La quantità del nulla

Yet zero was inexorably linked with the void – with nothing, [1] *p. 9.*

Charles Seife (1972 –)

Lorenzo Dello Schiavo *Institut für Angewandte Mathematik – Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn – Bonn, Germania*

Anna Baccaglini-Frank *Dipartimento di Matematica – Università di Pisa*

0 *zero*, ovvero la quantità del nulla. Un'idea che — assieme a quella gemella di insieme *vuoto* — ha segnato la storia della matematica attraverso i secoli e i continenti, ben al di là dell'introduzione dei sistemi numerici posizionali o degli interi relativi.

∅ *vuoto*, ovvero l'insieme privo di elementi ed unico sottoinsieme di sé, ogni elemento del quale soddisfa ogni proprietà: adynaton per la filosofia antica, paradosso per quella moderna, *commodité* irrinunciabile per la matematica contemporanea.

Dell'uso di questi due concetti, intimamente legati, cercheremo di fornire una storia breve, corredata dalle fonti originali dall'antichità ai giorni nostri ed arricchita da curiosità matematiche, accennando poi a come alcune tappe storiche segnino delicati passaggi cognitivi nel loro apprendimento.

1 Introduzione e breve storia

Pochi tra i concetti elementari della matematica moderna hanno una storia affascinante quanto quella dello zero, la quantità del nulla. Una storia all'inizio della quale, come spesso nell'antichità, la matematica, con i suoi enti e le sue costruzioni, non costituì per molti secoli una disciplina a sé stante, contesa piuttosto tanto da dottrine filosofiche o religiose, dall'ontologia all'etica, quanto da necessità pratiche e materiali, dall'agrimensura all'astronomia, dall'ingegneria al commercio. Una storia dunque, scritta da sacerdoti indiani su foglie di palma o da astronomi babilonesi su tavolette d'argilla, da mercanti italiani e da bibliotecari arabi, dove lo zero ed il vuoto, il nulla, furono di volta in volta sia concetti di uso comune, denotati con simboli proprî, sia necessità inconsapevoli, accettate per comodità o per convenzione, ma spesso prive di identificazione, sia concetti ignorati ed osteggiati, dei quali si negava la stessa esistenza.

Di questa stessa storia, che riprendiamo brevemente di seguito nei suoi aspetti universali, tratteremo poi alcuni aspetti individuali, relativi all'apprendimento del concetto di zero nella prima infanzia ed alle difficoltà cognitive che si presentano in relazione ad esso. È interessante notare come la nostra prospettiva storica si possa rileggere — scevra dalle molte sovrastrutture filosofico-religiose accumulatesi nel corso del tempo e dai tecnicismi della disciplina matematica contemporanea — proprio alla luce di tali difficoltà.

Etimo Tra le ipotesi maggiormente accreditate riguardo l'origine del termine *zero* è la contrazione del veneziano *zevero* per il latino *zephirum*, con il quale il Fibonacci (ca 1175 – ca 1235 d. C.) traduceva nel suo *Liber abbaci* l'arabo صِفْر *ṣifr* [1], orig. *vuoto*:

> *Novem figure indorum he sunt*
>
> 9 8 7 6 5 4 3 2 1
>
> *Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo* 0, *quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.* [2]

quest'ultimo a sua volta per il sanscrito *śūnya*, dal medesimo significato di *vuoto*, nell'accezione[3] di *privo di contenuto*, ma accostato, specialmente nella filosofia buddhista, anche a quello di *nullità*, *non-esistenza*.

Uso presso Babilonia e la Grecia Antica

> ἀεὶ ἦν ὅ τι ἦν καί ἀεὶ ἔσται. εἰ γὰρ ἐγένετο, ἀναγκαῖόν ἐστι πρίν γενέσθαι εἶναι μηδέν· εἰ [τύ] τοίνυν μηδέν ἦν, οὐδαμὰ ἂν γένοιτο οὐδὲν ἐκ μηδενός. [4]
>
> Melisso di Samo (sec. v a. C.)

[1] La medesima etimologia ha anche l'italiano *cifra*.

[2] *Le nove figure degli Indiani sono queste: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con tali nove figure, e con il simbolo 0, in arabo detto* zephiro, *si scriverà qualsiasi numero, com'è dimostrato più avanti.* [2, I] [trad.: L. D. S.].

[3] Alla voce *śūnya*, in particolare v. L220069 per il primo significato qui riportato e L220084 per il secondo [3].

[4] Simplicio (ca 490 – ca 560 d. C.) riportando Melisso: *Sempre era ciò che era e sempre sarà. Poiché se si fosse generato, allora necessariamente prima della sua generazione esso sarebbe stato nulla; e se dunque fosse stato nulla, in nessun caso dal nulla si sarebbe potuta generare cosa alcuna.* [trad.: L. D. S.] da [4, 20. B1, p. 148].

La *sententia* dei Presocratici οὐδέν ἐξ' οὐδενός, *oudèn ex' oudenòs*, ovvero *nulla* [viene] *dal nulla* — ripresa anche in ambito romano:

> *Principium cuius hinc nobis exordia sumet,*
> *nullam rem e nihilo gigni divinitus umquam* [5]
>
> Lucrezio (94 – ca 55 a. C.)

— tradisce tutta l'ostilità di gran parte del mondo classico verso il concetto di *nulla*. Lo zero, quantità di esso, non gode di maggior favore, e in effetti persino l'unità stessa, la *monade*, sarà, fino ad epoche molto successive, un concetto controverso:

> *Il ponto* [punto] *in Geometria, è simile alla unità nella Arithmetica: la qual è principio del numero, & non è numero* [6].
>
> Niccolò Tartaglia (1499 – 1557 d. C.)

Sebbene presso i Greci del v – iii secolo a. C. lo zero fosse — al pari di quello di *infinito* o di numero *irrazionale* — un concetto ignorato, quando non esplicitamente avversato, esso non era tuttavia ignoto. In particolare, avrebbe trovato applicazione presso gli astronomi del ii secolo a. C. — gli inventori della macchina di Antikythera[7] — i quali ne avevano adattato l'uso, importandolo dal sistema numerico assiro-babilonese dell'età alessandrina.

Quest'ultimo era un sistema cumulativo-posizionale[8] a base mista decimale e sessagesimale, in cui la decina era rappresentata dal segno ' 𒌋 ', l'unità dal segno ' 𒁹 ' e i numeri da 1 a 59 erano indicati dalla giustapposizione di questi simboli, ad esempio 𒐏 𒐛 per 47.

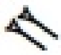
Tale sistema raggiunse la maturità di una forma rigorosa durante la dinastia seleucide (secc.

[5] Tito Lucrezio Caro. *De rerum natura* I, 149–150: *Il suo fondamento prenderà per noi inizio da ciò: che, per volere divino, cosa alcuna si genera mai dal nulla.* Trad.: L. D. S..

[6] Commento alla *definizione* di punto negli *Elementi* di Euclide. [5, fol. 7^v]

[7] Si tratta di un sorprendente meccanismo ad orologeria (ca 150 a. C.), unico nel suo genere tra i reperti giunti sino a noi, mediante il quale era possibile predire, calcolando il tempo intercorso tra essi, certi eventi astronomici, quali le fasi lunari, i movimenti di alcuni pianeti e gli equinozî.

