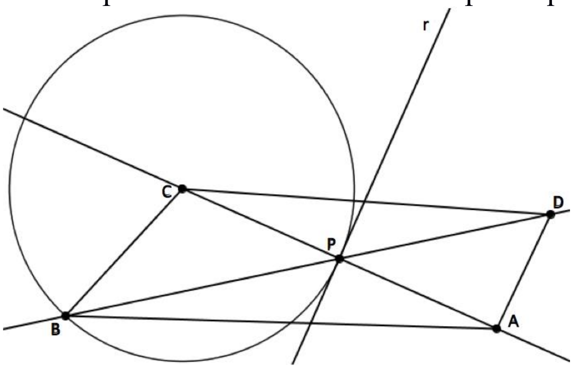


Figura 1 Figura ottenuta dai passi della costruzione descritta.

[4] Le figure sono state ricostruite e riprodotte dagli autori con un diverso software per aumentarne la nitidezza.

Per rendersi conto della difficoltà nel trascinamento di mantenimento, prima di proseguire invitiamo il lettore ad eseguire la costruzione in un AGD e a provare a trascinare il punto D in modo che ABCD sia un parallelogramma.
Gli studenti coinvolti nell'intervista, Stefano e Giulio, frequentano una classe seconda di liceo scientifico. Avevano precedentemente utilizzato l'AGD Cabri II Plus e avevano partecipato alle due lezioni introduttive dello studio che descriveremo in dettaglio nelle conclusioni. La loro esplorazione dura 20 minuti circa, compresa la costruzione della figura e fino alla formulazione scritta di una congettura.
Consideriamo alcuni estratti dell'intervista, a partire dal momento in cui gli studenti analizzano il caso del parallelogramma. Lo studente che tiene il mouse è evidenziato in grassetto.

Ste: Beh, viene parallelogramma quando BP è uguale a PD (figura 2).

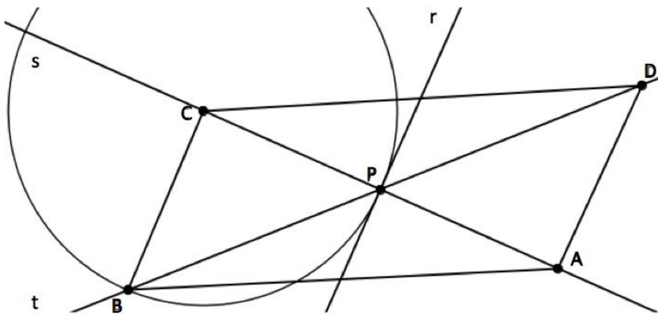


Figura 2 Configurazione con ABCD parallelogramma

A questo punto gli studenti cominciano a esplorare le relazioni tra gli elementi (in particolare i punti) della figura, o, in altre parole, le relazioni di gerarchia e di dipendenza tra i punti costruiti. L'obiettivo principale sembra quello di gestire i movimenti delle diverse parti della figura e pertanto di aumentare il controllo degli aspetti dinamici. Il processo ricorda molto le prime esplorazioni con le macchine matematiche analizzate da Martignone e Antonini (2009).

Ste: Questo non lo posso muovere [sembra indicare P] perché posso muovere solo questo [prende il punto C].
Giu: Esattamente.
Ste: [sposta C].
Giu: Quindi D è indipendente e si sta per i fatti suoi [Ste muove D].
Ste: Però…sì. […]
Giu: Sì, aaa…llora…A è dipendente da C perché sta alla stessa distanza, e quindi rimane quello.
Giu: Bravo…B è dipendente sia da C sia da D, giusto? […]
Giu: Sì, se muovi C si muove B uguale.
Giu: …se muovi D?
Ste: [muove D]…uguale
Giu: Idem, si muove. Quindi B è dipendente da …
Ste: D e da C.
Giu: Da C e da D, esattamente. Quindi bisogna trovare la maniera, eh, le condizioni possibili sono C e D, perché solo spostando C e D si può avere qualcosa che cambi.
Ste: Infatti […]
Giu: eh, eh, eh, eh eh, quindi…per avere un parallelogramma quello che sembrava all'inizio…
Ste: Quindi BP=PD definizione, andiamo sul sicuro.
Giu: Sì. Sì, perché si dividono a metà, sono le diagonali e…
Ste: Scrivi!

