Matematica strumentale vs matematica relazionale: il caso del principio d'induzione

Sommario

Le ultime Indicazioni Nazionali per i Licei richiedono come obiettivo di apprendimento in matematica il "dominio attivo" del principio d'induzione. Tale obiettivo sembra in linea con un approccio alla matematica che richieda di più della mera applicazione di tecniche. Proprio il principio d'induzione ed il suo apprendimento sembra essere un esempio paradigmatico della differenza tra un approccio strumentale e uno relazionale alla matematica. Le difficoltà legate a una comprensione profonda del principio saranno discusse anche in relazione a specifiche esperienze universitarie.

Abstract

The latest Italian Standards recognize the mastery of the principle of mathematical induction as a fundamental goal of the mathematical secondary education. This goal seems to be in line with a relational approach to mathematics, that is an approach that goes beyond mere application of techniques. The principle of mathematical induction is paradigmatic to illustrate the difference between an instrumental and a relational approach to mathematics. The difficulties associated with a deep understanding of the principle will be discussed in relation to specific university experiences.

Pietro Di Martino

Matematica strumentale vs matematica relazionale: Il caso del principio d'induzione

Pietro Di Martino
Dipartimento di Matematica – Università di Pisa

Il principio d'induzione come obiettivo educativo

Per molti anni, il principio d'induzione non ha avuto spazio (o ne ha avuto in misura molto marginale) nell'insegnamento secondario. Ancora all'inizio di questo millennio, Villani (2003, p. 197) sottolineava come: "*l'insegnamento secondario ignora le dimostrazioni per induzione o quanto meno le confina in ruoli estremamente marginali*". Succedeva così (e forse succede ancora adesso nonostante i cambiamenti di cui parliamo sotto) che molti studenti incontravano in maniera esplicita il principio d'induzione solo se iscritti a Matematica, nel primo corso di aritmetica.
D'altra parte, come sottolinea lo stesso Villani, il principio d'induzione da sempre entra in maniera implicita (e insidiosa) in molte lezioni di matematica di scuola secondaria dietro ad un "e così via", o ai puntini di sospensione usati in molte notazioni.
Hanno costituito dunque una svolta significativa – almeno dal punto di vista formale – le Indicazioni Nazionali per i Licei (MIUR, 2010) che, nelle linee generali e competenze per la matematica di tutti i licei (artistico, classico, linguistico, musicale e coreutico, scientifico e delle scienze umane), richiedono che lo studente in uscita sappia "*dominare attivamente*" otto aspetti. In particolare, l'ottavo punto è declinato come segue: "*Una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ('invarianza delle leggi del pensiero'), della sua diversità con l'induzione fisica ('invarianza delle leggi dei fenomeni') e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico*".

Tale formulazione ha suscitato diverse perplessità interpretative, per le quali rimando al contributo di Luigi Tomasi (2012), qui mi limito a evidenziare come le parole dedicate al principio di induzione, ed in particolare la richiesta di andare oltre la mera applicazione del principio ("dominare attivamente", "applicare, avendo inoltre un'idea chiara"), richiamano alla mente un datato, ma sempre molto interessante, lavoro di Richard Skemp (1976). In tale contributo, Skemp – analizzando le pratiche educative a livello di scuola secondaria – discute i molteplici significati che sono dati al verbo 'capire' in contesto educativo matematico. In particolare, Skemp introduce la dicotomia tra un capire strumentale e un capire relazionale in matematica: "*Con il primo termine* [capire relazionale] *indico ciò che ho sempre considerato come understanding: conoscere cosa fare e perché. Instrumental understanding […] è ciò che in passato ho definito come 'regole senza ragioni', senza realizzare che per molti insegnanti e studenti il possesso di queste regole, e l'abilità nell'usarle, è proprio cosa loro intendono per understanding*" (Skemp, 1976, p. 21).
Le richieste delle Indicazioni Nazionali che abbiamo riportato fanno riferimento esplicito a una conoscenza del principio d'induzione che vada oltre l'aspetto procedurale (minore o maggiore capacità di usare il principio d'induzione come strumento dimostrativo), ponendo dunque un obiettivo di tipo relazionale che include anche questioni culturali, storiche e filosofiche. Come sottolinea Tomasi (2012), tali richieste appaiono molto ambiziose a livello di scuola secondaria di secondo grado, anche per le difficoltà epistemologiche specifiche del principio stesso. A tal proposito, Villani (2003) identifica diversi ordini di complessità nella trattazione del principio d'induzione (oltre alle eventuali difficoltà tecniche nel portare avanti determinati passaggi) tra i quali: la distinzione tra il ragionamento induttivo (non deduttivo) per elaborare congetture e la struttura logica della dimostrazione per induzione e la complessità *linguistica* del principio d'induzione.

In questo contributo discuterò di queste difficoltà, sulla base dei diversi contributi della ricerca didattica e alla luce di risultati di mie sperimentazioni a livello universitario.

L'induzione matematica e il metodo induttivo sperimentale

Le Indicazioni Nazionali, nel pezzo riportato nell'introduzione, fanno riferimento alla differenza tra il principio d'induzione matematica e il metodo induttivo sperimentale, ovvero il processo di ricavare una conclusione generale dall'osservazione di alcuni casi particolari.

Riflettere su questa differenza è significativo dal punto di vista epistemologico, storico, culturale e anche didattico.

Dal punto di vista storico-epistemologico proporre le *tracce* del principio d'induzione nella storia della matematica è non solo possibile a livello di scuola secondaria, ma anche auspicabile per mostrare la matematica come prodotto culturale dell'uomo, le cui idee si sviluppano ed evolvono nel tempo fino alla loro eventuale sistemazione definitiva. In questo senso l'induzione matematica può fungere da vero e proprio esempio paradigmatico.

