La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Dicembre 2014, 000-000

La verità in matematica

ENRICO MORICONI

1. – Introduzione

Nel 1986 il logico americano John Burgess pubblicò sul *Journal of Symbolic Logic* un articolo dal titolo *The truth is never simple* (1), e da allora la questione della verità matematica non si è certo semplificata. Una parte di questa complicazione deriva anche dal fatto che la questione può essere trattata a vari livelli.

Un primo livello, o almeno uno di quelli che per primo si impone all'attenzione dei matematici, è il fatto che i matematici stessi spesso percepiscono la questione "filosofica" di stabilire in cosa consista la verità matematica come una questione distinta, e in certo modo meno rilevante, di quella che riguarda la decisione circa quali enunciati siano veri. La maggior parte dei matematici ritiene che esistano criteri specifici ben determinati e condivisi per riconoscere quali enunciati matematici sono veri, anche se possono poi non concordare su cosa sia la verità, o sul rilievo di certi risultati o di certe porzioni della ricerca matematica. Come diceva Ennio De Giorgi in una conferenza del 1981 (2)

> Ciò che viene accettato concordemente da tutti i matematici è il carattere specifico di tutti gli enunciati matematici, delle dimostrazioni matematiche. è assolutamente fuori discussione fra i matematici che cosa voglia dire che "un teorema è sensato", ossia scritto in modo coerente alle regole interne della

(1) In quel lavoro analizzava la complessità dell'insieme delle verità aritmetiche con riferimento alle teorie post-tarskiane della verità che erano state elaborate da varie persone, fra cui S. Kripke. Può essere interessante ricordare che il titolo riprendeva parzialmente un aforisma di O. Wilde, *The truth is rarely pure and never simple*, da *The Importance of Being Earnest*.

(2) Pubblicata nella raccolta *Ennio De Giorgi. Anche la scienza ha bisogno di sognare*, a cura di F. Bassani, A. Marino e C. Sbordone, Pisa, Edizioni Plus-Pisa University Press, 2001.

matematica e che "una dimostrazione è giusta" o "è sbagliata". Su questo esiste una totale unanimità fra i matematici.

Nonostante questa diffusa convinzione, l'idea, o *ideale*, del controllo "riga per riga" della correttezza di una dimostrazione, qualcosa che si potrebbe far eseguire a un computer opportunamente programmato, deve fare i conti con una pratica empirica che si muove lungo linee leggermente diverse. Si pensi ad esempio al sistema di *referaggio*, che talvolta ha promosso risultati poi rivelatisi non corretti; oppure alle difficoltà di trovare esperti in alcuni settori della matematica e, ancora, alla enorme crescita del numero di pubblicazioni sottoposte. A ciò si aggiunga che molti (talvolta anche importanti) teoremi non hanno una vera e propria dimostrazione, ma circolano corredati di schizzi di dimostrazioni, di indicazioni di linee argomentative, di suggerimenti, i quali, certamente, sono ritenuti dall'autore e da gran parte della comunità matematica più che sufficienti a garantire la correttezza del risultato; almeno, come si dice, *fino a prova contraria*. Quando si fanno considerazioni di questo tipo, che hanno portato anche a parlare delle dimostrazioni come *entità sociali*, raramente lo si fa con l'intendimento di proporre una qualche tesi generale. ([3]) Il fine è spesso solo quello di descrivere con oggettività una situazione molto concreta che tutti i ricercatori conoscono. Cioè, che questa ampia rete di teoremi, diciamo così, semi-provati determina una situazione "malferma" in cui spesso la nostra conoscenza della verità di un teorema dipende dalla correttezza della sua prova e da quella delle prove dei teoremi usati nella sua prova, le quali a loro volta dipendono dalla correttezza... Ma in realtà non c'è contrasto fra quest'ultime constatazioni e la convinzione espressa nella precedente citazione. Quello che dice De Giorgi descrive certamente in maniera corretta una sensazione ampiamente condivisa fra i matematici, anche se ha senza dubbio il sapore di un discorso fatto "in linea di principio", e al quale la pratica concreta fatica a uniformarsi.

Una valutazione completamente diversa della situazione sopra delineata è più o meno implicitamente alla base di posizioni che, nel

([3]) Del tipo di quelle sviluppate nel fortunato volume [9].

tempo, e con maggior forza in questo e nel secolo scorso, sono state avanzate da vari settori, ma in particolare da quello della riflessione filosofica. Non sono infatti mancati i tentativi *scettici* di negare sostanza alla conoscenza, e quindi alla verità, matematica, né quelli *empiristi* volti a avvicinare la matematica al tipo di conoscenza proprio delle scienze empiriche. I primi hanno cercato di spiegare la matematica senza presupporre che esistano *oggetti* matematici, negando così "sostanza" alle affermazioni matematiche. La matematica viene considerata una *fiction* e la verità matematica è concepita in maniera *deflazionistica*. Il che vuol dire – prendendo il termine "deflazionistico" non nel suo significato economico, ma in quello etimologico – che la nozione di verità va "sgonfiata" degli elementi estranei introdotti illecitamente prendendo atto che essa non è suscettibile di svolgere alcun ruolo esplicativo all'interno del nostro sistema concettuale complessivo, e in particolare di quello matematico. I secondi, gli empiristi, hanno difeso la tesi secondo cui anche la matematica è una scienza empirica, che si differenzia dalle altre, quali astronomia, fisica, chimica, ecc., solo perché tratta un argomento più generale di quello di ogni altro campo della ricerca scientifica, e perché le sue proposizioni sono state controllate e confermate a un grado molto superiore anche di quelle, fra le proposizioni di astronomia e fisica, che sono state stabilite con maggior certezza. è questo maggior grado di certezza nei controlli che ha fatto sì che, senza giustificazione, siamo arrivati a pensare che i teoremi matematici siano *qualitativamente* diversi dalle ipotesi o teoremi di altre branche della scienza a loro volta ben confermate. Siamo arrivati a considerare i primi come "certi" e i secondi, nel migliore dei casi, come "molto probabili" o altamente confermati. ([4])

Naturalmente, la riflessione filosofica ha anche diffusamente elaborato nel corso dei secoli, e continua a farlo, elementi per contrastare le precedenti tesi e a favore invece di una concezione che vede nella conoscenza matematica l'esempio principe di conoscenza certa e giu-

([4]) Per una panoramica di queste posizioni è sempre utile, anche se non recentissima, la raccolta [11].

stificata. Le caratteristiche del tipo di verità proprio delle affermazioni matematiche sono descritte utilizzando i concetti di *analiticità*, *apriorità*, *necessità*, *stabilità*, ..., e le argomentazioni si appoggiano sia sull'analisi delle caratteristiche interne delle teorie matematiche, sia sulla riflessione circa l'importanza della matematica per le altre scienze: il problema dell'*applicazione* della matematica, il fatto che è completamente *indispensabile* come strumento per la convalida e anche ai fini della stessa espressione linguistica della conoscenza delle questioni empiriche.

Tuttavia, nonostante il valore e il rilievo, ampiamente riconosciuto, dei temi di questo dibattito, i matematici hanno spesso l'impressione che in questi casi alla matematica vengano applicati resoconti generali della verità, con una strumentazione concettuale e argomentativa già predisposta, che spesso in questo modo non si pongono le domande "giuste" e non si colgono i problemi interessanti. Ed è diffusa fra i matematici la convinzione che la verità *matematica* meriti di essere studiata per proprio conto, in maniera specifica, evidenziando anziché trascurare le differenze con le scienze empiriche ([5]).

2. – Verità e dimostrabilità

In questa prospettiva, un ulteriore e fondamentale livello di complicazione si incontra quando si mette a fuoco l'opposizione della nozione di verità con quella di dimostrabilità. Per esemplificare: una qualsiasi asserzione aritmetica, diciamo A, è intuitivamente considerata come un enunciato ([6]) che parla di una certa struttura: il sistema

([5]) Per esempio riguardo al concetto stesso di "esperimento". Nelle scienze empiriche gli esperimenti devono essere effettivamente realizzati perché possano avere una qualche efficacia. In matematica, invece, si ha sostanzialmente a che fare con esperimenti "mentali". E inoltre, per quanto riguarda i controesempi, in matematica è sufficiente garantirne la possibilità, la concepibilità, senza doverli realizzare concretamente. Come potrebbe dire un filosofo, nel caso della matematica non c'è scarto fra *essenza* ed *esistenza*.