Stefano e Giulio scrivono la seguente congettura: *ABCD è un parallelogramma quando BP=PD (ovvero quando P è il punto medio di BD).* Mentre Stefano scrive, Giulio ragiona ad alta voce proponendo una dimostrazione della congettura:

Giu: Perché? Perché quando questa è una diagonale del parall…del quadrilatero, questa qui è un'altra diagonale del parall…del quadrilatero
Ste: Aggiungo tra parentesi però che CP è uguale a PA.
Giu: CP=PA per definizione, BP è uguale a PD perché l'abbiamo detto noi…e quindi sono diagonali che s'intersecano a metà, quindi è un parallelogramma.

È stata dunque prodotta la catena seguente:

BP=PD $\Rightarrow$ le diagonali si bisecano $\Rightarrow$ ABCD è un parallelogramma (in simboli: $A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A$)

L'intervistatrice ricorda che la consegna chiede di trovare "*tutti* i modi in cui è possibile ottenere" un parallelogramma. Questa richiesta innesca una ricerca da parte degli studenti delle posizioni di punti e rette che garantiscano che ABCD sia un parallelogramma. Diventa evidente a questo punto la necessità degli studenti di controllare in modo ancora più raffinato il movimento delle diverse parti della figura. In particolare, al fine di mantenere la condizione BP=PD, Giulio costruisce una circonferenza con centro P e raggio PD (che indicheremo con C_{PD}, in generale indicheremo con C_{XY} la circonferenza di centro X e raggio XY, dove X e Y sono punti).

> **Giu**: Però puoi farlo così, vedi. Cioè puoi vedere che così viene solo quando…no, vedi…[trascina D e fa in modo che C_{PD} passi per l'intersezione in cui c'era B] […] provi a vedere *in modo che* questa cosa …rimanga (figura 3).

Stefano riprende il mouse e l'attenzione di entrambi si rivolge alle posizioni reciproche di C_{PD}, della retta PD, e di C_{CP}, e in particolare al momento in cui la retta PD passa per un punto di intersezione delle due circonferenze. Diventa presto evidente che è possibile controllare facilmente con il mouse la posizione dell'intersezione di PD e delle due circonferenze.

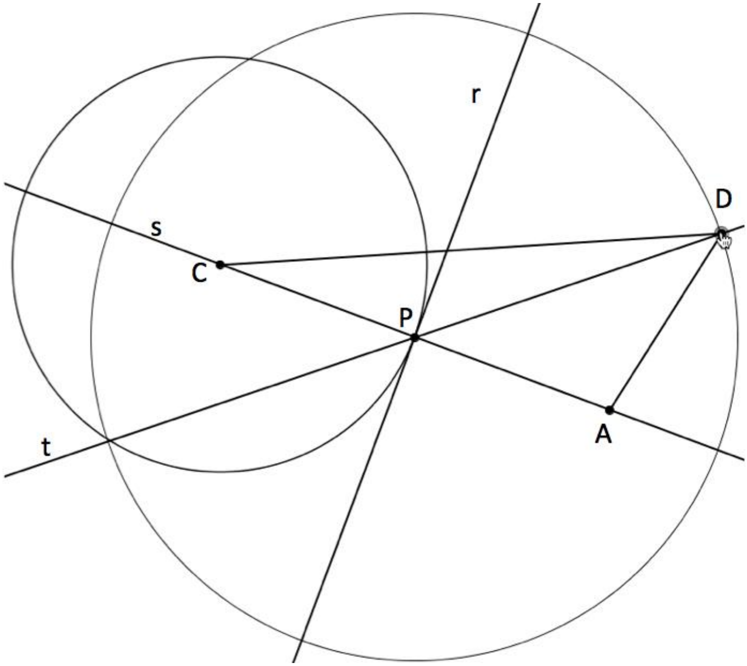


Figura 3 Costruzione di una circonferenza per controllare la posizione di B.

Questo è un momento fondamentale dell'intero processo, in cui assistiamo alla genesi di una proprietà A_3 (che chiameremo *proprietà-pivot* o *invariante-pivot* per motivi che spiegheremo nel seguito) tale che $A_3 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A$, dove A_3 è la proprietà "le circonferenze e la retta PD si intersecano in un punto".
Concorrono alla generazione di A_3 sia elementi di natura teorica che di natura pragmatica, legati al dominio fenomenologico del AGD: la proprietà A_3 permette di controllare in modo più diretto la figura e in particolare la proprietà-obiettivo (ABCD parallelogramma).
Quindi Giulio esplora "quando" B appartiene anche a C_{PD}. Stefano riprende il mouse e Giulio si prepara ad osservare il movimento di D. Stefano comincia a trascinare D usando il TdM con traccia attiva (figura 4). L'attenzione di Giulio è sulla traccia.