[8] Si veda [6], p. 12, per una classificazione dei sistemi numerici.

IV – I a. C.), divenendo così particolarmente adatto al calcolo delle cosiddette *frazioni astronomiche*[9], motivo per il quale fu infine adottato anche in Grecia. A partire da questo periodo [6], p. 253, si registra infatti l'introduzione di un carattere speciale, '  ', avente duplice funzione: la prima, di indicare una posizione vuota nella scrittura posizionale di un numero frazionario, ad esempio per distinguere un intero da una frazione propria[10]; la seconda, di essere impiegato come simbolo meramente epigrafico (cioè privo di valore numerico) allo scopo di impedire letture erronee (ad esempio  potrebbe leggersi sia 47 sia $2407 = 40 \cdot 60 + 7$, mentre la grafia  precluderebbe la prima lettura).

Una delle prime apparizioni sistematiche dello zero in ambito greco, proprio con la prima funzione dello zero assiro- babilonese, si registra nell'opera del matematico, astronomo e geografo greco-romano Claudio Tolomeo (ca 100 – ca 170 d. C.), ideatore del modello astronomico oggi noto come sistema aristotelico-tolemaico (v. Tabella 1).

περιφερειῶν	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\kappa\vartheta$	λ	β	$\mu\delta$	$\circ$	α	$\circ$	$\mu\eta$
$\kappa\vartheta\angle'$	λ	$\lambda\gamma$	η	$\circ$	α	$\circ$	$\mu\delta$

Tabella 1: *Parte della cosiddetta* Tavola delle corde, *dall'*Almagesto *di* Tolomeo, *trattato di astronomia e matematica. Nella tavola (v. [8, cap. I, sez. XI pp. 48ss.]) sono riportati i valori approssimati della lunghezza delle corde sottese agli angoli al centro di un cerchio del raggio di sessanta unità. L'angolo al centro di $\theta°$ (ovvero l'arco di circonferenza o* περιφερειῶν, peripherèion*) varia da $1°$ a $180°$ ad intervalli di mezzo grado ed è indicato, così come gli altri valori, secondo la numerazione alfabetica greca antica. Ad esempio $\kappa = 20$, $\vartheta = 9$, dunque $\kappa\theta = 29$ denota un angolo di $29°$, mentre il segno $\angle'$ indica il mezzo grado. La lunghezza* $\mathrm{chord}(\theta°)$ *della corda sottesa (*εὐθειῶν, euthèion*) è riportata in base sessagesimale fino alla seconda cifra frazionaria, dunque fino all'ordine di $1/3600 = 1/60^2$; ad esempio $\lambda = 30$, $\beta = 2$, $\mu\delta = 44$, ovvero una lunghezza di $30 + 2/60 + 44/60^2 = 30,04(5)$. La terza colonna (*ἑξηκοστῶν, hexekostòn, *la* sessantesima parte*) riporta invece il* numero *medio di sessantesimi dell'unità*

$$\frac{\mathrm{chord}((\theta+1/2)°) - \mathrm{chord}(\theta°)}{30}$$

che devono essere aggiunti a $\mathrm{chord}(\theta°)$ *per ottenere la lunghezza della corda* $\mathrm{chord}(\theta° 1')$ *sottesa all'angolo corrispondente aumentato di un minuto primo, per ogni angolo tra $\theta°$ e $(\theta + 1/2)°$ ad intervalli di un minuto primo. L'assenza della cifra corrispondente in base sessagesimale viene riportata mediante un cerchio ' $\circ$ ', ad indicare che lo spazio nella relativa colonna della tavola è lasciato intenzionalmente vuoto.*

Dall'India all'Arabia all'Europa È opinione diffusa[11] che l'introduzione dello zero come valore numerico, sebbene con uso dissimile da quello moderno, sia ascrivibile al matematico e astronomo indiano Brahmagupta di Bhillamāla (ca 598 – d. il 665 d. C.) nella sua *Brāhmasphuṭ asiddhānta*, ovvero la *dottrina di Brahma propriamente dimostrata*, compendio di aritmetica ed algebra ove si danno, inter alia, i rudimenti del calcolo aritmetico con lo zero. Tra questi è senz'altro degna di nota — seppure incompatibile con la moderna aritmetica — la regola

> §23 [...] *zero, diviso per zero, dà nulla* [12]

in simboli solitamente interpretata con $0/0 = 0$.

La *Brāhmasphuṭasiddhānta* era già nota al matematico (anche astronomo, astrologo e cartografo)

---

[9] La conoscenza astronomica del tempo era diffusa in gran parte mediante tavole astronomiche o *almanacchi* (dall'arabo أَلْمَنَاخ *al-manāẖ*, orig.: *clima*), le quali riportavano la posizione relativa degli astri. Da queste deriveranno le successive tavole astronomiche arabe dette زِيج *zīǧ*, letteralmente *corde*, tra cui la *Zīǧ al-Sindhind al-kabīr* di al-Ḫwārizmī (v. infra).

[10] Tuttavia, mai in posizione finale, ad esempio per distinguere la decina dall'intero, da cui si è soliti dedurre che lo zero assiro-babilonese fosse concepito esclusivamente come una sorta di separatore (cf. [6], p. 252), come nelle prime e più antiche attestazioni testuali, dove ha un ruolo assimilabile a quello del moderno punto e virgola.

[11] Si veda ad esempio [7], p. 242, riferito a Brahmagupta: *The systematized arithmetic of the negative numbers and zero is, in fact, first found in his work.*

[12] [9], p 339, trad. dall'inglese: L. D. S.. Si noti l'uso, nell'originale inglese, di *cipher* per *zero*, distinto da *nought* per *nulla*.

persiano Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī[13] (ca 780 – ca 850 d. C.) autore del celebre *Libro compendiario sul calcolo mediante completamento e bilanciamento*[14] e di altri trattati[15] di matematica. Su questi si formò quasi certamente il già citato Leonardo Pisano fi*lius* Bonacij, cui si attribuisce il merito di aver introdotto[16] lo zero in Europa, ovvero nell'Europa cristiana, dal momento che l'idea di zero aveva quasi certamente già da tempo raggiunto la Spagna omayyade.