D'altra parte, come sottolinea Cajori (1918), la conoscenza dello sviluppo dell'idea fino alla sua formulazione rigorosa permette di capirne anche le relazioni e le differenze con il metodo induttivo delle scienze sperimentali.

Come sottolineano diversi studiosi (Bussey, 1917), la mirabile dimostrazione dell'infinità dei numeri primi di Euclide (Proposizione 20 del Libro IX degli Elementi), in un certo senso, fa intravedere il germe dell'induzione. Come è noto, la proposizione – il cui enunciato (*I numeri primi sono più di ogni assegnata moltitudine di numeri primi*) fornisce lo spunto anche per una eventuale discussione sull'evoluzione del concetto di infinito in matematica – è dimostrata partendo da tre numeri primi A, B, C e mostrando che $A \cdot B \cdot C+1$ è primo o ha un fattore proprio primo D diverso da A, B e C.

Il ragionamento euclideo, come sappiamo, può essere facilmente generalizzato per provare l'esistenza di $n+1$ primi a partire da n

primi dati. Il confronto tra la dimostrazione euclidea e quella, rivista in chiave moderna, della Proposizione 20 potrebbe a sua volta offrire lo spunto per evidenziare in classe la potenza del linguaggio algebrico per la generalizzazione.
Gli ulteriori spunti storici trattabili a livello di scuola secondaria superiore possono essere diversi, tra questi due sembrano particolarmente interessanti dal punto di vista storico-epistemologico.
Il primo è l'uso che Fermat (1607-1665) fa di quello che verrà chiamato principio della discesa infinita[1].
In particolare, Fermat dimostra la seguente proposizione: *L'area di un triangolo rettangolo i cui lati sono numeri razionali non può essere un numero quadrato*. La proposizione – che tra le altre cose permette di dimostrare il caso $n=4$ dell'ultimo teorema di Fermat e ridurre il suo enunciato agli esponenti primi dispari – può essere riletta in chiave aritmetica come: non esistono soluzioni intere non nulle di $x^2+y^2=z^2$ con $x \cdot y$ uguale al doppio di un quadrato. Per dimostrarla, Fermat considera numeri interi positivi e mostra che se esistesse una terna (x_1,y_1,z_1) soluzione dell'equazione e con le proprietà richieste, allora esisterebbe una terna (x_2,y_2,z_2) con le stesse caratteristiche e con $z_2<z_1$. Fermat conclude sottolineando come tale ragionamento iterato indefinitamente porterebbe a una successione infinita di numeri interi positivi sempre più piccoli, cosa che lui sottolinea essere *evidentemente* impossibile. Tale spunto storico può offrire l'occasione per una riflessione sulla relazione tra principio di induzione e principio della discesa infinita (e a livello universitario, del significato di buon ordinamento).
Il secondo spunto storico è relativo a quello che si ritiene essere la prima applicazione esplicita del principio d'induzione ad opera di Pascal.

---

[1] Lolli (2008) osserva come sia piuttosto singolare dare al principio il nome di ciò che il principio afferma non poterci essere, e nei suoi scritti rinomina il principio: principio della discesa finita.

Il matematico francese, in un libretto sulle proprietà del triangolo aritmetico (Pascal, 1655), dimostra il seguente risultato: *In ogni triangolo aritmetico, se due celle sono adiacenti nella stessa riga, il valore della cella a sinistra sta al valore di quella a destra come il numero di celle a sinistra della divisione tra le due sta al numero di celle a destra*. A prescindere dalla scarsa rilevanza del risultato matematico in sé, è interessante la dimostrazione proposta da Pascal: "*Sebbene questa proposizione abbia un numero infinito di casi, io darò una dimostrazione piuttosto corta, assumendo due lemmi. Lemma 1 (che è evidente): la proposizione è vera nella seconda riga. Lemma 2: se la proposizione è vera in una riga qualsiasi, allora lo sarà in quella successiva. Da questo seguirà che la proposizione è necessariamente vera per tutte le righe: nella seconda per il primo lemma, quindi nella terza per il secondo lemma, quindi nella quarta e così fino all'infinito. È dunque necessario soltanto provare il secondo lemma*".
Dopo Pascal l'induzione matematica diventa un metodo standard di dimostrazione tra i matematici, ma perché si arrivi al nome "induzione matematica" si dovrà attendere circa altri 200 anni (Ernst, 1982). De Morgan lo conia nel 1838 (De Morgan, 1838) in un articolo intitolato proprio "Induction (Mathematics)", introducendo l'induzione matematica come metodo dimostrativo di congetture nate da generalizzazione induttiva. : "*Il metodo di induzione, nel senso con il quale è usato in filosofia, non è proprio della matematica pura [...] C'è comunque un metodo particolare di procedere che è estremamente comune nel ragionamento matematico e al quale noi proponiamo di dare il nome di induzione successiva [...] Sostituendo la dimostrazione all'osservazione, il processo matematico ha comunque un'analogia con quello sperimentale: questa, secondo noi, è una giustificazione sufficiente per dargli il nome di 'induzione successiva'*."
D'altra parte, come sottolinea Polya (1954), anche nel contesto classe, la dimostrazione per induzione dovrebbe essere utilizzata per verificare certi tipi di congetture sviluppate a seguito