([6]) I filosofi, e in particolare i logici, distinguono fra enunciati, asserzioni, proposizioni, ecc. Qui possiamo tralasciare queste pur importanti distinzioni e considerare queste varie espressioni come fra loro intercambiabili.

dei naturali, ovvero il cosiddetto *modello standard*. A si riferisce a numeri e relazioni numeriche, ed è naturale ritenere che se A è vera, lo è in virtù di certi fatti che sono propri di questa struttura. Molti trovano anche naturale pensare che il fatto in virtù del quale A è vera può sussistere anche se non ne abbiamo consapevolezza o, al limite, anche se non possiamo conoscerlo. Quello così grossolanamente rappresentato è il punto di vista *platonista*, una prospettiva molto diffusa fra i matematici e contro la quale sono state sollevate varie difficoltà da parte dei filosofi della matematica. Alcune di esse, forse le più rilevanti, si fondano sull'osservazione che noi non abbiamo nessuna diretta apprensione della struttura dei naturali. Con la quale, inoltre, essendo astratta, non possiamo avere nessuna interazione di tipo causale. ([7])

D'altra parte, un elemento costitutivo del comune sentire dei matematici è pure il fatto che si impara la matematica imparando a compiere, o eseguire, o fare, certe operazioni: per esempio, contare, risolvere equazioni, e, in generale, fare dimostrazioni. E apprendiamo anche che in ultima analisi la garanzia della verità di una proposizione matematica è la capacità, o la possibilità, di produrne una dimostrazione. In altre parole, impariamo che siamo autorizzati ad asserire A, a dichiararla vera, precisamente quando è disponibile una sua prova ([8]).

Sembra quindi che siano disponibili due criteri per parlare della verità di una data proposizione numerica A: da un lato A è vera se vale nella struttura dei naturali, dall'altro A è vera se possiamo dimostrarla. Sorge dunque spontaneo domandarsi dove sia il nesso fra la pratica del dimostrare, che è ciò che abbiamo *imparato* a fare, e ciò che *vale* nel sistema dei numeri. Quale evidenza è disponibile per ritenere che le

([7]) Un testo classico sul tema è [6]. Più recentemente, un'importante memoria in cui si affrontano questo tipo di questioni da un punto di vista diverso, mettendo a fuoco proprio il problema cui ci siamo riferiti nel testo è [2]. L'ampia discussione che ne è nata ha coinvolti molti e importani ricercatori. Per un panorama si può vedere [3].

([8]) Talvolta, soprattutto fra logici e filosofi della matematica, le nozioni di "dimostrazione" e di "prova" sono distinte, riservando la prima alle costruzioni fatte entro una teoria formale e la seconda ai ragionamenti o argomentazioni informali o pre-formali. Anche in questo caso correremo il rischio di essere imprecisi e useremo i due termini come intercambiabili.

procedure di prova siano in sintonia con ciò che vale nella struttura (che siano, come si dice, *corrette*)? E quindi, privilegiando questa volta il "lato dimostrazione", ci si potrebbe chiedere se sia possibile costruire il significato delle proposizioni matematiche in modo da eliminare (quello che verrebbe così ad essere) l'*apparente* riferimento a oggetti e strutture matematiche. Atteggiamento che è alla base di varie concezioni, fra loro anche sensibilmente diverse, che vanno dal costruttivismo all'operazionalismo e al formalismo.

Si tratta di questioni importanti e intensamente dibattute. Tuttavia, può essere interessante anche spostare parzialmente il fuoco dell'attenzione adottando una prospettiva generale diversa, caratterizzata dalla considerazione del fatto che l'attività matematica si sviluppa in gran parte a livello *informale*, o *pre-formale*. Con ciò non si intende fare riferimento al fatto già ricordato che molto spesso si propongono argomentazioni in cui alcune parti o alcuni passaggi sono solo delineati o del tutto tralasciati perché di routine e "facilmente" completabili dal lettore esperto. Questa è una situazione che vale tanto nel ragionamento matematico informale quanto in quello formale. Quello che si intende sottolineare è piuttosto che c'è un "linguaggio comune" della pratica matematica, che è in uno stato fluido, aperto a un intersecarsi delle costruzioni concettuali con le sollecitazioni provenienti da altre scienze o dal mondo dell'esperienza. All'interno di questo linguaggio comune vengono ritagliati poi, con maggiore o minore precisione, determinati ambiti di ricerca, le cui caratteristiche sono raccolte in una *teoria*: cioè, in una struttura concettuale che fa corrispondere agli oggetti e alle situazioni cui ci si riferisce in quel contesto concetti e relazioni logiche fra concetti. Costruire la teoria di un determinato ambito di problemi significa conferire compiutezza teorica e agilità strumentale a un complesso di tecniche, di procedimenti dimostrativi e costruzioni concettuali che sono già presenti in quello che abbiamo chiamato il linguaggio comune della pratica matematica, e che sono stati usati per indagare le strutture e affrontare i problemi di quel determinato ambito, e che in questo modo vengono approfonditi e padroneggiati meglio, così da favorirne l'applicabilità nelle prove e nei ragionamenti concernenti anche altri domini di ricerca. L'elaborazione di una teoria non comporta una chiusura del relativo campo di indagine, ma è un'operazione collegata allo sviluppo scientifico. La nascita di una teoria, infatti, presuppone l'esistenza di un insieme di procedimenti dimostrativi e costruzioni concettuali che ad un certo punto del loro sviluppo storico sono in grado di *farsi teoria* ([9]), in quanto è emerso uno strato di enunciati e procedure più profondi degli altri, a partire dai quali si può riottenere deduttivamente l'insieme delle conoscenze dell'ambito in questione, per farne poi la base per un ulteriore arricchimento e approfondimento conoscitivo. Se non si tiene presente che la costruzione di una teoria contiene questo preciso riferimento a una determinata situazione storica dell'ambito conoscitivo di cui essa è appunto la teoria, si rischia di fraintendere lo stesso rapporto fra verità e dimostrazione.

Il quadro teorico generale appena delineato subirà una fondamentale complicazione – ma potremmo meglio dire un arricchimento – a cavallo fra la fine del XIX secolo e i primi trent'anni del XX secolo, quando, per opera di ben noti protagonisti, si fece strada l'idea di esprimere le proposizioni matematiche in linguaggi formali "artificiali" specificati con esattezza. La scoperta della possibilità di formalizzare la conoscenza matematica generò un nuovo oggetto teorico: le *teorie formali* ([10]).

La costruzione di teorie formali non soppianta le teorie originate entro la usuale pratica matematica. Si tratta di un nuovo livello di indagine che si aggiunge al precedente, senza cancellarlo, e con il quale si instaura un rapporto dinamico. La matematica pre-formale non resta fissa e indipendente da quella formale. Al contrario, i risultati formali della matematica spesso suggeriscono una revisione del pensiero pre-formale, la quale a sua volta, poi, può indurre una diversa formulazione

([9]) Potrà risultare interessante la sintonia fra questa prospettiva e la concezione hilbertiana. Si veda ad esempio [7], pag. 146, dove afferma:

> Se raccogliamo insieme i dati di un campo conoscitivo più o meno esteso, ci accorgiamo presto che questi dati ammettono un ordinamento. Questo ordinamento viene ottenuto ogni volta per mezzo di una certa *intelaiatura di concetti*, in modo che ad ogni singolo oggetto di quel campo conoscitivo corrisponde un concetto di questa intelaiatura e ad ogni dato interno al campo conoscitivo corrisponde una relazione logica fra i concetti. L'intelaiatura dei concetti altro non è che la *teoria* di quel campo conoscitivo. (pag. 177 della traduzione italiana).

([10]) Questo fatto, insieme con gli sviluppi della logica matematica produrrà, nella seconda metà del secolo scorso, una sempre più diffusa utilizzazione dei computer nell'esecuzione del ragionamento matematico.

della teoria formale. Formalizzare una porzione di conoscenza matematica, infatti, non significa solo ricostruirla usando un linguaggio formale. La formalizzazione è una ricostruzione in cui si intende esplicitare la completa articolazione logica di quella porzione di conoscenza matematica, cercando di comprendere pienamente la struttura di giustificazione di una prova matematica informale.