Ste: e facciamo la traccia di D. […]

Giu: Tenta di tenere queste cose qui [indica B su C_{PD}].
Giu: Mi sembra sia una curva…
Ste: Ma è difficilissimo!
Giu: Lo so. Posso solo immaginare…Però mi sembra che sia una circonferenza….di centro A. […]
Ste: No, eh, intanto il raggio è AD per forza! Comunque dovresti avere AP uguale ad AD [ha il mouse ma non trascina più].

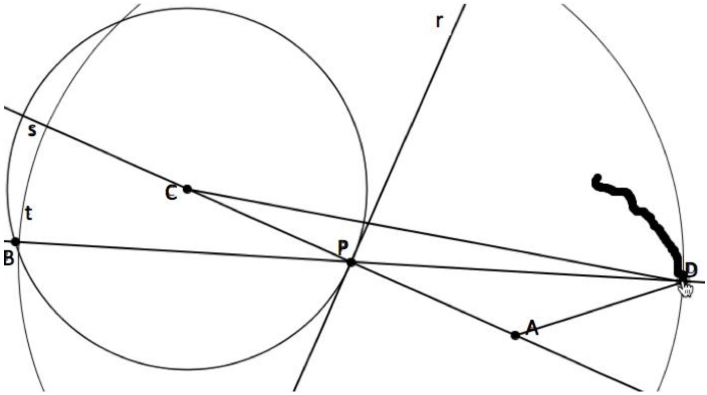


Figura 4 TdM con traccia attiva

Stefano si concentra sul mantenimento della proprietà-pivot (che viene dunque trattata come un invariante da mantenere e che pertanto chiameremo invariante-pivot), mentre Giulio tenta di descrivere in termini geometrici il segno lasciato dalla traccia. Due sono gli invarianti osservati durante il trascinamento:

1) $D \in C_{AP}$
2) PA=AD.

Giulio costruisce la circonferenza di centro A e raggio AP e trascina D mantenendolo sulla circonferenza. Si tratta di un test di verifica della congettura:

Giu: Quindi pensavo a una cosa di questo tipo, no? [costruisce la circonferenza di centro A e raggio AD, C_{AD}]…vediamo se va, vediamo se va, vediamo se va…sì!! (figura 5)

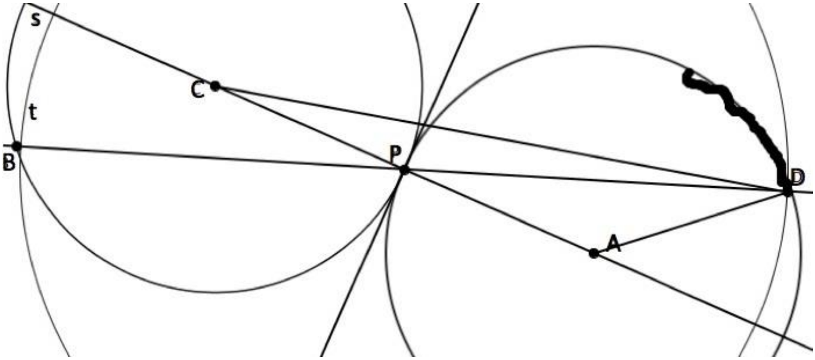


Figura 5 Test di trascinamento

La congettura finale, formulata per iscritto dagli studenti, è "ABCD è un parallelogramma se PA=AD."
Successivamente, con l'aiuto di Ste, Giulio arriverà a generare una catena deduttiva corretta, dimostrando la congettura.