Uso indiano e nell'Europa medioevale Come si evince, in ambito europeo, dal maestro Jacopo da Firenze († ca 1320)

> *Et dovete sapere chel zeuero per se solo non significa nulla ma è potentia di fare significare* [17]

è chiara sin da Brahmagupta la funzione, propria del solo zero, di alterare il significato delle altre nove cifre, ed altresì il fatto che esso, preso a sé stante, non designa alcun numero. A riprova si dà che il termine sanscrito *aṅka*, col significato (tra gli altri[18]) di *segno* o *cifra*, denota anche il numero *nove* dunque presumibilmente, per estensione, l'insieme delle nove cifre decimali [6], p. 196, da cui lo zero risulta escluso. In tal

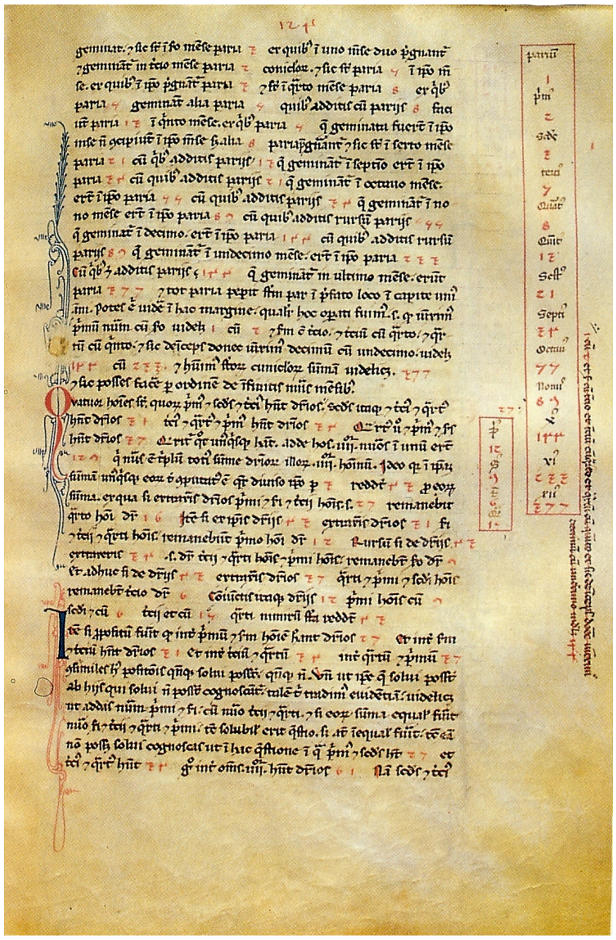


Figura 1: *Il celebre passo sulla riproduzione dei conigli dal* Liber Abbaci *di Fibonacci e i primi valori* 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, *ecc. dell'omonima successione numerica, indicati a lato (Museo della Biblioteca Nazionale di Firenze, Codice magliabechiano Conv. Soppr. C 1, 2616, fol. 124*^{r}*. Per la versione a stampa si veda [2], p. 284). Fonte: [12].*

senso sono da leggersi anche il Fibonacci, per il quale lo zero è *signum*, non *figura*, ed i versi del poeta indiano Bihārī (1595 – 1663 d. C.):

> *Il punto* [tilaka[19]] *sulla fronte di lei*
> *incrementa la sua bellezza di dieci volte*
> *così come il punto-vuoto* [śūnya-bindu]
> *incrementa un numero di dieci volte.* [20]

Come si evince dalla citata regola di Brahmagupta, se il *śūnya* indiano — come pure lo *zephiro* di Fibonacci — non è ancora numero, esso è tuttavia un'entità con cui dover "fare i conti".

Per Brahmagupta, il cui fine ultimo è di ricondurre l'enunciazione della 'dottrina di Brahma'

[13] Orig. arabo: محمد بن موسى الخوارزمي. *al-Ḫwārizmī*: dalla regione persiana del Ḫwārizm, ital. Corasmia, parte degli attuali Uzbekistan, Kazakistan e Turkmenistan. Dalla storpiatura di questa *nisba* (nell'onomastica araba: il luogo di appartenenza o di provenienza geografica), latinizzata in *Algoritmi*, deriva l'italiano *algoritmo*.

[14] Orig.: الكتاب المختصر في حساب الجبر وا لمقابلة *al-kitab al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqabāla*, dove *il completamento*, أَلْجَبْر *al-ǧabr* (letteralmente: *ricomposizione*, spec. di fratture ossee, si veda [10], pp. 177 ss, per una spiegazione dettagliata del termine), da cui l'italiano *algebra*, denota l'aggiunta di un termine additivo ad ambo i lati di un'equazione a fini di cancellazione.

[15] Tra questi l'*Algoritmi de numero Indorum*, ovvero *Al-Ḫwārizmī sui numeri indiani*, pervenutoci solo in traduzione latina. Per un resoconto dettagliato dell'opera di Al-Ḫwārizmī si veda [11].

[16] Più propriamente, è di Fibonacci il primo tentativo europeo di introdurre un calcolo sistematico con lo zero, sebbene la cifra in sé fosse probabilmente già nota.

[17] Jacopo da Firenze, *Tractatus algorismi*, 1307. Cit. in [13], p.5, si veda anche [14].

[18] Anche col significato di *uno*, si veda [3] alla voce *aṅka*, in particolare le accezioni L1419 e L1422, oppure col significato di *gancio* (L1409) o *curva* (L1411) o *gomito* (L1414), da cui il greco ἀγκύλος *ankŷlos*, *ricurvo*, il latino *angulus* e l'italiano *angolo*.

[19] Nella tradizione induista, segno pigmentale decorativo ed identificativo usualmente portato sulla fronte.

[20] Bihārī, cit. in [15], p. 81, nota 2, trad. dall'inglese: L. D. S..

ad un calcolo rigoroso, il far discendere l'aritmetica allora conosciuta da regole elementari assume una connotazione sacra, che come tale non può prescindere da un concetto di nulla —

> *L'esistenza, nella più antica età degli Dèi,*
> *[scaturì dalla Non-esistenza.* [21]
>
> *Ṛgveda*, x, lxxii, v. 5 (secc. xx – xv a. C.)

— antitetico a quello di Melisso.

Al contrario, Fibonacci — e in qualche misura anche al-Ḫwārizmī — si pone un fine assai più pragmatico: di istruire il mercante pisano, suo lettore ideale, nell'acquisto di merce e moneta. Materia centrale del Liber Abbaci sono infatti *l'acquisto e la vendita delle merci e simili, i baratti delle merci, l'acquisto di monete e simili* e persino *le società fatte tra consoci* (capitoli viii – x) — così il capitolo viii del Libro compendiale è باب المعاملات *bāb al-muʿāmalāt*, ovvero il *capitolo delle transazioni*.

In ultima analisi, proprio questa necessità di calcolare *con* lo zero segna l'inizio della sua storia come concetto distinto dal 'segnaposto vuoto' dei sistemi numerici più antichi.

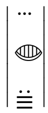
Uso presso i Maya Parallelamente ed indipendentemente dal pensiero indo-arabo-europeo, lo zero fu anche un'invenzione delle civiltà dell'America precolombiana, in particolare dei Maya (cf. [16]), presso i quali esso costituiva non solo un segnaposto nel sistema numerico in uso, bensì anche il primo numero a partire dal quale iniziare il computo, ad esempio dei giorni del mese. Questi ultimi erano denotati da una serie di glifi antropomorfi di valenza rituale, incluso uno per lo zero[22], indicato anche da glifi accessorî[23], come  (probabilmente un quadrifoglio, cf. [16], v. Fig. 2).

[21] Orig. sanscrito: *devānāṃ yuge prathame.asataḥ sad-ajāyata*, dove asataḥ denota *ciò che non esiste*. Altri traducono: *La realtà* [...] *scaturì dalla non-realtà*.