Abbiamo in questo modo tre livelli: la matematica informale, o pre-formale, le teorie informali e le teorie formali. Con una metafora, il rapporto fra gli ultimi due livelli può essere descritto dicendo che le teorie formali stanno a quelle informali così come la messa in opera, l'attuazione o implementazione degli algoritmi sta alla loro progettazione. è importante tenere presenti questi diversi livelli: quando ci rendiamo conto che le teorie formali sono state progettate per corrispondere a quell'organizzazione in teorie (informali) delle procedure argomentative e delle costruzioni concettuali di un certo ambito della ricerca matematica ci rendiamo subito conto che quest'ultime sono di fatto ciò a cui si riferisce la matematica formale.

Noi usiamo continuamente il tipo di ragionamento matematico pre-formale, ed è questo che ci permette di fare matematica. Certamente, infatti, quando facciamo matematica non agiamo in maniera completamente formale come farebbe un computer. Le idee matematiche vengono recepite ed elaborate a livello pre-formale, e le teorie formali sono un modo per eliminare il più possibile l'ambiguità presente in queste idee. Le "dimostrazioni" sono ovviamente il metodo tramite il quale acquisiamo nuovi teoremi nei sistemi formali, ma le "regole di dimostrazione" non nascono e vivono dentro i sistemi formali, non possono essere arbitrarie.

La costruzione delle teorie formali, tuttavia, non ha solo una funzione di "esplicitazione", in linea con l'idea(le) di Frege di provvedere dimostrazioni senza lacune ([11]), ma produce nuovi problemi, nuove

([11]) Detto così può risultare riduttivo rispetto alla grande innovazione introdotta da Frege. Va infatti sottolineato che, sebbene strettamente funzionale a un progetto – quello logicista – rivelatosi poi irrealizzabile, la costruzione di un linguaggio formale precisamente specificato, attraverso il quale formalizzare la conoscenza matematica, ha mantenuto un suo interesse indipendente ed è la base del grande sviluppo della logica matematica nel XX secolo.

conoscenze, e nuove impostazioni di vecchie questioni. Ci possiamo chiedere se formalizzare una dimostrazione aggiunga conoscenza; ci si può cioè chiedere se, quando è disponibile una dimostrazione *formale* di un dato enunciato matematico, sappiamo qualcosa in più rispetto al sapere che quell'enunciato è dimostrabile.

In generale, è una domanda interessante quella concernente la possibilità fare nuove conoscenze in una teoria formale. Per esempio, e per riprendere direttamente il nostro tema, una cosa è parlare della "verità di un enunciato matematico" e un'altra è parlare della "verità in un modello di un enunciato di una teoria matematica formale". Una teoria formale della verità è stata elaborata solo negli anni Trenta del XX secolo, grazie alla *semantica formale* di A. Tarski ([12]). La teoria di Tarski consiste di una definizione *in* matematica del concetto di verità in un modello relativamente a un linguaggio formale, dove sia il concetto di linguaggio formale sia quello dei suoi modelli sono nozioni matematiche.

Va tuttavia sottolineato che Tarski si occupava sì di linguaggi formali, ma in quanto formalizzazioni di linguaggi informali, non come linguaggi formali puri e semplici, vuoti. In questo senso si "occupa di linguaggi già interpretati", di linguaggi che hanno significato (come dice chiaramente nel 1936 in [10]):

> Resta forse da aggiungere che qui non siamo interessati a linguaggi e scienze "formali", nel senso speciale di scienze cui non è attribuito alcun significato. Per scienze di questo tipo il problema qui discusso non ha alcun rilievo, non è neanche dotato di significato. Noi attribuiremo sempre significati del tutto concreti e, per noi, comprensibili ai segni che occorrono nei linguaggi che considereremo. [\ldots] Gli enunciati che sono scelti come assiomi ci sembrano materialmente veri, e nello scegliere le regole di inferenza siamo sempre guidati dal principio che applicando tali regole a enunciati veri dobbiamo sempre ottenere enunciati che sono ancora veri. ([13])

([12]) Qualcosa di analogo è accaduto all'aritmetica, la cui assiomatizzazione è stata fatta da Peano (e altri...) nel 1889, cioè millenni dopo che l'aritmetica era stata usata con grande successo.

([13]) "It remains perhaps to add that we are not interested here in "formal" languages and sciences in one special sense of the word "formal", namely sciences to which no meaning is attached. For such sciences the problem here discussed has no relevance, it is not even meaningful. We shall always ascribe quite concrete and, for us, intelligible

Il luogo ove entrano in gioco il significato e la verità è la scelta degli assiomi e la concezione delle interpretazioni. Sono le nostre idee pre-formali che provvedono di significato la matematica formale; significato che viene poi conservato lungo il processo del pensiero matematico. ([14]) La relazione fra i due ambiti è certamente dinamica: se subentrano conflitti fra le nostre idee sul significato e le condizioni di verità, gli assiomi possono essere rivisti, e anche i significati delle espressioni matematiche possono cambiare. Ma i cambiamenti spesso hanno luogo nelle stesse assiomatizzazioni e nelle definizioni delle teorie informali, non sono ristretti al sistema formale.

3. – Intermezzo I

Per dare concretezza al nostro discorso, delineiamo brevemente la struttura di un linguaggio formale del primo ordine, diciamo $\mathcal{L}$, e la relativa semantica formale. Un linguaggio di questo tipo contiene le seguenti categorie di simboli:

- un insieme infinito di variabili individuali $x_1, x_2, \ldots, x, y, z, \ldots$
- un insieme (eventualmente vuoto) di simboli costanti, $c_1, c_2, \ldots$, del tipo di $0, 1$
- un insieme (eventualmente vuoto) di simboli per funzione, $f_1, f_2, \ldots$, del tipo di $+, \times, -$
- un insieme (eventualmente vuoto) di simboli per relazione, $P_1, P_2, \ldots$, del tipo di $<$

meanings to the signs which occur in the languages we shall consider. [âĂę] The sentences which are distinguished as axioms seem to us materially true, and in choosing rules of inference we are always guided by the principle that when such rules are applied to true sentences the sentences obtained by their use should also be true."

([14]) Vale la pena ricordare che nella prima pagina dei *Fondamenti della Geometria* Hilbert osserva che

> Noi possiamo suddividere gli assiomi della geometria in cinque gruppi. Ciascuno di questi gruppi *esprime certi fatti fondamentali omogenei della nostra intuizione.* [corsivo mio]

- i simboli per gli operatori logici $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \forall, \exists, =$ ([15])
- simboli ausiliari, come le parentesi e la virgola.

Una struttura **S** per $\mathcal{L}$ è data da un insieme non vuoto S, da un'attribuzione di significato per ogni simbolo descrittivo costante di $\mathcal{L}$ e di un campo di variazione per ogni simbolo descrittivo variabile di $\mathcal{L}$ in maniera tale che:

- ad ogni costante individuale c di $\mathcal{L}$ è associato un individuo, diciamo c^S, del dominio S della struttura **S**;
- ad ogni costante funtoriale f_i, $ar(i)$-aria, di $\mathcal{L}$ è associata un'operazione, diciamo f_i^S, della stessa arietà, su S;
- ad ogni costante predicativa P_k, $ar(k)$-aria, di $\mathcal{L}$ è associata una relazione, diciamo P_k^S, della stessa arietà, su S;
- ad ogni variabile individuale x_n è associato come *campo di variazione* il dominio S della struttura **S**.