dell'osservazione di un numero finito di casi (Polya definisce quelli che chiama argomenti plausibili, tra i quali annovera anche quello induttivo).
Questo è vero anche nella storia della matematica, Wallis (1656) parli di "modum inductionis" per definire il metodo che lo porta a congetturare:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{(n+1)\cdot n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Il metodo di Wallis si basa sullo studio delle somme a primo membro per *n* che varia tra 1 e 6 e, in particolare, sull'osservazione che tali somme sono sempre maggiori di un terzo, con l'eccedenza che decresce costantemente al crescere di *n*. Wallis (1685) tornando su questa e altre uguaglianze inferite generalizzando l'osservazione di un numero finito di casi, parla esplicitamente di dimostrazioni tramite induzione, metodo che definisce "ovvio e facile, dove le cose procedono in un ordine chiaro, regolare e molto soddisfacente".
Bernoulli (1686) esplicita le proprie perplessità sul metodo utilizzato da Wallis e, riconsidera i problemi trattati da Wallis cercando di mostrare la validità generale del passaggio dal caso *n* al caso *n+1*, non limitandosi quindi ad un numero finito di casi e nemmeno alla dimostrazione di uno specifico caso. Nonostante il suo approccio non sia molto lontano da una dimostrazione per induzione, Bernoulli non nominalizza il suo metodo. Così, fino a De Morgan, il termine 'induzione' verrà utilizzato anche in matematica con il significato ora utilizzato per il metodo induttivo delle scienze sperimentali. In questo senso esplicativa è la voce 'Induzione (termine di matematica)' nella traduzione italiana del dizionario enciclopedico delle matematiche di Bossut e Lalande (1800), esemplificata attraverso la dimostrazione della formula binomiale: "*Quello che senza conoscere la maniera esatta, e generale di dimostrare questa formula la concludesse per averla*

verificata nel caso m=1; m=2; m=3, etc. giudicherebbe per induzione. Non conviene dunque servirsi di questo metodo che in mancanza di uno più esatto".

Seppur si riconoscano elementi di criticità, ancora all'inizio del 1800, in mancanza di meglio, si accetta in matematica l'argomentazione induttiva. Come ricordato, sarà De Morgan nel 1938 ad usare il termine "induzione matematica" per indicare il passaggio bernoulliano dal generico caso n a $n+1$ ed in qualche modo a sottolineare la relazione esistente, almeno in termini di origine storica, tra il principio matematico e il metodo induttivo di generalizzazione a partire da un numero finito di casi.

Circa 50 anni dopo (e più di 2000 anni dopo la dimostrazione dell'infinità dei primi proposta da Euclide) Peano (1889), in un libro di testo per il Liceo, propone la seguente formalizzazione del principio di induzione:

> Sia A un insieme di numeri naturali.
> Se:
> 1. $1 \in A$[2]
> 2. Per ogni numero naturale n, se $n \in A$ allora anche $s(n) \in A$
>
> Allora $A = \mathbb{N}$ (con $s(n)$ si indica il successore di n).

Da notare come, in uno dei primi manuali *moderni* di scuola secondaria di secondo grado in cui si tratta il metodo dimostrativo per induzione (Prodi & Magenes, 1982), gli autori fanno la scelta di usare il termine "metodo dimostrativo per ricorrenza", esplicitando la volontà di marcare più chiaramente la distinzione tra approccio matematico e generalizzazione induttiva.

[2] Ovviamente la scelta del primo numero naturale è puramente convenzionale.

Il principio d'induzione: riflessioni sulle difficoltà

Come abbiamo accennato all'inizio, il principio d'induzione è poco insegnato a livello di scuola superiore, ma laddove è proposto (e anche a livello universitario, in contesti *privilegiati* come i corsi di laurea in Matematica) emergono diverse difficoltà nella comprensione del principio come strumento dimostrativo[3].

Sia n_0 un numero naturale e sia $P(n)$ una proposizione che abbia senso per ogni $n \geq n_0$. Se sono verificate le due proprietà seguenti: I) $P(n_0)$ è vera II) Per ogni $n \geq n_0$, se $P(n)$ è vera allora anche $P(n+1)$ è vera Allora $P(n)$ è vera per ogni n.

In particolare due appaiono le principali difficoltà:

1. difficoltà nel condividere con gli studenti la necessità (il senso) di dimostrare per induzione una *congettura induttiva*, ovvero una congettura emersa dall'osservazione di un numero finito di casi. Tale obiettivo di condivisione appare forse tra i più significativi (al di là del riuscire ad imporre agli studenti di procedere con una dimostrazione generale) perché legato all'obiettivo più generale, e a mio avviso cruciale, di lavorare alla costruzione di una cultura della dimostrazione in classe;
2. difficoltà nella comprensione del "come" funziona il principio d'induzione e di conseguenza nella sua applicazione.

D'altra parte, l'obiettivo indicato nelle Indicazioni Nazionali dal quale siamo partiti, sembra non *accontentarsi* del superamento di queste due difficoltà, chiedendo la comprensione del principio

[3] Non parliamo qui del principio d'induzione come *strumento per definire*: infatti, seppur a livello di scuola secondaria di secondo grado si introducano diverse definizioni ricorsive (o induttive) sui naturali, il teorema di ricorsione (numerabile) che assicura la *bontà* delle definizioni introdotte è particolarmente complesso.