[22] Ovvero il glifo T1085, cf. [16, Fig. 5].

[23] V. [16, *passim*] e in particolare p. 53: *This range of visual expression for a single number or word is standard within the Maya hieroglyphic corpus made by scribes who delighted to form their written language out of syllables, words, and numerical signs that intertwine and change like the animate elements of the tropical, mountainous, and coastal region in which they lived.*

In effetti, i Maya disponevano anche di un sistema numerico avanzato, più adatto al calcolo, classificabile[24] come cumulativo-posizionale a base mista 5 e 20, dove l'unità era indicata con '·', il numero 5 con '—' e lo zero solitamente denotato con una conchiglia[25] ''; il numero 1217 si sarebbe scritto ad esempio:



$$= \begin{array}{r} 3\cdot 1\cdot 20^2 + \\ 0\cdot 20^1 + \\ (2\cdot 1+3\cdot 5)\cdot 20^0 \end{array} = 1217\,.$$

Simboli per lo zero Storicamente, l'introduzione di un simbolo atto a denotare un concetto algebrico è in genere di molto successiva a quella del concetto stesso: la notazione sintetica e largamente univoca cui siamo abituati è da considerarsi una conquista moderna e contemporanea.

La tradizione filologica iniziata dal filologo e storico tedesco Georg Nesselmann (1811 – 1881) distingue in tal senso un'*algebra retorica* (*rethorische Algebra*), caratterizzata dall'uso di lunghe perifrasi per indicare le più semplici formule, cui si sostituì via via un'*algebra sincopata* (*synkopirte Algebra*), ove si affiancava all'uso del linguaggio naturale quello sistematico di abbreviazioni per denotare i concetti di uso più frequente, ed infine la moderna *algebra simbolica* (*symbolische Algebra*). [26] Celeberrimo esempio italiano della prima è il *Capitolo di cose e cubo eguale a numero* [27] di Scipione del Ferro (1465–1526 d. C.), formulazione[28] dell'equazione di terzo grado $x^3 + px = q$.

[24] V. [6, p. 12].

[25] Presumibilmente appartenente alla famiglia delle *Olividae* (cf. [16], p.11) o delle *Cypraeidae*. V. anche Figura 2.

[26] V. [17, p. 302]. Si ritiene oggi che questa suddivisione sia incompleta, poiché essa non tiene conto della cosiddetta *algebra geometrica*, ovvero della trattazione e/o dimostrazione di risultati algebrici mediante l'ausilio di figure della geometria. Si consideri ad esempio la nota dimostrazione grafica del calcolo del quadrato della somma di due termini.

[27] Ove '*capitolo*' denota la somma delle incognite x, '*cose*', al cui numero dato p ci si riferisce come alla *quantità delle cose*, e del cubo di un'incognita medesima.

[28] Riportata nelle note di tale cavalier Pompeo Bolognetti († 1568 d. C.), lettore *ad praxim mathematicae* nello *Studium* bolognese. V. [18, p.157].

Non deve dunque sorprendere il fatto che la prosa di al-Ḫwārizmī sia del tutto priva di simboli convenzionali, persino per denotare le cifre decimali, tanto che i numeri vi sono scritti per esteso ([7] p. 288, [10], *passim*). Tuttavia, è ragionevole supporre che i calcoli venissero effettuati con l'ausilio di una notazione simbolica concisa, all'interno della quale si rendeva necessario un simbolo per lo zero.

Figura 2: *Lato est della stele C di Quiriguá (parte superiore). I primi sette glifi* A2, B2, A3, *fino ad* A5 *della stele, successivi al glifo introduttivo* A1, *riportano una data del cosiddetto* Lungo computo *del calendario Maya, un sistema di calcolo del tempo in base mista, la cui unità più piccola è il giorno,* k'in. *Seguono cicli di 20 giorni,* uinal; *di 18 uinal, ovvero 360 giorni,* tun; *di 20 tun, ovvero 7200 giorni,* k'atun; *infine di 20 k'atun, ovvero 144 000 giorni,* b'ak'tun. *I Maya ritenevano l'universo dinamico e soggetto a creazioni e distruzioni periodiche ad opera degli Dèi: tredici b'ak'tun corrispondono alla durata di uno di questi cicli. La stele riporta* 13 b'ak'tun 0 katùn 0 tun 0 uinal 0 k'in 4 Ahau 8 Kumku, *corrispondente all'11 Agosto dell'anno 3114 a. C., la data della seconda più recente creazione del mondo. Il glifo , parte del glifo* B3, *è uno dei simboli usati nel Lungo computo per indicare lo zero. Lo stesso è denotato invece nei glifi* B2, A3 *e* A4 *da una mano recante una conchiglia (cf. [16], Fig. 3). Fonte: [19].*

Dei diversi simboli utilizzati dalle varie culture nel corso dei secoli, i principali tre ben esemplificano le complementari concezioni antiche dello zero (e del vuoto):

- ‘ ’ la spaziatura, mero segno grafico con il quale palesare l'assenza della cifra corrispondente ad una data posizione nei sistemi numerici posizionali, ad esempio in quello assiro-babilonese antico (ovvero prima dell'introduzione del citato segno , v. [6], p. 251);
- *śūnya-bindu*, il *punto-vuoto*[29], in arabo denotato con ⋅, ovvero, almeno inizialmente, una cifra segnaposto, e successivamente un carattere modificatore delle cifre circostanti;
- ◯ *xīng*, il carattere Zétiān[30] per *stella*, successivamente entrato nell'uso, in Cina e Giappone, come simbolo secondario per zero, più simile al segno indo-arabo 0 in uso in Occidente e propriamente numero in tutte le sue funzioni.

(Ri-)partiamo da zero Concludiamo la nostra breve trattazione storica con l'idea del "partire da zero":

> *The story, presumably apocryphal, is that once when he* [Wacław Sierpiński] *was travelling, he was worried that he'd lost one piece of his luggage. «No, dear!»said his wife, «All six pieces are here.» «That can't be true,» said Sierpiński, «I've counted them several times; zero, one, two, three, four, five.»* [21], p. 265.

Eccezion fatta per i Maya, la concezione moderna dello zero quale primo dei numeri *naturali* è relativamente recente ed in effetti successiva all'introduzione dell'assiomatizzazione dei naturali in uso a tutt'oggi, dovuta a Giuseppe Peano (1858 – 1932), il quale, nel 1889, dava come primo

[29] La prima attestazione risale (cf. [6],p. 196) al romanzo d'amore *Vāsavadattā* (ca 600 d. C.) di Subandhu (seconda metà del sec. VI d. C.), si veda [20], p. 100, nota 10 e riferimenti ivi citati.