Un'attribuzione di significato è detta *normale* se il significato attribuito al simbolo "=" di $\mathcal{L}$ è proprio la relazione di identità fra gli elementi di S. Su questa base, per poter attribuire un significato, e quindi un valore di verità, alle formule di $\mathcal{L}$ occorre fissare un modo per attribuirlo anche alle variabili individuali, per le quali abbiamo per il momento fissato solo il campo di variazione. In analogia con quanto avviene per i pronomi dei linguaggi naturali, il cui significato è dato volta per volta dal contesto di emissione, consideriamo l'insieme Σ delle applicazioni σ che vanno dalle variabili individuali di $\mathcal{L}$ (cioè, in realtà, dall'insieme $\mathcal{N}$ dei naturali) in S. Queste applicazioni vengono usualmente chiamate anche "assegnamenti" o "valutazioni". Ognuna di esse attribuisce un riferimento a ogni variabile individuale (come si diceva, in analogia a come il contesto di emissione determina il riferi-

([15]) Mettiamo il simbolo dell'identità fra i simboli logici, anche se, come è noto, quella della sua collocazione è una questione dibattuta. Senza voler prendere parte in tale dibattito, abbiamo solo voluto sottolineare che, a differenza di altri, il simbolo relazionale "=" deve sostanzialmente sempre essere presente, ed è quindi sensato trattarlo alla stregua di una costante logica.

mento dei pronomi dei linguaggi naturali), nel senso che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $\sigma(n) \in S$. Se $\sigma, \tau \in \Sigma$, diciamo che le due successioni coincidono sulle variabili individuali di una formula A di $\mathcal{L}$ (o su insieme di formule di $\mathcal{L}$) quando $\sigma(n) = \tau(n)$ per ogni x_n occorrente in A (o in una delle formule dell'insieme). Se $\sigma \in \Sigma$ e $s \in S$, è utile considerare la *n-variante* di σ, cioè la funzione di valutazione che alla variabile x_n associa l'individuo s, e per il resto coincide con σ. La n-variante di σ si denota con σ_n^s. Su questa base, possiamo assegnare, per induzione sulla sua complessità, un valore in $\mathbf{S}$ a ogni termine t di $\mathcal{L}$, valore che indicheremo con $\|t\|_\sigma^{\mathbf{S}}$:

1. $\|x_n\|_\sigma^{\mathbf{S}} = \sigma(n)$
2. $\|c_n\|_\sigma^{\mathbf{S}} = c_n^{\mathbf{S}}$
3. $\|f_i(t_1, \ldots, t_{ar(i)})\|_\sigma^{\mathbf{S}} = f_i^{\mathbf{S}}(\|t_1\|_\sigma^{\mathbf{S}}, \ldots, \|t_{ar(i)}\|_\sigma^{\mathbf{S}})$

Dato il significato che la struttura $\mathbf{S}$ assegna alla parte non logica, o descrittiva, del linguaggio, e dopo aver attribuito un significato ai termini di quest'ultimo, è possibile valutare, per ogni formula, se sia o meno soddisfatta da una certa valutazione in $\mathbf{S}$. Seguendo la procedura tarskiana, stabiliremo che cosa vuol dire che una data formula A di $\mathcal{L}$ è soddisfatta in $\mathbf{S}$ relativamente all'assegnamento σ, in simboli:

$$\|A\|_\sigma^{\mathbf{S}}$$

e lo faremo definendo per induzione sulla complessità di A un'applicazione $\|\bullet\|_\sigma^{\mathbf{S}} \mapsto \{0, 1\}$ nel modo seguente:

1. $$\|P_k(t_1, \ldots, t_{ar(k)})\|_\sigma^{\mathbf{S}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \langle \|t_1\|_\sigma^{\mathbf{S}}, \ldots, \|t_{ar(k)}\|_\sigma^{\mathbf{S}} \rangle \in P_k^{\mathbf{S}} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. $$\|(t_k = t_l)\|_\sigma^{\mathbf{S}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \|t_k\|_\sigma^{\mathbf{S}} = \|t_l\|_\sigma^{\mathbf{S}} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3. $\|(\neg A)\|_\sigma^{\mathbf{S}} = 1 - \|(A)\|_\sigma^{\mathbf{S}}$
4. $\|(A \wedge B)\|_\sigma^{\mathbf{S}} = min(\|A\|_\sigma^{\mathbf{S}}, \|B\|_\sigma^{\mathbf{S}})$

5. $\|(A \vee B)\|_{\sigma}^{\mathbf{S}} = max(\|A\|_{\sigma}^{\mathbf{S}}, \|B\|_{\sigma}^{\mathbf{S}})$
6. $\|(A \rightarrow B)\|_{\sigma}^{\mathbf{S}} = max(1 - \|A\|_{\sigma}^{\mathbf{S}}, \|B\|_{\sigma}^{\mathbf{S}})$
7. $\|(A \leftrightarrow B)\|_{\sigma}^{\mathbf{S}} = 1 - \mid (\|A\|_{\sigma}^{\mathbf{S}} - \|B\|_{\sigma}^{\mathbf{S}}) \mid$ ([16])
8. $\|(\forall x_n A)\|_{\sigma}^{\mathbf{S}} = min\{\|(A)\|_{\sigma_n^s}^{\mathbf{S}} | s \in S\}$
9. $\|(\exists x_n A)\|_{\sigma}^{\mathbf{S}} = max\{\|(A)\|_{\sigma_n^s}^{\mathbf{S}} | s \in S\}$

Una notazione diffusa per dire che $\|A\|_{\sigma}^{\mathbf{S}} = 1$, cioè che A è soddisfatta nella struttura **S** rispetto all'assegnamento σ, è la seguente:

$$\models_{\sigma}^{\mathbf{S}} A$$

Se A è soddisfatta in **S** rispetto a ogni assegnamento σ, ovvero rispetto a ogni contesto di emissione relativamente alla struttura **S**, allora si dice che A è *vera in* **S**, o che è una *verità di* **S**, o che **S** è un *modello* di A, e scriviamo

$$\models^{\mathbf{S}} A$$

lasciando così cadere il parametro σ. Se poi A è vera in ogni struttura **S**, allora scriviamo $\models A$, lasciando cadere anche il parametro **S**, e diciamo che A è una *verità logica*, cioè un'asserzione vera in tutte le strutture. Analoghe definizioni si possono poi dare per insiemi di formule Γ. Si può poi anche definire la relazione di *conseguenza logica* tra un insieme di formule Γ e la formula A, diciamo $\Gamma \models A$, che vale quando per ogni struttura **S** e per ogni assegnamento σ relativo alla struttura in questione, se vale $\models_{\sigma}^{\mathbf{S}} G$, per ogni $G \in \Gamma$, allora vale anche $\models_{\sigma}^{\mathbf{S}} A$. Il meccanismo degli assegnamenti è tale che il tipo di denotazione assegnata a un termine, o a una formula, dipende solo dai valori assegnati alle variabili libere che compaiono nel termine (nella formula) in questione. Per cui, se un termine (una formula) non contiene variabili libere allora è un nome proprio (un'asserzione conclusa rispetto alla struttura, un *enunciato*) e quindi denota un ben determinato elemento del dominio (ha un ben determinato valore di verità rispetto alla struttura). E tutto ciò naturalmente è come dev'essere.

([16]) Dove $\mid \bullet \mid$ indica il valore assoluto.

4. – Una riflessione

La "semantica formale tarskiana" che abbiamo brevemente descritto si riferisce a un generico linguaggio formale del primo ordine. Un tale linguaggio, con le opportune integrazioni lessicali, può diventare il linguaggio di una qualsiasi teoria formale matematica, ottenuta integrando l'apparato deduttivo logico con assiomi e regole specifici. Ad esempio, l'aritmetica di Peano, **PA**, è ottenuta aggiungendo alla logica gli assiomi sul successore, le equazioni ricorsive per addizione e moltiplicazione e il principio di induzione matematica.

È appropriato chiarire il contesto in cui la definizione tarskiana è data. Si dice nel metalinguaggio, intendendo con ciò in una metateoria il cui linguaggio contiene quello di **PA** ([17]), cioè della specifica teoria matematica formale del cui linguaggio intendevamo spiegare il significato, e rispetto al quale volevamo specificare l'uso del termine "vero". Se trattiamo formalmente anche questa metateoria allora la definizione tarskiana dà luogo a una gerarchia di sistemi. Adottando invece, come è d'uso fare, la distinzione formale/informale, possiamo restringere la gerarchia di linguaggi (e teorie) a due livelli: un linguaggio-oggetto formale del primo ordine e il suo metalinguaggio parzialmente informale (in quanto contiene anche porzioni dell'italiano). Ciò apre la via a esposizioni della definizione tarskiana (solo) apparentemente diverse da quella fornita prima, in cui – assumendo che le operazioni associate agli operatori logici siano parte del metalinguaggio in cui è data la semantica del linguaggio-oggetto – si procede con clausole come quelle che seguono:

- $\ldots$
- $\models^{\mathbf{S}}_{\sigma} A \wedge B$ sse $\models^{\mathbf{S}}_{\sigma} A$ *e* $\models^{\mathbf{S}}_{\sigma} B$
- $\models^{\mathbf{S}}_{\sigma} (\forall x_n A)$ sse *per ogni* $s \in S$ vale $\models^{\mathbf{S}}_{\sigma^s_n} A$
- $\ldots$

([17]) O una sua traduzione.