d’induzione al di là della capacità nel saperlo applicare più o meno abilmente e meccanicamente. Come vedremo questo comporta un terzo livello di difficoltà spesso non completamente risolto nemmeno a livello universitario.
La prima difficoltà, è una difficoltà legata a un obiettivo fondamentale dell’educazione matematica: la costruzione di una cultura della dimostrazione, in particolare, la condivisione con gli studenti del senso del dimostrare in matematica. Le difficoltà didattiche relative a tale condivisione, unite alle difficoltà specifiche della comprensione di una dimostrazione nei suoi passaggi non solo tecnici, ma logici, sono state uno dei motivi per il ridimensionamento diffuso dell’approccio alla dimostrazione nella scuola secondaria in molti Paesi alla fine dello scorso millennio.
Si è assistito a un fenomeno preoccupante dal punto di vista delle politiche educative (e che tanti danni ha fatto e continua a fare relativamente all’insegnamento della matematica), purtroppo non raro: la fuga dalle difficoltà in termini di obiettivi e scelte educative. In questo caso la fuga dalle dimostrazioni in matematica a tutti i livelli scolari.
Eclatante in questo senso l’esempio della scuola americana, nella quale si è registrato il fenomeno che Wu (1996) definisce di proof-abuse: ovvero di non distinzione tra argomenti plausibili (e spesso euristici) e dimostrazioni formali. Wu analizza alcuni libri di testo segnalando l’assenza completa di vere dimostrazioni, stupendosi in particolare di tale assenza nei manuali di 600 pagine di geometria euclidea. In questo contesto, Thurston (1994) scrive un articolo in cui spiega il ruolo della dimostrazione nel progresso matematico e anche – ciò che è più importante dal punto di vista educativo – il ruolo della dimostrazione per la comprensione.
In questo scenario, nel contesto italiano voci diverse hanno sottolineato l’importanza culturale, epistemologica e didattica di educare alla dimostrazione nella scuola secondaria (Boero, Garuti & Lemut, 2007; Lolli, 2005. Bagni & Menghini, 2005 discutono in particolare del caso della dimostrazione per induzione).

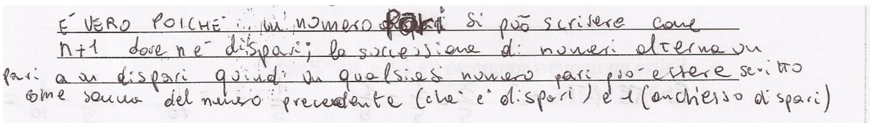
Nonostante ciò, è indubbio che anche in Italia, in molti contesti – anche quelli in cui, per diversi motivi, la cultura della dimostrazione dovrebbe avere un peso, come il Liceo Classico e Scientifico – sia stata fortemente ridimensionata la presentazione della matematica nella sua forma teorica-deduttiva: ad esempio sempre meno spazio è dato a una trattazione rigorosa della geometria euclidea. D'altra parte, anche a livello universitario, è un fenomeno ormai diffuso (più o meno ufficializzato) quello della scomparsa delle dimostrazioni in molti corsi di matematica, cosiddetti "di servizio" (ovvero i corsi del primo anno nei Corsi di Laurea non a matematica forte).
Queste scelte sono sicuramente molto discutibili dal punto di vista didattico, culturale ed epistemologico. Se Lolli (2005) identifica e descrive 39 possibili funzioni di una dimostrazione matematica, Mariotti (1998) evidenzia due questioni in particolare per la motivazione a produrre una dimostrazione in classe: *un certo fatto matematico è vero?* e *Perché un certo fatto e vero?,* sottolineando come, quando non ci siano dubbi sulla risposta alla prima domanda, ovvero sulla verità del fatto matematico, la motivazione di uno studente alla dimostrazione non sia affatto spontanea.
Questa osservazione evidenzia la criticità di motivare alla dimostrazione nei casi in cui di solito entra in gioco il principio d'induzione. Tipicamente, infatti, lo studente costruisce una congettura (o deve verificare una congettura) e lo fa sulla base dell'osservazione di un numero finito di casi. Questa osservazione raramente non è sufficiente allo studente per essere convinto della bontà della congettura e la motivazione ad una dimostrazione rigorosa è essenzialmente estrinseca: "son convinto che non ce ne sia bisogno, ma l'insegnante di matematica non accetta la mia argomentazione".
Da una parte, l'esempio di Wallis – che giudica un approccio per verifica su casi, seppur fatto con determinate accortezze, molto soddisfacente – mostra come l'atteggiamento degli studenti non sia così *strano*. Dall'altra, nei libri di testo della scuola secondaria di

secondo grado spesso – proprio per evitare dimostrazioni rigorose – si giustificano affermazioni sulla base di argomentazioni induttive (tipico in questo senso è il caso della giustificazione del fatto che un insieme A con n elementi ha 2^n sottoinsiemi, mostrato su pochi casi numerici) e, in diversi test di ammissione all'Università, si richiede di trovare il termine generale di una successione (come se questo fosse unico) a partire da un numero finito di elementi.

La forza *convincente* del ragionamento di generalizzazione induttiva è emersa in uno studio condotto all'interno di una tesi di laurea (Marcheschi, 2014) con ragazzi di quindici anni (non focalizzato sul principio di induzione e che non ne presupponeva la conoscenza). A partire da un quesito INVALSI di livello 8 dell'ambito Numeri, è stata costruita e somministrata a 444 allievi di 23 classi seconde la seguente domanda aperta con richiesta di giustificazione:

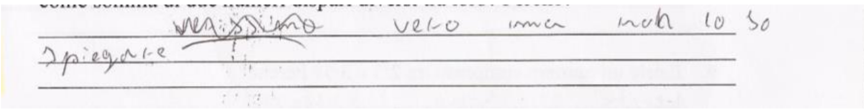
È vero o falso che un numero pari maggiore di 2 si può sempre scrivere come somma di due numeri dispari diversi da loro? Perché?