4. Modello del trascinamento di mantenimento

Presentiamo ora un modello che permette di descrivere in dettaglio i processi cognitivi coinvolti nella generazione di congetture con l'uso del trascinamento di mantenimento in un AGD.
In questi processi, come visto nel caso sopra esaminato, assumono un ruolo fondamentale gli *invarianti* della figura soggetta al trascinamento, le proprietà geometriche che la figura assume in maniera "robusta" (cioè stabili durante il trascinamento), e anche alcune proprietà assunte in modo non robusto (cioè proprietà indotte con il trascinamento) se il trascinamento segue opportune traiettorie (Baccaglini-Frank e Mariotti, 2010; Baccaglini-Frank, 2012b). L'analisi degli invarianti e dei processi ha portato a definire le seguenti nozioni, che sono gli elementi fondamentali del modello:

- Invariante Indotto Intenzionalmente (III),
- Invariante Osservato durante il Trascinamento (IOT),
- Path,
- Descrizione Geometrica del Path (DGP),

- Legame Condizionale (LC).

Nella tabella sottostante sono riportate le definizioni e le abbreviazioni che utilizzeremo nel seguito.

Nome	*Abbrev.*	*Definizione*
Invariante Indotto Intenzionalmente	III	Proprietà (o configurazione che la rappresenta) che il solutore sceglie di cercare di mantenere
Path		Insieme di punti con la proprietà: "se il punto trascinato coincide con uno qualsiasi di questi punti allora l' III è percettivamente verificato"
Descrizione Geometrica del Path	DGP	Caratterizzazione geometrica del path
Invariante Osservato durante il Trascinamento	IOT	Proprietà (o configurazione che la rappresenta) che sembra verificarsi mentre un III è indotto con il TdM
Legame Condizionale	LC	Legame logico (implicito) tra l'IOT e l'III, eventualmente indotto dalla percezione di asimmetria nel controllo dei due invarianti
Congettura		Enunciato (esplicito) che esprime il LC

I processi descritti dal modello riguardano possibili *schemi d'azione*[5] (che non sono esplicitati dal solutore e dunque per lo più invisibili per un osservatore esterno) associati all'uso di particolari tecniche esplorative (per es., trascinamento di mantenimento) relativi a task e sotto-task (spesso implicite) intraprese dal solutore durante il processo di generazione di congettura. Sottolineiamo che le task e sotto-task elencate non sono in nessun modo prescrittive e sono soltanto una nostra descrizione di consegne che il solutore

[5] Usiamo questo costrutto con riferimento all'*approccio strumentale*, ma una descrizione in questo senso va oltre gli scopi del presente articolo. Il lettore interessato può consultare, per esempio Trouche (2004).

sembra affrontare durante il processo di formulazione di una congettura.

Task 0: Costruire una figura dinamica
a) scegliere gli invarianti di costruzione
b) attuare la costruzione

Task 1: Cercare invarianti di costruzione e invarianti derivati
a) discernimento di invarianti
b) formulazione di congetture iniziali

Task 2: Individuare una configurazione particolare e identificare istanze da ottenere/costruire/esplorare
a) individuare una configurazione particolare
b) cercare proprietà (minima) di base
c) trovare esempi della configurazione particolare

Task 3: mantenere la configurazione interessante (III)
a) rendere più diretto il controllo (indiretto) della figura da parte del solutore
b) mantenere la configurazione interessante

Task 4: cercare una "condizione" della configurazione interessante (o dell' III)
a) trovare una DGP
b) determinare (almeno un) IOT
c) stabilire un LC

Task 5: Verificare il legame condizionale ed esprimere la congettura
a) verificare percettivamente il LC
b) costruire l'IOT stabilmente

Task 6: Continuare l'esplorazione per sotto-casi rispetto alla nuova figura con nuova condizione stabile imposta.

5. Il controllo della figura

Muovere un punto base in modo che la figura mantenga una certa proprietà richiede di controllare i movimenti delle diverse parti della figura, e questo in qualche caso può risultare particolarmente complesso, come mostrato nell'esempio del parallelogramma e nell'esplorazione di Giulio e Stefano.

In Baccaglini-Frank (2010, pp. 112-119) è descritto come gli studenti, per individuare sotto quali condizioni è possibile ottenere una certa configurazione (per esempio, "parallelogramma"), spesso spostano l'attenzione dall'intera configurazione ad una sua proprietà caratterizzante (per esempio, "diagonali che si bisecano nei punti medi"). Spostare l'attenzione dalla configurazione completa ad una sua parte o ad una proprietà sembra agevolare il compito di molti solutori, e aveva condotto l'autrice a considerare come proprietà di base una proprietà direttamente connessa ad una definizione o equivalente ad essa. Il solutore, individuata una proprietà di base, cercava una condizione che la garantisse. La congettura assumeva la condizione come ipotesi e l'appartenenza della figura ad una particolare tipologia come tesi. In questo modo la proprietà di base assumeva un ruolo fondamentale nella formulazione della congettura e faceva da "ponte" tra ipotesi e tesi.