L'impressione di "corto circuito" che si ha leggendo le clausole di questa definizione ([18]) ha indotto molti a trovare l'operazione tarskiana poco degna di rilievo. Ma chi pensa questo dimostra di aver frainteso gli obiettivi: Tarski non intendeva spiegare "che cosa sia la verità", bensì chiarire a quali condizioni si può coerentemente (cioè, senza incorrere nel *paradosso del mentitore*), e in maniera significativa ([19]), usare il predicato "vero" in matematica. Per prima cosa, chiarì che il suo obiettivo non era quello di proporre una definizione di portata generale, ma piuttosto quello di caratterizzare l'uso del predicato "vero" per singoli linguaggi formali presi uno per volta. Per quanto riguarda poi il rispetto della coerenza, la prescrizione è di abbandonare i linguaggi semanticamente chiusi ([20]) adottando la distinzione fra linguaggio-oggetto (quello cui appartengono gli enunciati che possono essere veri o falsi) e metalinguaggio (quello in cui vengono fatte le attribuzioni di valori di verità agli enunciati del linguaggio-oggetto). Per quanto riguarda l'adeguatezza materiale, la prescrizione è di produrre una teoria in grado di generare tutte le infinite equivalenze del tipo di quelle viste sopra, e il cui schema generale è:

$$N \text{ è vero in } \mathcal{L}(\mathbf{PA}) \text{ sse } E$$

dove a "N" si deve sostituire il nome metateorico di un enunciato di $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$, e a "E" quello stesso enunciato, qualora $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$ sia parte del metalinguaggio, o, in caso contrario, la sua traduzione nel metalinguaggio ([21]). è opportuno ribadire che lo schema di Tarski non definisce che cosa sia la verità, ma ci fornisce una norma che deve essere condivisa da tutti gli enunciati veri. Se di "definizione" si vuol parlare, bisogna allora parlare di definizione *implicita*.

E certamente la costruzione tarskiana non è stata di poco conto se pensiamo che ha permesso di stabilire la conclusione sicura-

([18]) A sinistra, nel *definiendum*, abbiamo "$\wedge$"; a destra, nel *definiens*, "*e*", ...

([19]) L'espressione da lui è usata è: in maniera *formalmente corretta* e *materialmente adeguata*.

([20]) Cioè, che contengono il proprio predicato di verità.

([21]) L'esempio classico, un po' adattato perché sia chiaro il rapporto linguaggio-oggetto/metalinguaggio, è:

L'enunciato "snow is white" è vero in inglese sse la neve è bianca.

mente non banale che una teoria matematica formale come **PA** non può includere il proprio predicato di verità. Detto in maniera più suggestiva: nessun predicato di **PA** è uguale al predicato di verità per **PA**; o, ancora in altre parole, la nozione di verità aritmetica non è aritmetica.

Per dare un qualche riferimento concreto al nostro discorso, nel prossimo paragrafo delineeremo brevemente il percorso che ha portato ai risultati limitativi di Gödel e Tarski.

5. – Intermezzo II

Il punto di riferimento del lavoro di Gödel fu il sistema assiomatico dei *Principia Mathematica* pubblicati da B. Russell e A. N. Whitehead dal 1910 al 1913, denominato **P**, ma il suo risultato fu poi generalizzato a qualunque sistema formale in grado di esprimere l'aritmetica di Peano, come il già ricordato **PA**. Non è certo il caso di ripercorrere qui i vari passi del ragionamento di Gödel, ma data la centralità che esso riveste per la nostra esposizione, è opportuno richiamare qualche dettaglio più significativo.

La chiave per ottenere i risultati di incompletezza fu un sottile e complicato percorso di codifica (inventata da Gödel, e per questo chiamata anche *gödelizzazione*, ma ormai diventata "senso comune") della sintassi di **PA**. Nei fatti, assumendo di disporre in $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$ di un'infinità di termini chiusi, come per esempio i numerali, i "nomi teorici" dei naturali ([22]), si definisce una funzione g che assegna un codice a ogni termine t e a ogni formula A, diciamo, rispettivamente, $g(t)$ e $g(A)$. Tale codifica viene poi rappresentata entro la stessa teoria formale **PA** ([23]). Ciò che Gödel dimostrò nel I Teorema di Incompletezza del 1931 è che esistono enunciati aritmetici – cioè, appartenenti a $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$ – che non sono né dimostrabili

([22]) Indicando ad esempio con **n** il numerale di n. Ricordiamo che un sistema formale come **PA** può costruire una rappresentazione per ogni numero naturale n a partire dalla costante 0 e ripetendo n volte l'applicazione della funzione di successore. Il numerale **n** sarà quindi l'espressione $s(\ldots s(0)\ldots)$.

([23]) E questo è il contenuto del famoso, o famigerato, "Lemma di Gödel".

né refutabili in **PA** (24). Di qui, l'incompletezza sintattica di **PA**. Gödel giunse a questa conclusione costruendo *effettivamente* un enunciato, chiamiamolo G, e provando che non è dimostrabile in **PA**, se **PA** è coerente, e non è refutabile in **PA**, se **PA** gode di una proprietà un po' più forte della coerenza e che è stata chiamata ω-coerenza (25). Un brevissimo cenno anche alla costruzione di G: se $\underline{Dim_{\mathbf{PA}}(\mathbf{n}, \mathbf{m})}$ rappresenta in **PA** la codifica dell'affermazione (metateorica) che $\mathbf{n}$ codifica una dimostrazione della formula codificata da $\mathbf{m}$, allora G è la formula $\neg\exists x \underline{Dim_{\mathbf{PA}}}(x, \mathbf{g}(\mathbf{G}))$ (26). Con un ulteriore (non banale) lavoro tecnico, Gödel dimostrò che vale:

$$\vdash_{\mathbf{PA}} (G \leftrightarrow \neg\exists x \underline{Dim_{\mathbf{PA}}}(x, \mathbf{g}(\mathbf{G})))$$

da cui segue che l'enunciato indecidibile G, *decodificato, e letto nella metateoria*, è l'enunciato che dice "$\mathbf{g}(\mathbf{G})$ nomina un enunciato, per l'appunto G, indimostrabile", o, in maniera più suggestiva: "il mio nome è il nome di un enunciato indimostrabile".

La costruzione gödeliana dell'enunciato G è un caso particolare di un risultato più generale, che sarà dimostrato da R. Carnap nel 1934, e che è noto come *Lemma di Diagonalizzazione* o *del punto fisso* (27).

(24) Dove un enunciato è detto "refutabile" se è dimostrabile la sua negazione.

(25) Una teoria formale contenente l'aritmetica è ω-coerente se per nessuna formula $A(x)$ sono contemporaneamente dimostrabili tutte le infinite formule $A[x/\mathbf{n}]$ e la formula $\exists x \neg A(x)$, dove "$[\circ / \bullet]$" indica ovviamente l'operazione sintattica di sostituzione di $\circ$ con $\bullet$.

Come si vede, l'ω-coerenza è una sorta di correttezza numerica, imparentata con la proprietà della *categoricità*: richiede infatti che non ci siano differenze dimostrabilmente apprezzabili fra la denotazione dei numerali, che sono termini chiusi, *nomi propri* dei numeri, e quella delle variabili individuali, che in quanto *pronomi* variano su tutti gli individui del dominio. Può essere interessante osservare che, nonostante ciò, tale proprietà, necessaria per stabilire la indimostrabilità di $\neg G$, comporta la prova della *non*-categoricità di **PA**: se **PA** è coerente, infatti, tali sono anche $\mathbf{PA} \cup \{G\}$ e $\mathbf{PA} \cup \{\neg G\}$. Per il teorema di completezza semantica delle teorie formali del primo ordine, dimostrato sempre da Gödel nel 1929, entrambe le teorie possiederanno un modello, diciamo **M** e **N**. Ovviamente, questi due modelli saranno in particolare anche modelli di **PA**. Ma altrettanto ovviamente **M** e **N** non potranno essere fra loro isomorfi, da cui la non-categoricità di **PA**.