Emerge come a fronte di oltre l'80% del campione che risponde correttamente al primo quesito, meno del 7% propone una giustificazione alla risposta non basata su prove numeriche di specifici (magari anche numerosi) casi e corretta, del tipo di quella sotto:

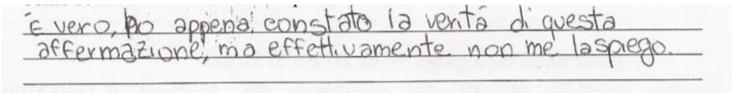

E' VERO POICHE' un numero pari si può scrivere come
n+1 dove n e' dispari; la successione di numeri alterna un
pari a un dispari quindi un qualsiasi numero pari può essere scritto
come somma del numero precedente (che e' dispari) e 1 (anch'esso dispari)

"*È VERO, POICHÉ un numero pari si può scrivere come n+1 dove n è dispari; la successione di numeri alterna un pari a un dispari quindi un qualsiasi numero pari può essere scritto come somma del numero precedente (che è dispari) e 1 (anch'esso dispari)*"

La maggioranza degli studenti arriva alla conclusione attraverso la prova su un numero finito di casi. D'altra parte, in questi protocolli emerge spesso sia la sicurezza nella risposta a seguito delle prove numeriche fatte, sia la consapevolezza che la giustificazione basata su prove numeriche non sia accettata dall'insegnante. Ne escono così dei protocolli molto significativi rispetto all'accettazione di un contratto didattico (Brosseau, 1986) che non coincide però con una condivisione del senso di una dimostrazione matematica:

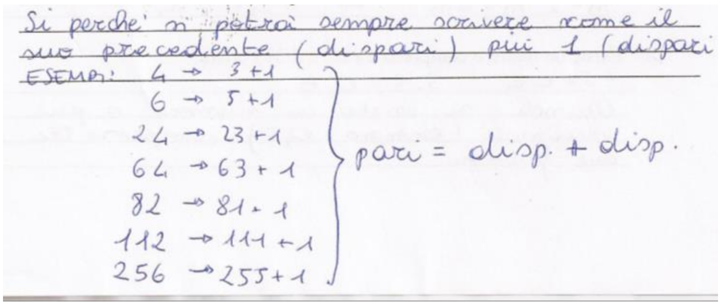

~~Verissimo~~ vero ma non lo so spiegare

"~~*Verissimo*~~ *vero ma non lo so spiegare*"


È vero, ho appena constato la verità di questa affermazione, ma effettivamente non me la spiego.

"*È vero, ho appena constato la verità di questa affermazione, ma effettivamente non me la spiego*"

Dal punto di vista del potere di convincimento dell'esempio numerico, è interessante osservare come diversi studenti, tra coloro che riportano una giustificazione non basata sull'analisi di singoli casi, avvertono comunque la necessità di esemplificare su singoli casi il loro ragionamento teorico:


Si perche' si potrà sempre scrivere come il suo precedente (dispari) più 1 (dispari

ESEMPI: 4 → 3+1
6 → 5+1
24 → 23+1
64 → 63+1
82 → 81+1
112 → 111+1
256 → 255+1

pari = disp. + disp.

"*Sì, perché si potrà sempre scrivere come il suo precedente (dispari) più 1 (dispari). ESEMPI: ...*"

Classicamente, si cerca di mettere in guardia dai rischi di una generalizzazione induttiva proponendo proposizioni verificate dai primi n numeri naturali (con n sufficientemente grande), ma non vere per ogni n in $\mathbb{N}$.

Esempi tipici di questo tipo sono quelli delle formule *generatrici* dei numeri primi[4], quali $f(n)=n^2-n+41$ o $g(n)= n^2-79n+1601$.
La mia impressione è che, invece di proporre congetture "pre-confezionate" che rischiano di apparire "eccezioni costruite ad hoc", sia più efficace proporre attività di congettura per le quali la possibilità che gli studenti costruiscano generalizzazioni errate sia elevata. Propongo attività del genere da diversi anni in un corso (a cavallo tra la fine della laurea triennale e l'inizio della magistrale) di Matematiche Elementari per il Corso di Laurea in Matematica e i risultati sono molto interessanti anche per lo specifico campione di studenti (laureati o laureandi in Matematica).
Il corso tratta gli insiemi numerici a partire dall'assiomatica di Peano per l'introduzione dei numeri naturali. Una buona parte dell'inizio del corso è dedicata alla riflessione sul principio d'induzione: principio che i corsisti hanno incontrato in diversi corsi precedenti e che effettivamente mostrano tipicamente di saper usare piuttosto bene in situazioni *standard*, ovvero per le quali appare *scontato* usare il principio d'induzione – Harel (2008) chiama queste situazioni: problemi di ricorsione esplicita.
D'altra parte, la consapevolezza che alcune difficoltà nella comprensione più profonda del principio d'induzione possano essere presenti anche a questo livello e la volontà eventualmente di farle emergere, mi ha portato a sviluppare – nei precedenti quattro anni accademici – un percorso specifico.
Per prima cosa mi sembra interessante indagare quanto, il ragionamento induttivo su un certo numero di casi convinca della verità di una congettura.

---

[4] Il fatto che tali formule non generino numeri primi per ogni n naturale non viene immediatamente messo in dubbio nemmeno a livello universitario. A tale livello, nei corsi di matematica elementare da un punto di vista superiore, si può partire dalla discussione di questi casi per innestare la curiosità a dimostrare la generalizzazione del risultato trovato: nessun polinomio $p(n)$ di secondo grado a coefficienti interi (non costante) può generare primi per ogni valore di n. E da lì notare che la dimostrazione è ulteriormente generalizzabile al caso di polinomi a coefficienti interi di grado qualsiasi.