Nel caso esaminato, i due studenti cercano di ottenere un parallelogramma, finché Stefano osserva che è sufficiente fare in modo che le diagonali si dimezzino e quindi, dato che per costruzione AP=CP, che PB=PD.

Da questo momento gli studenti useranno questa proprietà per mantenere la *proprietà obiettivo* (ABCD parallelogramma). In altri termini, nel trascinamento dei diversi punti base (in particolare D), i solutori focalizzano l'attenzione sulla proprietà PB=PD che diventa l'invariante, più facilmente controllabile, da mantenere.

Il processo che ha consentito di generare tale proprietà è di tipo *abduttivo* (della tipologia riscontrata in Arzarello et al., 2002) e può essere così schematizzato:

(*voglio A*) ABCD parallelogramma

(*conosco il teorema*) Se le diagonali di un quadrilatero si dimezzano, allora il quadrilatero è un parallelogramma.
(*conclusione abduttiva A_1*) Le diagonali si dimezzano in P.
(*conclusione abduttiva A_2*) PB=PD.

Di fatto, in una fase successiva, Giulio e Stefano individuano una ulteriore proprietà e costruiscono una circonferenza (figura 3) allo scopo di raffinare ulteriormente il controllo sulla figura.
In generale, per mantenere una configurazione interessante A, diventa essenziale per il solutore poter esercitare un adeguato controllo sulla figura, o comunque "rendere più diretto il controllo (indiretto)" (sotto-task 3a). Per gestire questo compito lo studente spesso risale ad una proprietà A_1 dal controllo più facile e diretto e che garantisce A. Il processo, iterato, può portare alla produzione di una catena di proprietà A_1, A_2, ……A_n , da controllare in maniera via via più diretta e in modo che ognuna garantisca la precedente. Questa catena potrà essere rovesciata in una catena di deduzioni in fase dimostrativa ($A_n \Rightarrow \dots \dots \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$).
La molla che fa scattare le inferenze trova dunque le sue origini nella necessità di controllare la figura, e in particolare di coordinare il movimento del punto trascinato con quello delle altre parti della figura al fine di mantenere un certo invariante.
Richiamare nozioni dalla Teoria della Geometria Euclidea può diventare in questo modo funzionale a risolvere (o almeno a gestire) il problema del controllo: gli studenti stanno cercando frammenti di teoria con il particolare obiettivo di avere un miglior controllo aptico[6] sulla loro figura. Questi stessi frammenti teorici potranno essere reinvestiti per la costruzione dell'argomentazione e della dimostrazione.

[6] Un tipo di controllo che riguarda la percezione derivata dalla coordinazione oculo-manuale del solutore.

6. Il path, la traccia, gli invarianti osservati durante il trascinamento e il legame condizionale

Durante il trascinamento di mantenimento, il solutore può notare una regolarità nel movimento del punto e accorgersi che il movimento della mano riproduce esattamente tale regolarità. L'appartenenza del punto al *path*, descritto come oggetto geometrico, è un invariante osservato durante il trascinamento (IOT), che assume un ruolo chiave nella formulazione della congettura. In alcuni casi gli studenti hanno individuato anche altri invarianti in seguito all'uso del TdM. Per esempio, nel caso sopra esaminato, un primo invariante osservato durante il trascinamento è l'appartenenza del punto D alla circonferenza di centro A passante per P. Poi gli studenti sono passati ad un secondo IOT: PA=AD.
Funzionale alla descrizione geometrica del *path* può essere la *traccia* (segno lasciato sullo schermo in corrispondenza della posizione di un punto) che può quindi giocare un ruolo molto importante nella costruzione stabile dell'IOT_1 e nello stabilire una relazione tra i due invarianti IOT_1 e A_n.
Durante il TdM senza traccia attiva, il soggetto che trascina può soltanto cercare di mettere a fuoco – a livello di sensazione cinestetica e aptica – il movimento della propria mano, cercando, al massimo, di ricordarsi a mente alcune "buone posizioni" sullo schermo, visualizzando una "traccia invisibile" se ne è capace, mentre cerca di mantenere la configurazione obiettivo. Un esercizio di questo tipo richiede una notevole capacità della memoria a breve termine di tipo visuo-spaziale, e può essere agevolato soprattutto chiamando in soccorso aspetti concettuali della figura che possano guidare il processo di visualizzazione. Studenti con debole memoria di lavoro visuo-spaziale o deboli sulla Teoria della Geometria Euclidea potrebbero avere maggiori difficoltà e andare incontro al fallimento. La percezione è ancora più complessa per lo studente che usa il TdM, perché molte delle energie vengono spese per controllare la proprietà obiettivo che dev'essere mantenuta. Dunque, la traccia consente in qualche modo di "collassare il