(26) Dove, ricordiamo, "$\mathbf{g}(\mathbf{G})$" è il numerale del numero che è il codice dell'enunciato G.

(27) E che sarà a sua volta generalizzato dal *Teorema di ricorsione* dimostrato da S.C. Kleene nel 1936.

Questo afferma che se A è una qualsiasi formula di $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$ contenente libera la sola variabile x_k, allora esiste un enunciato B di $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$ tale che vale

$$\vdash_{\mathbf{PA}} B \leftrightarrow A[x_k/\mathbf{g}(\mathbf{B})].$$

Per ottenere l'enunciato indecidibile di Gödel è sufficiente applicare il *Lemma* alla formula $\neg\, \exists x_n \underline{Dim_{PA}}(x_n, x_k)$, usualmente abbreviata in $\neg\, Teor_{\mathbf{PA}}(x_k)$, contenente libera la sola variabile x_k. G sarà cioè il punto fisso di $\neg\, Teor_{\mathbf{PA}}(x_k)$:

$$\vdash_{\mathbf{PA}} G \leftrightarrow \neg\, Teor_{\mathbf{PA}}[x_k/\mathbf{g}(\mathbf{G})].$$

Ci siamo brevemente soffermati su questi strumenti teorici perché sono gli stessi che permettono la dimostrazione del risultato pubblicato da Alfred Tarski nel 1933. ([28]) Se esistesse una formula $V(x_n)$ di $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$, capace di comportarsi come un predicato di verità per **PA**, e quindi in grado di soddisfare tutte le equivalenze tarskiane, allora per ogni enunciato A di $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$ varrebbe

$$\vdash_{\mathbf{PA}} V[x_n/\mathbf{g}(\mathbf{A})] \leftrightarrow A$$

ipotesi da cui facilmente si ottiene una contraddizione. Basta applicare il ragionamento diagonale alla formula $\neg\, V(x_n)$. Il *Lemma* garantisce allora l'esistenza di un enunciato B tale che

$$\vdash_{\mathbf{PA}} \neg\, V[x_n/\mathbf{g}(\mathbf{B})] \leftrightarrow B$$

D'altra parte, per le caratteristiche del predicato $V(x_n)$, deputato ad essere un predicato di verità – e di cui in questo ragionamento per assurdo abbiamo assunto l'esistenza – deve anche valere

$$\vdash_{\mathbf{PA}} V[x_n/\mathbf{g}(\mathbf{B})] \leftrightarrow B$$

E da queste due equivalenze segue inevitabilmente

$$\vdash_{\mathbf{PA}} \neg\, V[x_n/\mathbf{g}(\mathbf{B})] \leftrightarrow V[x_n/\mathbf{g}(\mathbf{B})]$$

con la ovvia conseguenza di rendere **PA** contraddittoria.

([28]) In polacco, e poi in tedesco nel 1935.

Ricordando che $Teor(x_k)$ è definita come la formula $\exists x_n Dim_{\mathbf{PA}}(x_n, x_k)$, possiamo allora dire che il I Teorema di Gödel mostra che l'insieme dei numeri che sono codici di (enunciati che sono) teoremi di **PA** è ricorsivamente enumerabile, ma non ricorsivo – semi-rappresentabile, ma non rappresentabile in **PA** –; quanto dimostrato da Tarski circa la formula $V(x_n)$, caratterizzata come quella che soddisfa tutte le equivalenze $V(\mathbf{g}(\mathbf{A}) \leftrightarrow A)$, per ogni formula A di $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$, comporta invece che l'insieme dei numeri che sono codici di enunciati aritmetici veri non sia neppure definibile con i mezzi di **PA**. In altri termini, mentre il risultato di Gödel stabilisce una limitazione alle capacità *deduttive* di **PA**, quello di Tarski ne limita invece le capacità *espressive*.

Ed è opportuno sottolineare che c'è anche uno stretto legame inferenziale fra il primo teorema di Gödel e il teorema di Tarski. Dal secondo sappiamo che un linguaggio formale non può contenere il suo proprio predicato di verità. L'assunzione metateorica di tutto il ragionamento, come sappiamo, è che **PA** sia corretta; cioè, facendo riferimento al predicato di provabilità standard $Teor_{\mathbf{PA}}(x_k)$, che valga

$$\forall x_k (Teor_{\mathbf{PA}}(x_k) \rightarrow V(x_k)).$$

Se valesse anche l'implicazione inversa

$$\forall x_k (V(x_k) \rightarrow Teor_{\mathbf{PA}}(x_k)),$$

cioè se **PA** fosse anche completa, allora in effetti $Teor_{\mathbf{PA}}$ coinciderebbe con il predicato di verità di **PA**. Contro il risultato tarskiano sull'indefinibilità della verità. Poiché abbiamo assunto la correttezza di **PA**, allora questo sistema non può essere completo, e quindi esistono enunciati veri, ma indimostrabili in **PA**. D'altra parte, l'esistenza di enunciati indecidibili, come il gödeliano G, comporta, per il principio del terzo escluso, che uno dei due debba essere sì indimostrabile, ma vero. Può essere a questo punto utile puntualizzare che, dimostrando nel 1929 il Teorema di Completezza Semantica, Gödel aveva provato l'equivalenza estensionale delle nozioni di dimostrabilità e di verità *logica al primo ordine*. Dal primo Teorema di Incompletezza segue che quell'equivalenza non vale più quando sono invece in gioco la verità *aritmetica* e la verità *logica al secondo ordine*. La frattura che ne segue fra i concetti di dimostrabilità e di verità è la questione alla base del teorema di Tarski. In questo senso, si può dire che il risultato tarskiano "spiega" la significativa sfasatura tra il concetto di enunciato matematico vero e il concetto di enunciato matematico dimostrabile segnalata dal teorema di Gödel.

6. – Verità degli enunciati indimostrabili

Nella memoria del 1931, il ragionamento gödeliano si muove lungo linee che mostrano grande analogia con l'antinomia di Richard ([29]) e con quella del mentitore. In quest'ultima è in questione l'enunciato che dice "questo enunciato è falso" e fa quindi riferimento alla coppia "verità/falsità", producendo un'asserzione paradossale che non può essere né vera né falsa. Il ragionamento gödeliano ruota invece sulla coppia "dimostrabilità/refutabilità", senza che ne segua alcun paradosso. La differenza fra le due situazioni è legata alla logica adottata nella metateoria in cui ragioniamo di queste situazioni teoriche. In prospettiva classica, che è quella generalmente adottata, i valori di verità sono due (*principio di bivalenza*) e ogni enunciato deve possederne almeno e al massimo uno dei due (*principio del terzo escluso*): di qui la paradossalità dell'enunciato del mentitore. Nulla di analogo vale per la coppia gödeliana: nessuna legge logica impone che ogni enunciato debba essere o dimostrabile o refutabile entro una data teoria. Questo varrebbe solo se la teoria fosse sintatticamente completa. Altrimenti, avremmo, come abbiamo, un enunciato *indecidible* e una teoria sintatticamente incompleta.

Nonostante la differenza categoriale fra le due coppie, si è diffuso l'atteggiamento teso a oltrepassare il piano sintattico per porsi la domanda semantica circa il valore di verità di G. Questa riflessione è importante per la nostra trattazione ([30]) perché ha usato l'enunciato "G" per introdurre un elemento di separazione fra ciò che è dimostrabile e ciò che è vero, argomentando a favore dell'irriducibilità della

([29]) Analogia sviluppata dettagliatamente da P. Bernays in [8].