[30] Detto dei caratteri ideografici cinesi introdotti durante il regno (624 – 705 d. C.) dell'imperatrice Wu Zétiān (624 – 705 d. C.), oggi prevalentemente in disuso.

assioma [22], p. 1.

$$1 \in \mathbb{N} \, .$$

Uno dei maggiori contributi verso la concezione dello zero come 'iniziale' è la seguente definizione induttiva dei numeri *ordinali* proposta nel 1923 da John von Neumann (1903 – 1957):

> *„Jede Ordnungszahl ist die Menge der ihr vorangehenden Ordnungszahlen."* [31]

In simboli, si pone per definizione

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ \{0\} = 1 &= \{\varnothing\} \\ \{0,1\} = 2 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\ \{0,1,2\} = 3 &= \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\ \{0,1,2,3\} = 4 &= \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} \end{aligned}$$

e la relativa generalizzazione $\kappa := [0, \kappa)$ per ogni ordinale κ.

Limitandosi a considerare i numeri naturali, questi possono essere riguardati come le cardinalità degli insiemi finiti presi a meno di equivalenza (ovvero a meno di biiezione). È dunque naturale che si prenda inizio da 0, che denota la cardinalità dell'insieme vuoto, seguito da 1, la cardinalità di ogni insieme con un unico elemento, e così via.

2 Uso moderno

Nella matematica contemporanea sono molti gli enti cui si dà, per ragioni diverse, il nome di 'zero', come ad esempio l'elemento neutro di una qualsiasi operazione associativa e commutativa. Di seguito esponiamo, in modo informale, le proprietà di alcuni di questi enti utilizzando il linguaggio della teoria delle categorie.

Neutralità e assorbenza

> §21 *Negativo, meno zero, dà negativo, positivo* [meno zero], [dà] *positivo, zero* [meno zero], [dà] *nulla.* [9], p. 339, trad.: L. D. S..

[31] *"Ogni numero ordinale coincide con l'insieme dei numeri ordinali ad esso precedenti."* [23], p. 199. Trad.: L. D. S. .

Sin dalle prime apparizioni dei rudimenti del calcolo con gli interi è noto che per ogni intero a

$$a + 0 = a = 0 + a \, .$$

In termini moderni, 0 è l'*elemento neutro della somma* nell'*anello* $\mathbb{Z}$ [32] dei numeri interi. Per questo motivo si è soliti denotare con lo stesso simbolo l'elemento neutro dell'operazione di somma in un qualsiasi anello, qui indicato invece con $\mathbf{0}$.

Analogamente, si denota solitamente con 1, qui con $\mathbf{1}$, l'elemento neutro, qualora presente, del prodotto di un anello. In tal caso, quest'ultimo si dice *anello con unità*.

Come noto, la neutralità dello zero è legata al concetto di 'somma vuota'. Comunque dato un insieme J di indici ed un insieme di interi $A := \{a_j\}_{j \in J}$ siamo soliti denotare con il simbolo[33] $\sum_{j \in J} a_j$ la somma degli elementi di A. Se J, dunque A, è l'insieme vuoto, poniamo per convenzione

$$\sum_{j \in \varnothing} = 0 \, .$$

In modo analogo, il prodotto vuoto si fa convenzionalmente coincidere con l'unità, elemento neutro del prodotto in $\mathbb{Z}$; in simboli:

$$\prod_{j \in \varnothing} a_j = 1 \, ,$$

da cui discende anche la convenzione $0! = 1$, dove $n!$ denota il *fattoriale* di n, definito come il prodotto dei numeri naturali da 1 ad n.

Come si vedrà più avanti, questa scelta, convenzionale nel contesto degli anelli, può in altri contesti essere propriamente compresa nelle definizioni di somma e prodotto.

Una seconda proprietà fondamentale dello 0, anch'essa già enunciata da Brahmagupta, [9] p. 339, è quella di essere l'unico elemento

[32] $\mathbb{Z}$, dal tedesco *Zahlen*, *numeri*.

[33] A rigore, tale scrittura è non ambigua grazie alla commutatività della somma in $\mathbb{Z}$.

assorbente per il prodotto di $\mathbb{Z}$, ovvero tale che

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

per ogni intero a. Nel lessico della teoria degli anelli si dirà che l'insieme $\{0\}$, costituito dal solo 0, è un *ideale* dell'anello $\mathbb{Z}$, ovvero un sottoinsieme chiuso rispetto alla somma ed assorbente rispetto al prodotto.

Vedremo nella prossima sezione come tutte queste proprietà dello zero possano essere rilette anche in contesti più generali.

Oggetti *iniziali*, *terminali* e *zero-oggetti*

Tendenza di parte considerevole della matematica degli ultimi due secoli è stata quella di spostare l'attenzione dagli enti alle relazioni che intercorrono tra di essi. Parte di questa tendenza è lo sviluppo della *teoria delle categorie*, all'interno della quale ha trovato una sua rielaborazione anche il concetto di 'zero iniziale'.

Informalmente, una *categoria* è il dato di una collezione $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$, i cui elementi sono detti *oggetti* (*di* $\mathcal{C}$), e di una collezione $\hom(\mathcal{C})$, i cui elementi sono detti *morfismi* (o *mappe* o *frecce*, *di* $\mathcal{C}$) e soddisfano le seguenti proprietà. Ogni morfismo f ha associati un unico oggetto d'origine a ed un unico oggetto di destinazione b, entrambi in $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$. Un tale morfismo si indica solitamente con $f\colon a \to b$, e si denota con $\hom_{\mathcal{C}}(a, b)$ la collezione di tutti i morfismi di $\mathcal{C}$ con origine a e destinazione b. Ai morfismi si richiedono alcune proprietà di composizione, tra cui l'esistenza di un'identità $\mathrm{id}_a\colon a \to a$ per ogni $a \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ e l'associatività di tale operazione, denotata con

$$\circ\colon\ \hom_{\mathcal{C}}(a, b) \times \hom_{\mathcal{C}}(b, c) \to \hom_{\mathcal{C}}(a, c)\,,$$

e tale che $g \circ f \in \hom_{\mathcal{C}}(a, c)$ per ogni scelta dei morfismi $f \in \hom_{\mathcal{C}}(a, b)$ e $g \in \hom_{\mathcal{C}}(b, c)$ e per ogni tripla di oggetti $a, b, c \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$.

Un oggetto o di una categoria $\mathcal{C}$ si dice

- *iniziale* (originariamente indicato da alcuni autori con $\mathbf{0}$, più modernamente con $\varnothing$) se per ogni oggetto a di $\mathcal{C}$ esiste uno ed un solo morfismo f in $\hom_{\mathcal{C}}(o, a)$;
- *terminale* (a volte indicato con $\mathbf{1}$) se per ogni oggetto a di $\mathcal{C}$ esiste uno ed un solo morfismo f in $\hom_{\mathcal{C}}(a, o)$;
- *zero* se esso è sia iniziale che terminale.

Consideriamo l'*insieme vuoto*, denotato con $\varnothing$, e la *mappa vuota*, l'unica mappa tra insiemi il cui dominio è l'insieme vuoto, anch'essa denotata con il medesimo simbolo. L'insieme vuoto è, mediante la mappa vuota, l'oggetto iniziale della fondamentale categoria degli insiemi Set, i cui oggetti sono gli insiemi e i cui morfismi sono le mappe tra insiemi. Nella stessa categoria, ogni insieme costituito da un solo elemento è un oggetto terminale, mediante la relativa mappa costante.