Propongo per questo inizialmente la seguente (rassicurante) consegna: *congetturare come varia il numero delle diagonali di un poligono convesso P, al variare del numero n dei lati del poligono*.
Osservo che volutamente non richiedo di dimostrare. Nonostante ciò, probabilmente proprio per il contesto particolare, il comportamento degli studenti è sempre stato lo stesso nelle quattro coorti osservate: dapprima ricavano la relazione corretta tra numero di lati n e numero di diagonali $n\cdot(n\text{-}3)/2$ attraverso l'analisi di pochi casi specifici. Successivamente, provano la congettura per induzione, considerando un poligono di $n+1$ lati e unendo due suoi vertici distinti adiacenti ad uno stesso vertice V_1 (vedi Fig. 1).

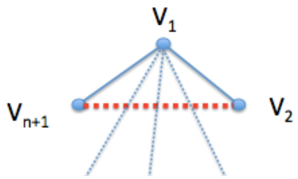


Fig. 1

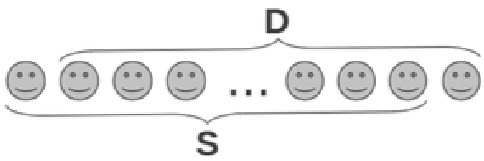
In questo modo ritrovano il poligono di n lati su cui applicare l'ipotesi induttiva, e poi aggiungono la diagonale che congiunge i due vertici V_2 e V_{n+1}, e le $n\text{-}2$ diagonali che partono da V_1.
Alcuni osservano cosa succede per un caso specifico (ad esempio nel passaggio dal pentagono all'esagono) e da questo risalgono all'idea per generalizzare il passaggio da P(n) a P($n+1$) nel caso generale. Harel (2001) chiama questo tipo di approccio – che ricorda l'approccio bernoulliano – "quasi-induzione". Il ricercatore americano sottolinea come in numerosi casi la quasi-induzione emerge spontaneamente dagli studenti e come quindi potrebbe essere sfruttata, a livello di scuola secondaria, per introdurre efficacemente l'induzione matematica. Si tratta, come sottolinea, di discutere e colmare il gap concettuale tra la quasi-induzione – che tratta inferenze locali – e il principio d'induzione, che tratta inferenze globali.

Al termine di questo facile problema, che sembra rafforzare il legame tra osservazione di un numero finito di casi e generalizzazione, propongo il seguente problema (tratto da Pisaneschi, 1982): *congetturare come varia il numero massimo di parti in cui n punti scelti su una circonferenza dividono il relativo cerchio, quando vengono congiunti due a due mediante corde.*
Il problema non ha una risposta generalizzabile con formule elementari dato che per $n<6$ la risposta è 2^{n-1}, ma per $n=6$ la risposta non è 32, bensì 31. Anche in questo caso il comportamento osservato è stato finora piuttosto simile a prescindere dalla coorte. Inizialmente, gli studenti esplorano il problema per i primi *n*. Tipicamente si fermano al caso n=5, sia perché il disegno è più complesso da sviluppare sui casi specifici che quello sui poligoni (si chiede di trovare un numero massimo che dipende dalla disposizione dei punti: non è quindi automatico il passaggio da *n* a *n+1* punti), sia perché la formula 2^{n-1} sembra essere *molto promettente* (anche perché tutto il gruppo di studenti arriva indipendentemente alla stessa congettura). D'altra parte entra in gioco anche un'altra clausola tipica del contratto didattico (valida sia a livello di scuola secondaria che di università): il fatto che la richiesta di congetturare corrisponde alla possibilità di trovare un enunciato *semplice* (si può osservare la relazione tra tale clausola e l'accettazione di esercizi di riconoscimento di successioni a partire da un numero finito di casi di cui abbiamo parlato sopra).
Ovviamente la prova per induzione non funziona, ma passa molto tempo (talvolta emerge alla lezione successiva) prima che qualcuno usi il fallimento nella produzione di una dimostrazione per mettere in discussione la congettura. È interessante osservare come nei primi tentativi relativi al caso n=6 per i quali vengono contate 31 parti invece di 32, lo studente che li effettua è sempre convinto di aver fatto male il disegno (e prova con un disegno più grosso per evitare di sovrapporre linee) o di aver disposto i punti sulla circonferenza non in modo ottimale (ovvero non ottenendo il numero massimo di parti).

Questo mostra come, anche in studenti certamente consapevoli del fatto che un numero finito di prove non sia sufficiente per dimostrare alcunché, la convinzione rispetto a una congettura basata sulla prova empirica in un numero finito di casi è sempre molto forte.
La parte più interessante del lavoro sul principio d'induzione è però quella sulla sua comprensione al di là della capacità nel saperlo applicare: usando i termini introdotti all'inizio, quella che intende indagare le difficoltà nell'acquisire un "dominio attivo" o una comprensione di tipo relazionale del principio. In questo caso procedo su tre step.
Step 1: chiedo quanto il principio d'induzione sia considerato difficile e quanto ognuno di loro ritenga di averlo compreso in profondità.
Usualmente l'auto-valutazione sul principio d'induzione restituisce un grado di confidenza molto alto tra gli studenti di Matematica. Pur riconoscendo l'iniziale fatica fatta da matricole a dominare il metodo, molti studenti fanno esplicito riferimento al fatto di riuscire a risolvere problemi anche complessi che richiedono l'uso dell'induzione. Inoltre gli insuccessi sono attribuiti quasi esclusivamente alla necessità di dover utilizzare "trucchi specifici" (ad esempio specifiche minorazioni) per portare a termine il passo induttivo e non ad una difficoltà relativa alla comprensione o alla applicazione del principio di induzione. In definitiva, emerge – nella quasi totalità dei casi – la convinzione di controllare bene il significato e la tecnica dimostrativa per induzione.
Step 2: propongo ulteriori dimostrazioni per induzione anche di una certa complessità per valutare la padronanza della tecnica dimostrativa.
Ad esempio propongo quelli che Harel chiama problemi di ricorsione implicita, come ad esempio: "*Trova un limite superiore per la successione* $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, *...*", e anche su questi i riscontri sono molto positivi.