tempo", o di vedere in un solo istante quello che altrimenti si può percepire solo in una sequenza temporale.

7. L'invariante-pivot

Riprendendo le osservazioni sopra emerse, notiamo come il processo di generazione del legame condizionale tra l'invariante osservato durante il trascinamento e l'invariante indotto intenzionalmente abbia una doppia natura.

In una prima fase, viene generata una catena di inferenze $A_n \Rightarrow \ldots \ldots \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$ con lo scopo di controllare in modo sempre più raffinato i movimenti della figura durante il trascinamento. La proprietà A_n sostituisce la proprietà obiettivo e diventa l'invariante da mantenere. A questo punto, il solutore può osservare un invariante IOT_1 che percepisce simultaneamente ad A_n con una differenza importante in termini di controllo: diretto su IOT_1, determinato dal trascinamento del punto scelto, indiretto su A_n. Questa relazione, spesso percepita come *relazione causale*, può essere interpretata in termini di *relazione logica* tra IOT_1 e A_n. In generale, questo processo potrebbe ripetersi e portare ad una catena di invarianti IOT_m ,… IOT_1. La proprietà invariante A_n, che chiamiamo *invariante-pivot*, assume un ruolo di cerniera tra le due catene e diventa fondamentale nella costruzione di un *legame condizionale* tra IOT_m e III, come mostrato in figura 6.

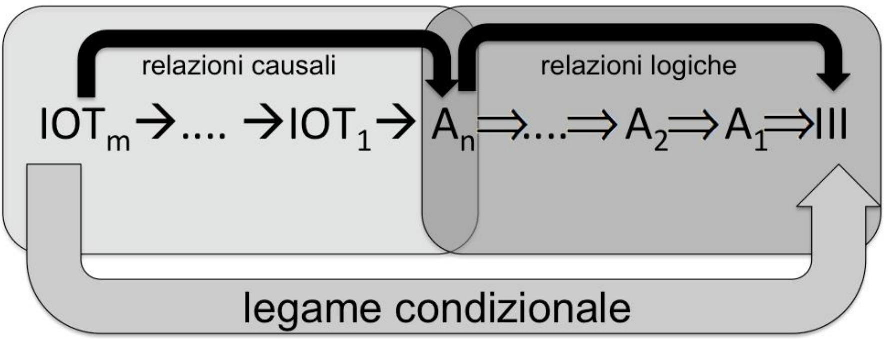


Figura 6 Le due catene di inferenze in un processo di generazione di un legame condizionale espresso da una congettura

La tabella seguente riassume le proprietà individuate nell'esplorazione di Giulio e Stefano (evidenziato l'invariante-pivot). Osserviamo che il verso delle frecce è contrario rispetto alla direzione (da destra a sinistra) della successione temporale con cui sono state generate.

IOT$_2$ →	**IOT$_1$** →	**A$_3$** ⇒	**A$_2$** ⇒	**A$_1$** ⇒	**A=III**
PA=AD	$D \in C_{AP}$	$B \in C_{PD}$ INV. PIVOT	BP=PD	diag. che si dimezz.	ABCD parallelogramma
min. 20	min. 15	min. 13	min.3-6	min 5	min. 2 e 5

8. Conclusioni

In questo articolo è stato presentato un modello dei processi cognitivi coinvolti nella formulazione di congetture nel contesto di particolari problemi aperti in ambienti di geometria dinamica. Il modello caratterizza particolari processi in attività genuine di problem solving, che promuovono la pratica dell'argomentazione, favorita e supportata dall'uso di un potente strumento multimediale. Riteniamo che l'analisi qui esposta possa avere diverse implicazioni didattiche.