Nella categoria degli insiemi si dà inoltre la seguente definizione di *prodotto* (la quale è possibile generalizzare ad ogni categoria), ivi detto *cartesiano*:

> dati un insieme J di indici ed una collezione $\mathcal{A} := \{A_j\}_{j\in J}$ di insiemi, il prodotto cartesiano $\prod_{j\in J} A_j$ di $\mathcal{A}$ è l'insieme
>
> $$\left\{ f\colon J \to \coprod_{j\in J} A_j \mid f(j) \in A_j \right\}.$$

In questo contesto, la definizione di prodotto include il caso in cui $J = \varnothing$, per il quale si ha

$$\prod_{j\in\varnothing} A_j = \left\{ f\colon \varnothing \to \coprod_{j\in J} A_j \right\} = \{\varnothing\}\,.$$

Ne segue che il prodotto vuoto è l'insieme con unico elemento la mappa vuota e dunque un oggetto terminale, o $\mathbf{1}$, della categoria Set.

Possiamo rileggere in questo contesto anche la proprietà di assorbenza dello zero. Infatti, scegliendo $J \neq \varnothing$ ed $A_j = \varnothing$ per qualche $j \in J$ nella definizione precedente, si ha

$$\prod_{j\in J} A_j = \varnothing$$

poichè non esiste alcuna mappa di insiemi che abbia come dominio J e come codominio l'insieme vuoto. D'altra parte, se in questo caso anche J fosse vuoto, si avrebbe allora

$$\prod_{j\in\varnothing} A_j = \{\varnothing\}$$

poichè esiste unica la mappa di insiemi di dominio e codominio vuoti, cioè la mappa vuota. Quest'ultimo esempio corrisponde, nel contesto dei numeri interi, all'operazione di elevamento a potenza 0^0, cui si attribuisce convenzionalmente il valore 1.

Si noti da un lato come le precedenti osservazioni motivino la scelta di indicare gli oggetti iniziali con $\mathbf{0}$, quelli terminali con $\mathbf{1}$. Dall'altro, le definizioni date sono tali per cui le proprietà della somma e del prodotto vuoti discendono direttamente da esse.

Come ultimo esempio, consideriamo ora la categoria degli anelli non unitari Rng, i cui oggetti sono gli anelli non unitari ed i cui morfismi sono gli omomorfismi di anelli. Indichiamo con $\{\mathbf{0}\}$ l'*anello banale*, costituito dal solo elemento $\mathbf{0}$. In modo analogo a quanto detto per Set, detto *morfismo nullo* l'unico omomorfismo di anelli con dominio assegnato che assume identicamente il valore $\mathbf{0}$ nell'anello codominio, l'anello banale è, mediante il morfismo nullo, l'oggetto zero della categoria Rng.

Tuttavia, quando ci limitiamo a considerare la sottocategoria Ring degli anelli con unità (ai cui oggetti si richiede di essere anelli con unità, $\mathbf{1}$, non necessariamente distinta da $\mathbf{0}$ e ai cui morfismi si richiede di preservare $\mathbf{1}$), la situazione è differente. L'oggetto iniziale di questa categoria è infatti l'anello degli interi $\mathbb{Z}$, mentre l'anello banale è soltanto oggetto terminale, sempre attraverso il morfismo nullo.

3 Difficoltà legate all'uso e all'apprendimento dello zero alla luce della sua evoluzione storica

Ripercorrere l'evoluzione storica di nozioni matematiche può essere utile per capire alcune difficoltà che gli studenti incontreranno nell'appropriarsi della nozione stessa, come affermava Kline nel 1970, parlando, in particolare, della nascita del concetto di numero negativo:

> *There is not much doubt that the difficulties the great mathematicians encountered are precisely the stumbling blocks that the students experience and that no attempts to smoothen these difficulties with logical verbiage will succeed. If it took mathematicians 1000 years from the time that first class mathematics appeared to arrive at the concept of negative numbers, and it did, and if it took another 1000 years for mathematicians to accept negative numbers, as it did, we may be sure that students will have difficulties with negative numbers. Moreover, the students will have to master these difficulties in about the same way that the mathematicians did, by gradually accustoming themselves to the new concepts, by working with them and by taking advantage of all the intuitive support that the teacher can master [24], p. 270.*
>
> M. Kline (1908 – 1992)

L'apprendimento dello zero in età prescolare

In questa sezione conclusiva, vogliamo sottolineare alcune delle prime difficoltà che gli studenti molto giovani (ma a volte anche quelli meno giovani) incontrano nell'apprendimento dello zero, mettendo in relazione queste difficoltà con tappe dell'evoluzione storica della nozione. Ci concentreremo sulle *prime* difficoltà che i bambini incontrano, già a partire dai tre anni, ma soprattutto nei primi anni di scuola primaria. Ovviamente a queste difficoltà possono sommarsene altre legate ai significati e alle proprietà dello zero che si incontrano nei successivi livelli scolari.

Innanzitutto, gli studi di carattere cognitivo concordano sul fatto che, mentre imparare la sequenza di numeri da 1 a 9 sia in generale poco problematico, l'apprendimento dello zero sembra essere più difficoltoso[25, 26]. Considerando lo sviluppo storico della nozione, si può notare come i primi usi di segni (o spazi vuoti) in qualche modo associabili allo zero attuale riguardassero la rappresentazione di nessuna quantità o la mancanza di quantità, come i segni sviluppati nel sistema numerico assiro-babilonese e poi nel sistema greco di età post-ellenistica. Anche per bambini di tre o quattro anni questo sembra essere il principale significato associato a 'zero'. A questa età i bambini tendono a indicare la mancanza di elementi come un pugno chiuso (o entrambi i pugni chiusi), usando espressioni verbali del tipo: «Non ce ne sono», o, alcuni, magari con qualche incertezza in più: «Ce ne sono zero». Tuttavia, associare il segno '0' a tale significato sembra richiedere tempi più lunghi rispetto a quelli legati ai segni convenzionali associati a quantità non nulle. A tre o quattro anni i bambini molto più difficilmente usano il segno '0' per indicare la mancanza di oggetti, pur essendo circondati dal segno (almeno nella cultura occidentale), tanto quanto dagli altri nove segni che rappresentano le cifre, su cellulari, etichette al supermercato, calendari, quadranti di orologi digitali, ascensori, termometri, ecc.. Ad esempio, in uno studio di Ewers-Rogers e Cowan [27], bambini di tre e quattro anni dovevano annotare quantità di mattoncini in scatoline di latta. Lo studio voleva investigare quali fossero le notazioni usate dai bambini a questa età come strumenti comunicativi-referenziali. I risultati furono molto simili a quelli di altri studi aventi il medesimo obiettivo: i bambini usano diverse notazioni, per lo più analogiche; alcuni usano, anche correttamente, i simboli convenzionali, ma tra questi pochissimi usano '0' per indicare la situazione di mancanza di mattoncini in una scatola. A questa età i bambini preferiscono usare espressioni verbali usando la parola '*niente*'. Secondo L. Tolchinsky [28] il segno grafico 0 non è una notazione abbastanza esplicita per molti bambini per indicare la mancanza di oggetti. Ricordiamo come anche nello sviluppo storico del concetto, vi siano state interpretazioni per cui zero non designava alcun numero, come per Jacopo da Firenze. Dunque, è possibile che lo zero non sia concepito come numero durante queste prime fasi dell'apprendimento, a differenza, per esempio, di uno o due. Questa interpretazione è coerente con la resistenza iniziale ad usare il segno 0 per indicare l'assenza di una quantità.