([30]) Lo è stata e lo è anche su altri piani, come per esempio l'ampia e articolata discussione sul meccanicismo, a partire dal volume [1], e a cui hanno partecipato fra gli seconda nozione alla prima. è forse opportuno chiarire in via preliminare che, in quanto istanza del terzo escluso, ovviamente vale

$$\vdash_{\mathbf{PA}} (G \vee \neg\, G)$$

quindi, per l'assunzione della correttezza di **PA**, e ragionando secondo la logica classica, l'enunciato $(G \vee \neg\, G)$ deve essere vero. Ma, sulla base delle stesse assunzioni, in quanto entrambi indimostrabili, non è possibile concludere alcunché circa la verità di G o di $\neg G$, cioè circa la verità o la falsità dell'enunciato indecidibile G. Diversa è la situazione circa l'affermazione: "G è vero o G è falso", e quindi "G è vero o $\neg G$ è vero", la quale, sempre da un punto di vista classico, è ovviamente vera in quanto istanza del principio di bivalenza. Diversa perché l'affermazione "A è vero", per qualsiasi enunciato aritmetico A, non è un'affermazione appartenente a $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$, e che quindi possa essere stabilita in **PA**. In questo caso le considerazioni non si svolgono sul piano di una teoria formale, dove per verità si intende la *verità in una struttura* relativamente a un enunciato di un linguaggio formale, bensì si parla piuttosto della *verità di un enunciato matematico*: ci muoviamo pertanto in quell'ambito teorico pre-formale che abbiamo posto come necessario retroterra della costruzione delle teorie formali.

Possiamo ora riprendere l'esame dell'argomentazione che si è diffusa e la cui linea di fondo è quella di concludere che G è *vero* basandosi sulla sua inderivabilità, mostrata nel I Teorema di Incompletezza: poiché G *asserisce* di non essere dimostrabile, e poiché effettivamente non lo è, ecco, si dice, l'esempio di un enunciato vero, ma non dimostrabile.

Cerchiamo di capire la base di questo ragionamento. Siccome in matematica l'attribuzione della verità a un enunciato può solo dipendere da una dimostrazione (o da un'assunzione), è opportuno cercare di chiarire i termini di questa "dimostrazione" della verità di G. Il ragionamento che viene fatto ripercorre la sua *derivazione* da $Cons_{\mathbf{PA}}$

altri J. Lucas, D. Hofstadter, R. Penrose, H. Putnam. Lo stesso Gödel intervenne sull'argomento nella "Gibbs Lecture" del 1951, in cui però la base delle sue considerazioni è il secondo teorema di incompletezza, quello sull'indimostrabilità della non contraddittorietà dell'aritmetica (che vedremo fra poco).

prodotta nel II Teorema di Incompletezza. Dove $Cons_{\mathbf{PA}}$, è, per esempio, l'enunciato $\neg\, Teor_{\mathbf{PA}}(0 = 1)$ (31). Riflettiamo: per mostrare l'indecidibilità, e quindi l'indimostrabilità, di G nella prima metà del I Teorema di incompletezza bisogna *assumere* la coerenza di **PA** (32), ma nel II Teorema la *coerenza formalizzata* implica G entro **PA**. Si dimostra infatti:

$$\vdash_{\mathbf{PA}} Cons_{\mathbf{PA}} \rightarrow G \text{ (33) o, equivalentemente, } Cons_{\mathbf{PA}} \vdash_{\mathbf{PA}} G$$

Quindi, poiché per il I Teorema G è indimostrabile, anche $Cons_{\mathbf{PA}}$ è indimostrabile, e questo è quanto affermato dal II Teorema di Incompletezza di Gödel. L'assunzione *metateorica* della coerenza di **PA** non permette né di dimostrare né di refutare G, da cui la sua indecidibilità e l'incompletezza sintattica di **PA**; l'ipotesi *formalizzata* della coerenza, invece, aggiunta agli assiomi di **PA**, permette di dimostrare G (34). Tuttavia, come si diceva prima, per parlare della verità di G sarebbe necessaria una sua dimostrazione (visto che non la stiamo assumendo). L'informazione che viene dal testo gödeliano, però, è che per poter applicare alla precedente implicazione il *modus ponens*, e dimostrare così G, è necessaria una dimostrazione dell'indimostrabile, cioè di $Cons_{\mathbf{PA}}$.

Parlare di verità a proposito di enunciati indecidibili è un passo teoricamente impegnativo e ricco di conseguenze, poiché essi ci fornirebbero un significativo caso *esplicito* di una differenza tra verità e dimostrazione. Nella memoria del 1931, Gödel sottolinea la verità intuitiva di G quando dice

(31) Altri enunciati potrebbero essere scelti a questo scopo. Si noti comunque che, in ogni caso, *ConsPA* è un enunciato della teoria **PA** che asserisce la proprietà metateorica della non-contraddittorietà di **PA**.

(32) Cioè, si dimostra che "se **PA** è coerente, allora G non è dimostrabile". Come s'è detto, per avere l'indimostrabilità anche di $\neg\, G$, nella seconda metà del I Teorema è necessario assumere una proprietà più forte della semplice coerenza, come ad esempio che **PA** sia ω-coerente.

(33) Anzi, si dimostra l'equivalenza dei due enunciati, ma questa è l'implicazione che qui ci interessa.

(34) G. Longo ha appropriatamente segnalato questo dislivello, si veda ad esempio *Incompletezza*, disponibile al sito http://www.di.ens.fr/users/longo.

> Dall'osservazione che G dice di sé stessa di non essere dimostrabile, segue subito che G è vera, poiché G *è* effettivamente indimostrabile (essendo indecidibile). Così, la proposizione che è indecidibile *nel sistema* **PA** è stata decisa attraverso considerazioni metamatematiche. ([35])

Questo è l'unico punto della memoria del 1931 in cui parla della verità di G, limitandosi a aggiungere che

> la precisa analisi di questa curiosa situazione porta a sorprendenti risultati concernenti la prova di coerenza dei sistemi formali

cioè, il risultato or ora ricordato sull'indimostrabilità dell'enunciato che asserisce la non contraddittorietà di **PA**. Molto più tardi, Gödel ritornò sull'argomento usandolo a sostegno di una tesi platonista piuttosto forte, come si vede ad esempio dalle seguenti affermazioni (contenute in una lettera a H. Wang del 19/XII/1967 e pubblicata in [5], pag. 398):

> [S]i dovrebbe osservare che il principio che ha guidato la mia costruzione di proposizioni della teoria dei numeri indecidibili nei sistemi formali matematici è il concetto altamente transfinito di "verità matematica oggettiva", contrapposto a quello di "dimostrabilità" con il quale veniva generalmente confuso prima dei miei lavori e di quelli di Tarski. E ancora l'uso di questo concetto transfinito conduce alla fine a risultati provabili finitariamente, come ad esempio i teoremi generali sull'esistenza di proposizioni indecidibili in sistemi formali consistenti. ([36])

Anche senza condividere tali posizioni, è indubbio che ci aiutano a mettere a fuoco il fatto che quando diciamo che gli enunciati indecidibili gödeliani sono veri, stiamo parlando di verità in un contesto diverso

([35]) Il passo si trova alla fine del primo paragrafo della memoria del 1931, ed è disponibile in [4], pag. 151. La traduzione è mia ed è adattata al nostro testo.

([36]) [I]t should be noted that the heuristic principle of my construction of undecidable number theoretical propositions in the formal systems of mathematics is the highly transfinite concept of "objective mathematical truth", as opposed to that of "demonstrability", with which it was generally confused before my own and Tarski's work. Again the use of this transfinite concept eventually leads to finitarily provable results, e.g., the general theorems about the existence of undecidable propositions in consistent formal systems.

dalla dimostrazione effettuata in un sistema formale. Intendiamo qualcosa che potremmo chiamare "verità semantica": gli enunciati gödeliani sono veri grazie al loro significato. Osservando la costruzione di quegli enunciati constatiamo che hanno il seguente contenuto semantico: "questo enunciato è indimostrabile". Quest'ultimo enunciato, certamente non appartenente a $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$, è vero in virtù del Teorema di Gödel. Di fronte a tale *dimostrazione* di verità, ovviamente diversa dalle dimostrazioni usuali in matematica, è immediato chiedersi *dove*, se non nel sistema formale di partenza, stabiliamo la verità degli enunciati gödeliani. In negativo, la risposta è ovvia: non nel sistema **PA** stesso. D'altra parte, però, **PA** è l'unico sistema comparso nella dimostrazione del Teorema di Gödel. Noi non vediamo la verità di G attraverso una prova di G in **PA**: questa possibilità, infatti, è proprio ciò che Gödel ha escluso. Dire, come abbiamo fatto sopra, che stabiliamo la verità di G semanticamente, cioè tramite il suo *significato*, ovvero attraverso il modo in cui è stato costruito, comporta uno spostamento dalla considerazione dell'enunciato formale G a quella del suo contenuto semantico. E uno spostamento anche dalla nozione di "verità come dimostrazione" (cioè, dalla verità sintattica) a quella di "verità semantica". Come abbiamo visto, non è possibile definire la verità relativamente a $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$ entro **PA**. Una teoria tarskiana della verità *deve* essere formulata nella metateoria. Le equivalenze tarskiane *non* possono essere equivalenti a un predicato della teoria oggetto. E quindi, per poter parlare della verità di enunciati come G dobbiamo uscire dal sistema in cui sono stati formulati. La metateoria deve ovviamente includere la teoria oggetto ([37]), insieme con la definizione tarskiana di verità. Quando si ragiona della "verità" di G, quello che viene in primo piano è il suo contenuto semantico: il fatto che *G non può essere dimostrato in* **PA**. Quello in corsivo, ovviamente, non è un enunciato di **PA**, e neanche del sistema espanso che si ottiene dotando **PA** della sua teoria tarskiana della verità, diciamo $\mathbf{PA}^*$. Quando diciamo che "G è vero" proferiamo un enunciato del nostro linguaggio matematico pre-formale.