Si conferma come gli studenti siano usualmente molto abili nell'applicazione del principio d'induzione, anche in casi complessi sia dal punto di vista concettuale che tecnico. Raramente ad esempio ci sono problematiche relative a casi limite nel verificare il passo base: si pensi alla sommatoria o produttoria di un solo elemento che rappresenta una difficoltà concettuale alta per uno studente di scuola superiore, o ad esempio al caso ben più complesso dal punto di vista concettuale della verifica del principio dei cassetti nel caso n=0 (ovvero che non esistono funzioni da un insieme non vuoto all'insieme vuoto).
Step 3: propongo il seguente problema (tratto da Childs, 1989).

Teorema: Tutti i neonati hanno gli occhi dello stesso colore.
Dimostrazione: Il caso n=1 è ovvio. Supponiamo ora che in ogni insieme di n neonati tutti abbiano occhi dello stesso colore. Consideriamo un insieme di $n+1$ neonati:



Gli n neonati dell'insieme S hanno gli occhi dello stesso colore, altrettanto vale per gli n neonati dell'insieme D. Dunque tutti i neonati dell'insieme di n+1 elementi hanno gli occhi dello stesso colore. QED
Dove è l'errore nella dimostrazione precedente?

Il problema è noto in diverse versioni, alcune delle quali *più matematiche* e che si possono tutte riassumere con il risultato (ovviamente falso) che ogni relazione di equivalenza su un insieme numerabile è totale. D'altra parte questa versione è particolarmente interessante per i nostri scopi perché evidentemente in nessun contesto qualcuno dubita della falsità della conclusione. C'è dunque un errore.

Le risposte degli studenti universitari del mio corso e dei corsisti del TFA per l'insegnamento della matematica alla scuola secondaria di secondo grado (raccolte in Santamaria, 2013) mostrano il gap profondo tra la capacità, tecnicamente anche molto avanzata, di controllo sull'applicazione *meccanica* del metodo e la comprensione profonda del principio di induzione.
Sono molto rari (sotto il 10% del campione complessivo) gli studenti che evidenziano l'errore nella dimostrazione, ovvero che si accorgono della non validità del passaggio induttivo per tutti gli n: il ragionamento sottointeso dall'illustrazione riportata non funziona evidentemente nel caso n=2. In tal caso infatti, l'insieme S e l'insieme D non hanno elementi in comune e non si può usare la transitività della relazione per concludere che l'unico elemento di S è equivalente all'elemento di D.
La parte interessante è però quella degli studenti che non si accorgono di quanto sopra e che, consapevoli della assurdità della conclusione dell'enunciato, cercano di giustificare l'errore con un'errata applicazione del principio d'induzione. In particolare, emergono essenzialmente tre categorie distinte e molto interessanti di giustificazione.
La prima *contesta* l'ambito di applicazione del principio di induzione:

- in termini dell'insieme considerato: "*Il principio di induzione si applica ad insiemi numerici, e non ad insiemi diversi (ad esempio, di persone).*";
- in termini della proprietà considerata: "*Il principio di induzione non si applica a caratteristiche fisiche, solo a proprietà numeriche."*;
- in termini di ordinamento non riconoscibile "*Il principio di induzione si applica su successioni di eventi, ma qui gli eventi non sono successivi.*".

Queste argomentazioni sono facilmente messe in crisi da una riformulazione dell'enunciato del problema, con P(n) da provare

che diventa: "In ogni insieme di n neonati c'è un solo colore di occhi".
La seconda giustificazione è forse più preoccupante dal punto di vista della comprensione del principio d'induzione. Si contesta infatti che nel passaggio induttivo si usi l'ipotesi induttiva su due insiemi diversi con n elementi: "*Nella dimostrazione viene applicato il passo induttivo a insiemi diversi*"; "*Nella dimostrazione devo supporre che per uno specifico insieme di n neonati valga la proprietà, non per tutti gli insiemi di n neonati*".
La terza giustificazione richiama una delle complessità più grosse dal punto di vista epistemologico del principio d'induzione, ovvero il fatto che compaiano due implicazioni, una *annidata* nell'altra (Villani, 2003). Fischbein e Engel (1989) hanno mostrato come questo fatto causi in molti allievi un profondo disorientamento nell'approccio al principio d'induzione.
Si tende infatti a pensare che il principio d'induzione presupponga vera la premessa $P(n)$ dell'implicazione $P(n) \rightarrow P(n+1)$ e a ritenere dunque, in maniera ovviamente erronea, che il principio d'induzione usi come ipotesi ciò che si deve provare: "*Nella dimostrazione del teorema sul colore degli occhi si è supposta vera P(n), ma non si è dimostrata.*".
Scrivono Fischbein e Engel (1989, p. 45): "*Il passo di induzione richiede una dimostrazione per conto suo (in quanto implicazione temporaneamente autonoma). L'idea che si debba dimostrare un'implicazione $p \rightarrow q$ per la quale il problema della verità obiettiva di ciascuna delle due componenti p e q è del tutto irrilevante (nell'ambito del passo di induzione) sembra essere inaccettabile intuitivamente. La situazione è complicata dal fatto che l'antecedente p include il teorema da dimostrare. Allora lo studente, essendo abituato ad aspettarsi un valore di verità per l'antecedente, è sconcertato dal fatto che l'accettazione dell'antecedente dipende proprio dal teorema che si deve dimostrare*".