> [...] *zero è l'ultima cifra che è venuta in mente all'uomo. E non è tanto strano, perché lo zero è il numero più raffinato di tutti.*
>
> H. M. Enzensberger, *Il Mago Dei Numeri* [29].

In effetti, anche storicamente, trovare modi per indicare l'assenza di quantità è stato utile nel momento in cui serviva indicare una posizione vuota nella scrittura posizionale, facendo quindi cambiare significato ai segni circostanti, per eliminare scritture ambigue. Questa esigenza non è sentita da un bambino che gestisce solo quantità piccole.

Nei primi anni di scuola primaria, si riscontrano altre difficoltà con l'uso del segno 0, questa volta legate alla lettura di numeri a più cifre, contenenti il segno 0 per indicare posizioni vuote. Infatti, usato in questo modo, come segnaposto, lo zero è, a differenza delle altre cifre, "*muto*". In molte lingue, come l'italiano (la lettura di '203' non contiene la parola 'zero'), esso gioca comunque un ruolo importante cambiando la lettura (e il significato) delle altre cifre. In lingue come il Taiwanese, in cui si leggono anche gli zeri nei numeri a più cifre, pare che i bambini commettano molti meno errori nella lettura di numeri a tre o a quattro cifre rispetto ai bambini inglesi. È interessante notare che la *trasparenza* di una lingua rispetto alla notazione posizionale decimale in generale favorisca processi di traduzione dal linguaggio verbale alla notazione simbolica e viceversa [30] [28].

Negli adulti si ritrovano ancora tracce della complessità cognitiva legata al segno 0: alcuni studi mostrano che solo per leggere 0 all'interno di numeri sono richiesti negli adulti tempi eccezionalmente lunghi rispetto a quelli richiesti per leggere numeri senza la cifra 0 [31]. Tempi eccezionalmente lunghi si riscontrano anche nella scrittura di numeri a più cifre contenti 0 come cifra. I bambini commettono più frequentemente errori nella scrittura dei numeri che hanno 0 tra le loro cifre; inoltre, quando devono scrivere 0 i bambini spesso eseguono movimenti differenti rispetto a quando scrivono le altre cifre [32].

Le difficoltà più significative nella gestione del segno 0 riguardano il suo uso nella notazione posizionale e, in particolare, l'interiorizzazione del fatto che il valore di una cifra cambia in base alla posizione che occupa all'interno di un numero. Anche in pazienti con lesioni cerebrali, lo zero è oggetto di errori selettivi rispetto al ruolo sintattico o lessicale che assume nel numero [33]. Nella nostra discussione storica, abbiamo visto tornare più volte, e in diverse parti del mondo, l'accostamento del riferimento a 'niente' o 'quantità nulla' con il riferimento alla possibile alterazione del significato di altre cifre. Alla luce di quanto detto da Kline, tali difficoltà non devono stupire.

La linea dei numeri Finora abbiamo discusso le prime principali difficoltà con l'uso del segno 0 in relazione al significato di mancanza e in relazione al significato di segnaposto nella notazione posizionale. Concludiamo questa trattazione con un terzo significato dello zero, che si lega anche al suo ruolo nel calcolo aritmetico: zero come punto di partenza nell'allineamento dei numeri (naturali). È interessante notare che questo significato è comparso per la prima volta nel sistema numerico utilizzato dai Maya, senza prendere piede in altre culture dove, invece, lo sviluppo del concetto e di segni ad esso associato è passato per gli altri due significati discussi e per la necessità di eseguire calcoli, come in Fibonacci.

A livello cognitivo, la linea dei numeri sembra corrispondere ad una rappresentazione intuitiva e ad una traduzione naturale della sequenza in una dimensione spaziale [34, 35]. Il modello della linea dei numeri trova conferma in vari effetti comportamentali come l'effetto SNARC (*Spatial Numerical Association of Response Codes*) usato per documentare l'effetto dello spazio sulla rappresentazione dei numeri [36]. Il modello mentale della linea dei numeri costituisce al tempo stesso una forma più astratta di rappresentazione rispetto al conteggio degli oggetti, in quanto avvia la possibilità di contare qualsiasi elemento. Sembra che la rappresentazione della linea dei numeri evolva con lo sviluppo cognitivo dell'individuo, anche in seguito alle influenze culturali [37], e che quindi un'appropriata esposizione porti ad una migliore rappresentazione e conseguente elaborazione numerica.

Una buona rappresentazione mentale della linea dei numeri consente un accesso rapido ed efficace alle informazioni numeriche necessarie per moltissimi compiti sia numerici che aritmetici. Alcune ricerche [38, 39] suggeriscono che l'uso della linea numerica visiva, come rappresentazione esterna di supporto, favorisce la manipolazione di quantità e l'acquisizione e costruzione di concetti e procedure matematiche più avanzate. Tuttavia, è noto che fornire modelli fisici di linee dei numeri contenti la tacca dello 0 può provocare errori legati al conteggio delle tacche: invece che contare i segmenti, magari considerandone l'estremo destro (la tacca che lo segna), alcuni bambini continuano a contare le tacche, inclusa la prima, cioè quella dello 0, dicendo «uno». Quindi vi è uno sfasamento tra i numeri pronunciati durante il processo di conteggio (o di calcolo) e la posizione corretta di tali numeri sulla linea. Per gestire correttamente rappresentazioni della linea dei numeri, che eventualmente diventeranno rappresentazioni della retta reale, sembra utile passare per l'idea di zero come 'punto di partenza'. Nell'uso di modelli fisici della linea dei numeri, questo significato può essere costruito usando delle pedine, la cui posizione di partenza è la tacca dello 0 [40].

Ci è parso interessante mettere in relazione i risultati discussi di studi in ambito cognitivo sulle difficoltà legate alla gestione dello zero con aspetti dello sviluppo storico del concetto e di segni ad esso associati. Tali risultati sembrano essere assolutamente coerenti con quanto affermato da Kline, e dovrebbero essere presi in considerazione da qualunque maestro (o guida didattica[34]) per costruire e rendere più fondato e solido il suo 'supporto intuitivo' ('*intuitive support*') da fornire ai giovani allievi che si affacciano alla nozione di zero.

Riferimenti bibliografici

[1] C. Seife: *Zero – The Biography of a Dangerous Idea.* Penguin Books, Londra (2000).

[2] L. Fibonacci: *Il Liber abbaci di Leonardo Pisano pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano C. 1, 2616, Badia Fiorentina, n. 73 da Baldassarre Boncompagni, socio ordinario dell'Accademia pontificia de' nuovi Lincei.* Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Roma (1857). http://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-34354.