Gli AGD permettono di "agire su" la figura costruita e di modificarla, e in queste pagine abbiamo analizzato la modalità di trascinamento di mantenimento e il ruolo chiave della necessità di controllare i movimenti della figura. Tale necessità può spingere verso la ricerca di frammenti teorici, utili ai fini della costruzione di un'argomentazione. Dunque il potenziale didattico di questo tipo di trascinamento dipende anche dalla sua possibilità di coinvolgere diversi aspetti del pensiero di uno studente: da quelli più "pratici" a quelli più "teorici", anche attraverso la consapevolezza di particolari sensazioni "corporee" (si veda, per esempio, Baccaglini-Frank, 2012b).

Riteniamo inoltre che sia possibile sfruttare il *potenziale semiotico* (nel senso di Bartolini Bussi & Mariotti, 2009) del trascinamento di mantenimento rispetto alla distinzione tra le nozioni di "premessa" e di "conclusione" di un enunciato condizionale favorendo la consapevolezza dello studente del tipo di controllo (diretto o indiretto) esercitato sulle proprietà in gioco (Baccaglini-Frank, 2012b). Fondamentale per sviluppare questa consapevolezza sembra essere un lavoro mirato a riconoscere la gerarchia "logica" sottostante la figura dinamica, obiettivo della prima lezione introduttiva offerta agli studenti dello studio.

Per quanto riguarda, infatti, un possibile utilizzo in classe del modello presentato, come strumento di guida e pianificazione dell'intervento dell'insegnante in situazioni simili a quella proposta nel caso analizzato, è importante chiarire gli obiettivi delle due lezioni preliminari proposte durante lo studio a classi intere. Le lezioni, di un'ora ciascuna, sono state svolte in aula informatica con gli studenti che lavoravano a coppie nell'AGD scelto. Gli obiettivi delle lezioni introduttive erano rispettivamente[7]:

Lezione 1

- distinguere tra punti (e in generale oggetti) base e punti (oggetti) dipendenti di una figura dinamica, frutto di una costruzione passo-passo con procedura data esplicitamente;
- sperimentare come diverse figure dinamiche che rappresentano in modo stabile (robusto) un parallelogramma possono derivare da diverse procedure di costruzione, e dunque possono avere diversi punti (oggetti) base e dipendenti;
- sperimentare i diversi comportamenti di tali figure quando i punti base sono trascinati.

Lezione 2

- esplorare una figura dinamica frutto di una costruzione passo-passo data, trascinando i suoi punti base;
- sperimentare (fisicamente) e descrivere diversi modi di trascinare punti base di una figura dinamica;

---

[7] Per ulteriori dettagli si veda il capitolo 3 di Baccaglini-Frank (2010, pp. 68-92) in cui si trovano anche testi di diversi problemi aperti di congettura assegnati durante lo studio.

- imparare i nomi delle quattro modalità di trascinamento date;
- cercare di formulare congetture sulla figura dinamica esplorata, ma senza feedback dall'insegnante.

Gli effetti di queste lezioni, in particolare della prima, sembrano essere evidenti nella prima fase dell'esplorazione analizzata, in cui gli studenti individuano le dipendenze reciproche dei punti, lavorando sia a livello empirico, sia nella ricerca di frammenti della teoria a supporto delle loro osservazioni. La configurazione su cui scelgono di formulare le prime congetture è il parallelogramma. Fare in modo che la figura assuma questa configurazione e la mantenga diventa l'obiettivo principale dell'esplorazione, in cui gli studenti cercano di gestire i movimenti delle diverse parti della figura e pertanto di aumentare il controllo degli aspetti dinamici. L'obiettivo non è facile da raggiungere e richiede la scoperta di una serie di nuove proprietà, che si controllano, a mano a mano, più "direttamente" e che *fanno sì che* la proprietà obiettivo rimanga visibile percettivamente. La proprietà che gli studenti riescono a controllare in modo diretto ha a che fare con il movimento del punto base D ($D \in C_{AP}$) che possono muovere liberamente. Questa seconda proprietà, sulla quale gli studenti hanno un *controllo diretto* (e che diventerà la tesi della congettura), appare *simultaneamente* alla proprietà obiettivo, su cui invece il *controllo è indiretto* (e che diventerà l'ipotesi della congettura): il legame causale, dato dal diverso tipo di controllo, si trasforma dunque in un legame condizionale.
Il modello presentato mette dunque bene in evidenza la ricchezza e la complessità dei processi coinvolti nella produzione di una congettura in un AGD. Riteniamo infine che il modello fornisca all'insegnante un utile strumento per analizzare tali processi e per sfruttare in modo consapevole il potenziale semiotico dello strumento trascinamento di mantenimento, al fine di promuovere una pratica dell'argomentazione matematica che sia ben fondata dai punti di vista epistemologico, cognitivo e didattico.