Evidentemente, questi studenti di matematica dimostrano un'eccellente comprensione dal punto di vista strumentale del principio d'induzione (lo sanno applicare bene), ma tutti i loro dubbi e debolezze relativamente alla comprensione relazionale (come e perché) del principio d'induzione emergono di fronte a situazioni non-standard e inaspettate, che non riescono a spiegare.

Conclusioni

Le riflessioni fatte portano a sottolineare diversi aspetti.

Il primo è l'importanza di considerare lo sviluppo storico delle idee matematiche non solo per mostrare la matematica come prodotto culturale e come scienza viva, ma anche per avere elementi di interpretazione per le difficoltà di tipo epistemologico relative alla comprensione dei concetti matematici (in questo caso abbiamo parlato del principio d'induzione, ma il discorso è ovviamente generalizzabile ad altri aspetti della matematica).

Il secondo è la notevole differenza che c'è tra una comprensione di tipo strumentale (legata all'applicazione di tecniche più o meno bene interiorizzate) e una di tipo relazionale in matematica. I risultati delle osservazioni a livello universitario, mostrano come nel caso del principio d'induzione il gap possa essere molto ampio. Per questo ci chiediamo se non sia il caso – a livello di scuola secondaria, ma anche di università – soffermarsi maggiormente sull'obiettivo di "dominio attivo" del principio d'induzione riportato nelle Indicazioni Nazionali.

Il terzo e ultimo è metodologico: per far emergere le convinzioni profonde degli studenti, e dunque poter valutare (ed eventualmente intervenire) eventuali criticità nella comprensione relazionale di un concetto matematico, è necessario mettere in difficoltà, in crisi, gli studenti, attraverso la proposizione di questioni che possono far vacillare certezze e appunto far emergere convinzioni profonde che si attivano solo in situazioni non di routine.

Bibliografia

Bagni, G. & Menghini, M. (2005). L'induzione, "esempi dall'aritmetica e dall'algebra". Una lezione di Luigi Bàrbera nel centenario della scomparsa, *Progetto Alice*, 16, 5-26.

Bernoulli, J. (1686). *Acta eruditorum*. Leipzig.

Boero, P.; Garuti, R. & Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (pp. 247-262). Rotterdam: Sense Publishers.

Bossut, C. & Lalande, J. (1800). *Dizionario enciclopedico delle matematiche delli signori AB. Bossut, La Lande ec. Traduzione dal Francese, arricchita di annotazioni, ed aggiunte del traduttore italiano*. Padova.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique del mathématiques*, 7(2), 33-115.

Bussey, W. (1917). The origin of mathematical induction, *The American Mathematical Monthly*, 24(5), 199-207.

Cajori, F. (1918). Origin of the name 'mathematical induction', *The American Mathematical Monthly*, 25(5), 197-201.

Childs, L. (1989). *Algebra, un'introduzione concreta*. Pisa: ETS Editrice.

De Morgan, A. (1838). Induction (Mathematics), *The Penny Cyclopedia*.

Ernest, P. (1982). Mathematical Induction: a recurring theme, *Mathematical Gazzette*, 66, 120-125.

Ferrari, M. (1988). Uno strumento per definire e dimostrare: il principio di induzione matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 11(6), 1169-1198.

Harel, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In Campbell, S. & Al. (Eds.). *Learning and Teaching Number Theory* (pp.185-212). New Jersey, Ablex Publishing.

Harel, G. & Brown, S. (2008). Mathematical Induction: Cognitive and Instructional Considerations. In M. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and Practice in Undergraduate Mathematics,* Mathematical American Association, 111-123.

Lolli, G. (2005). *QED. Fenomenologia della dimostrazione*. Torino: Bollati Boringhieri.

Lolli, G. (2008). *Guida alla teoria degli insiemi*. Milano: Springer Italia.

Marcheschi, A. (2014). *Un'indagine sulle difficoltà argomentative nell'ambito Numeri degli studenti a livello di primo biennio della scuola superiore*. Tesi di Laurea in Matematica – Università di Pisa.

Mariotti, A. (1998). Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 21(3), 209-252.

MIUR (2010a). *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei*. Disponibile in: http://nuovilicei.indire.it/

Pascal, B. (1655). *Traité du Triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même matière.* Paris.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia novo methodo exposita*. Torino: Bocca.

Pisaneschi, P. (1982). Il metodo della scoperta e i suoi rischi. *Archimede*, 34(1/2), 81-88.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: University Press.

Prodi, G. & Magenes, E. (1982). *Elementi di Analisi matematica*. Firenze-Messina: D'Anna Editore.

Santamaria, M. (2013). *Un'indagine sulle conoscenze matematiche degli studenti nell'ambito degli insiemi numerici in diversi momenti del percorso scolastico*. Tesi di Laurea in Matematica – Università di Pisa.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77.

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.

Tomasi, L. (2012). Il principio di induzione matematica: considerazioni didattiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35(5), 563-575.

Villani, V. (2003). *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Wallis, J. (1656). *Arithmetica infinitorum*. Oxford.

Wallis, J. (1985). *Treatise of Algebra*. London.

Wu, H. (1996). The mathematics and the mathematics education reform, *Notices of the American Mathematical Society*, 43, 1531-1537.