[3] Sir M. Monier-Williams: *A Sanskṛit–English dictionary etymologically and philologically arranged with special reference to Greek, Latin, Gothic, German, Anglo-Saxon, and other cognate Indo-European languages.* The Clarendon Press, 2nd edition, Oxford (1899). http://www.sanskrit-lexicon.uni-koeln.de/scans/MWScan/2014/web/index.php.

[4] H. Diels, W. Kranz: *Die Fragmente der Vorsokratiker.* Weidmannsche Buchhandlung, Berlin (1903). https://archive.org/details/diefragmenteder00krangoog.

[5] Euclide di Megara: *Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrità ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano. Secondo le due tradottioni. Con vna ampla espositione dello istesso tradottore di nuouo aggiunta.* C. Trojano, Venezia (1565). http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k61831x.r=Euclide?rk=236052;4.

[34] Per esempio, durante il progetto PerContare è stata sviluppata una guida didattica per la classe prima primaria che tiene conto di tali difficoltà legate alla nozione di zero (v. [40, 41]).

[6] S. Chrisomalis: *Numerical Notation – A comparative History.* Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[7] C. B. Boyer *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, New York (1991).

[8] C. Tolomeo: *Claudii Ptolomaei opera quae exstant omnia – edidit J. L. Heiberg, Professor Hauniensis.* B. G. Teubner, Lipsia (1898).

[9] H. T. Colebrooke: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara.* John Murray, London (1817). https://archive.org/details/algebrawitharith00brahuoft.

[10] Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī : *The Algebra of Mohammed ben Musa – edited aooknd translated by Frederic Rosen.* J. L. Cox, London (1831).

[11] N. Ambrosetti: *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell'Europa medievale.* LED Edizioni Universitarie, Milano (2008).

[12] Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg, consultato in data 14 Ottobre 2017.

[13] G. Gaetano: *Dell'origine delle parole zero e cifra.* Società Anonima Cooperativa Tipografica, Napoli (1903).

[14] J. Høyrup Jacobus de Florentia, Tractatus algorismi (1307), the chapter on algebra (Vat. Lat. 4826, fols 36^v–45^v), Centaurus, 2000.

[15] B. Swami, A. N. Singh: *History of Hindu mathematics: a source book.* Asia Publishing House, Seul (1962).

[16] A. Blume: *Maya Concepts of Zero*, Proc. Am. Phil. Soc., **155(1)** (2011) 51–88.

[17] G. H. F. Nesselmann: *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra.* G. Reimer ed., Berlin (1842).

[18] E. Bortolotti: *L'algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI*, Periodico di Matematiche, **5(3)** (1925) 147–192.

[19] Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:East_side_of_stela_C,_Quirigua.PNG, consultato in data 14 Ottobre 2017.

[20] V. Subandhu: *A Sanskrit romance by Subandhu – translated, with an introduction and notes, by Louis H. Gray, Ph.D..* Columbia University Press, New York (1913). https://archive.org/details/vasavadattasansk00suba.

[21] J. H. Conway, R. K. Guy: *The book of numbers.* Springer-Verlag, New York (1996).

[22] G. Peano: *Aritmetices Principia – nova methodo exposita.* F.lli Bocca, Roma, Firenze (1889). https://archive.org/details/arithmeticespri00peangoog.

[23] J. von Neumann: *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum, **1** (1923) 199–208.

[24] M. Kline: *Logic versus Pedagogy*, The American

Mathematical Monthly, **77(3)** (1970) 264–281.
[25] M. Hughes: *Children and number: Difficulties in learning.* Wiley–Blackwell, New York (1986).
[26] H. M. Wellman, K. F. Miller: *Thinking about nothing: Development of concepts of zero,* British Journal of Developmental Psychology, **4** (1986) 31–42.
[27] J. Ewers-Rogers, R. Cowan: *Children as apprentices to number,* Early childhood development and care, **125(15)** (1996) 15–17.
[28] L. Tolchinsky: *The Cradle of Culture and What Children Know About Writing and Numbers Before Being Taught.* Developing Mind Series, Psychology Press (2003).
[29] H. M. Enzensberger: *Il mago dei numeri.* Giulio Einaudi Editore, Torino (1997).
[30] S. Dehaene: *The number sense.* Oxford University Press, Oxford (1997).
[31] M. Brysbaert: *Arabic number reading: On the nature of the numerical scale and the origin of phonological reading,* Journal of Experimental Psychology: General, **124** (1995) 343–447.
[32] A. Lochy, A. Pillon, P. Zesiger, X. Seron: *Verbal structure of numerals and digits in handwriting: New evidence from kinematics,* The Quarterly Journal of Experimental Psychology, **55A** (2002) 263–288.
[33] A. Granà, A. Lochy, L. Girelli, X. Seron, C. Semenza: *Transcoding zero within complex numerals,* Neuropsychologia, **41(12)** (2003) 1611–1618.
[34] P. Pinel, M. Piazza, D. Le Bihan, S. Dehaene: *Distributed and overlapping cerebral representation of number, size, and luminance during comparative judgments,* Neuron, **41(6)** (2004) 983–993.
[35] X. Seron, M. Pesenti, Mauro, M-P. Noël, G. Deloche, J-A. Cornet: *Images of numbers or "When 98 is upper left and 6 sky blue",* Cognition, **44** (1992) 159–196.
[36] S. Dehaene, S. Bossini, P. Giraux: *The mental representation of parity and numerical magnitude,* Journal of Experimental Psychology: General, **122** (1993) 371–396.
[37] M. Zorzi, K. Priftis, C. Umiltà: *Neglect disrupts the mental number line,* Nature, **417** (2002) 138–139.
[38] S. Dehaene: *Subtracting Pigeons: Logarithmic or Linear?,* Psychological Science, **12** (2001) 244–246.
[39] Y. Okamoto, Yukari, R. Case: *The Role of Central Conceptual Structures in the Developments of Children's Thought, volume 1-2, Monographs of the Society for Research in Child Development.* Blackwell, Malden (1996).
[40] A. Baccaglini-Frank: *Trattamento dello zero nel Progetto PerContare,* L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, **37A(3)** (2014) 257–282.
[41] A. Baccaglini-Frank, M. G. Bartolini Bussi: *Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: Il progetto PerContare,* Form@re, **15(3)** (2016) 170–184.

Lorenzo Dello Schiavo: è dottorando in analisi stocastica presso l'Università di Bonn, Germania. I suoi interessi di ricerca riguardano principalmente gli spazi metrici di misura e la dinamica stocastica di sistemi a infinite particelle.

Anna Baccaglini-Frank: è ricercatrice in Didattica della Matematica presso l'Università di Pisa. I suoi interessi di ricerca riguardano l'apprendimento della matematica in ambienti digitali e difficoltà d'apprendimento di natura cognitiva. È autrice di numerosi articoli scientifici e di testi di supporto alla didattica, tra cui il recentissimo *Didattica della Matematica*, scritto insieme a Pietro Di Martino, Roberto Natalini e Giuseppe Rosolini, e la rubrica '*Strane Storie Matematiche*', che tiene insieme a Pietro Di Martino per la rivista *Archimede*.