Bibliografia

Arsac, G. (1999). Variations et variables de la démonstration géométrique. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 19(3), 357-390.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A Cognitive Analysis of Dragging practises in Cabri Environments. *ZDM*, *34*(3), 66–72.

Baccaglini-Frank, A. (2010). Conjecturing in Dynamic Geometry: A Model for Conjecture-generation through Maintaining Dragging. *Doctoral dissertation*, University of New Hampshire, Durham, NH.

Baccaglini-Frank, A. (2012a). Dragging and Making Sense of Invariants in Dynamic Geometry. *Mathematics Teacher, 105 (8), 616-620*.

Baccaglini-Frank, A. (2012b) Potenzialità Didattiche di Alcune Attività in Geometria Dinamica. *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *35B* N.1, 27-50.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M.A. (2010) Generating Conjectures in Dynamic Geometry: the Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Bartolini Bussi & Mariotti M.A., (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 32, A-B*, 269-294.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental process underlying producing and proving conjectures. In *Proc. of the 20th Conference of the IGPME* (vol. 2, pp. 121-128). Valencia, Spain.

Boero, P., Garuti, R., & Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249-264). Sense Publishers.

Laborde, J. M., & Strässer, R. (1990). Cabri-Géomètre: A microworld of geometry for guided discovery learning. *ZDM, 22*(5), 171–177.

Mariotti, M. A. (2010). Riflessioni sulla dinamicità delle figure. In G. Accascina and E. Rogora (Eds.) *Seminari di Geometria Dinamica* (pp. 271-296). Roma: Edizioni Nuova Cultura.

Mariotti M.A., Bartolini Bussi, M., Boero P., Ferri F., & Garuti R. (1997) Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, In *Proc. of the 21st Conference of the IGPME,* (vol. 1, pp. 180-95). Lathi, Finland.

Martignone, F. & Antonini, S. (2009). Exploring the mathematical machines for geometrical transformations: a cognitive analysis. In *Proc. of the 33rd Conference of the IGPME*, (vol. 4, pp. 105-112). Thessaloniki, Greece.

MIUR (2010). *Indicazioni Nazionali 2010 per i licei*. Consultabili al sito http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20scientifico.pdf

MIUR, UMI, SIS, MATHESIS (2003). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Ciclo secondario.* Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri", Lucca.

Olivero, F. (2001). Conjecturing in Open-Geometric Situations in Cabri-Geometre: an Exploratory Classroom Experiment. In C. Morgan & K. Jones (Eds.), *BSLRM Research in Mathematics Education*, (vol. 3, pp. 229–246). London.

Silver, E. A. (1995). The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *ZDM/International Reviews on Mathematical Education*, 27(2), 67-72.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281–307.

La razionalità nel dimostrare mediante il linguaggio algebrico

Sommario

In questo articolo è presentato il costrutto di comportamento razionale, ripreso dal filosofo Habermas e adattato alla didattica della matematica. Nella prima parte del contributo è presentato il costrutto di comportamento razionale, motivando la sua adozione in relazione alle problematiche dell'insegnamento-apprendimento *della dimostrazione matematica. Nella seconda parte è proposta l'integrazione tra il costrutto di razionalità e il ciclo fondamentale dell'algebra. Il costrutto integrato è utilizzato come strumento analitico per l'analisi* di due episodi di un teaching experiment realizzato in due classi seconde di scuola secondaria di primo grado.

Abstract

In this article we present the construct of rational behavior, developed by the philosopher Habermas and adapted to the field of mathematics education. At first the construct is discussed in reference to the problématique of the teaching and learning of proof. Afterwards, the construct is integrated with the cycle of algebra in order to describe the rationality in algebraic proving. Such integrated construct is proves to be efficient in the analysis of two episodes from teaching experiments in grade 7.

Francesca Morselli