([37]) O una sua traduzione

Il quadro qui delineato è quello secondo cui gran parte dell'attività matematica riguarda la questione di trovare presentazioni formali di idee pre-formali. La teoria tarskiana si colloca tra il pensiero matematico pre-formale e quello formale: i significati degli enunciati formali sono le loro controparti pre-formali. Nella fase pre-formale abbiamo la nozione di verità matematica, in quella formale abbiamo la nozione di prova. "Vedere" la verità degli enunciati indecidibili, è qualcosa che facciamo a livello pre-formale. L'espansione tarskiana include qualcosa che già era presente nel nostro pensiero matematico. Da qui, la correttezza dell'argomentazione semantica. In termini tarskiani, il ragionamento informale opera come il metasistema per quel sistema oggetto che è la matematica formale. Più precisamente: voglio dire che riconoscere la verità (relativamente a $\mathcal{L}(\mathbf{PA})$) formalizzata (in $\mathbf{PA}^*$) come *autentica* verità è un'operazione che richiede, per essere compiuta, di collocarsi al livello dell'indagine pre-formale.

In un sistema formale come **PA**, gli assiomi e le regole di inferenza decidono quali enunciati siano teoremi. Quali enunciati siano veri, invece, è stabilito dal principio di correttezza $\forall x_n(Teor_{\mathbf{PA}}(x_n) \rightarrow V(x_n))$, disponibile nel metasistema $\mathbf{PA}^*$ che è **PA** espanso con la semantica tarskiana. Questo, ovviamente, equivale a fornire una condizione di verità per gli enunciati di **PA**. In **PA** essere un teorema significa che esiste una determinata dimostrazione di **PA**, punto. In $\mathbf{PA}^*$, grazie al principio di correttezza, il fatto che un enunciato sia un teorema comporta allo stesso tempo la sua verità. Passando da **PA** a $\mathbf{PA}^*$ sosteniamo che tutti i teoremi di **PA** sono *veri*. Anche se questa, lo ricordiamo, è un'acquisizione che possiamo fare solo a livello di teoria informale. La teoria $\mathbf{PA}^*$ è una teoria semi-formale, scelta fatta per bloccare la gerarchia e perché le strutture che costruiamo per dare significato ai nostri linguaggi formali sono oggetti che costruiamo "in matematica", intendendo quel livello informale che è l'ambiente in cui nascono e vivono le teorie e le teorie formali. E il dato di fatto che siamo capaci di operare con queste strutture presuppone la comprensione delle proposizioni matematiche che si riferiscono a queste strutture e la capacità di determinare, almeno di alcune di esse, che valgono in quelle strutture. Cioè, presuppone che sappiamo riconoscere come vere almeno quelle proposizioni la cui verità è presupposta nella stessa costruzione della struttura. Questa “verità semantica”, che è quella riconosciuta agli enunciati indecidibili, è dunque quella che si intende quando si parla della “verità di un enunciato matematico”, cioè quella che si assume di saper già dominare quando si procede a definire la “verità in un modello” relativamente a un enunciato di una teoria matematica formale. ([38])

E possiamo in conclusione osservare che l’esistenza di enunciati indecidibili veri è un forte argomento contro le concezioni deflazioniste della verità che già abbiamo richiamato. Se possedessimo un modo per risolvere tutti i problemi matematici, infatti, l’estensioni di “vero” e “dimostrabile” coinciderebbero, e sarebbe arduo argomentare contro una concezione deflazionistica della verità, sarebbe arduo *non* ritenere che in matematica la verità è “ridondante”. E in effetti il deflazionista concepisce la teoria tarskiana come *decitazionale*. Dire che “la neve è bianca” è vero (nel linguaggio-oggetto) non dice niente di più che dire *la neve è bianca* (nel metalinguaggio), per cui l’uso della nozione di verità è ridondante. Può essere *utile*, si concede, come ad esempio quando vogliamo riferirci a insiemi di enunciati che intendiamo dichiarare veri senza (voler o poter) costruire tutte le equivalenze tarskiane, e diciamo ad esempio che “tutte le proposizioni asserite da X sono vere”. La verità degli enunciati di **PA** stabilita in **PA***, prova invece l’importanza teorica della costruzione tarskiana. Come infatti testimoniano gli enunciati indecidibili e il ragionamento semantico su di essi, aggiungere una teoria della verità produce nuove conoscenze. E prova che la nozione di verità non è solo *utile* (per le generalizzazioni), ma anche *sostanziale*.

([38]) In questo senso, se ben interpreto, si muovono le considerazioni che G. Longo fa, nel testo già citato, quando dice che

> Non si può fondare la Matematica, e nessuna forma di sapere, con il ricorso al suo meta- [...] Nessun meta-linguaggio fonda il linguaggio: “siamo chiusi nella gabbia del linguaggio”, scrive Wittgenstein. Solo una “genealogia di concetti”, diceva Riemann, da radicare, con il linguaggio certo, ma *oltre* il linguaggio, *prima* del linguaggio, *sotto* il linguaggio, nell’azione nello spazio (Poincaré) e nel tempo (Brouwer), può proporre un’analisi epistemologica della Matematica, questo sapere così costruito nel mondo, per organizzare e capire il mondo. (pag. 9)

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Anderson, A. R., (a cura di) (1964), *Minds and machines*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ).

[2] Benacerraf, P. (1973), ã‘Mathematical truth’, *Journal of Philosophy*, vol. 70, pp. 661–680.

[3] Benacerraf, P. e Putnam, H. (1964), *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ); 2ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[4] Gödel, K. (1986), *Collected works, Vol. I: Publications 1929-1936*, a cura di S. Feferman *et al.*, Oxford University Press, New York (trad. it. *Opere, Vol. 1: 1929-1936*, Bollati Boringhieri, Torino, 1999).

[5] Gödel, K. (2003), *Collected works, Vols. IV-V: Correspondence*, a cura di S. Feferman *et al.*, Oxford University Press, New York.

[6] Hempel, C. G. (1945), ‘On the nature of mathematical truth’, *American Mathematical Monthly*, vol. 52, pp. 543-56.

[7] Hilbert, D. (1918), ‘Axiomatisches Denken’, *Mathematische Annalen*, vol. 78, pp. 405-15 (trad. it. ‘Pensiero assiomatico’, in D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di M. V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1978).

[8] Hilbert, D. e Bernays, P. (1939), *Grundlagen der Mathematik*, Vol. 2, Springer, Berlin, 1939; 2ª ed. arricchita, 1970.

[9] Kline, M. (1982), *Mathematics: The loss of certainty*, Oxford University Press, Oxford, 1982 (trad. it. *Matematica, la perdita della certezza*, Mondadori, Milano, 1985).

[10] Tarski, A. (1936), ‘O pojęciu wynikania logicznego’, *Przegląd Filozoficzny*, vol. 39, pp. 58-68. (trad. ing., ‘On the concept of following logically’, *History and Philosophy of Logic*, vol. 3, 2002, pp. 155-96).

[11] Tymoczo, T. (a cura di) (1986), *New directions in the philosophy of mathematics*, Birkhäuser, Boston.

Enrico Moriconi
Dipartimento di Civiltà e Forme del Sapere, Università di Pisa
e-mail: enrico.moriconi@unipi.it