L'uomo che scambiò la Zeta di Riemann per un cappello

Claudio Bonanno

Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
claudio.bonanno@unipi.it

August 16, 2016

Abstract

Versione ampliata dell'articolo della rubrica "Fake Papers" del sito MaddMaths!. L'articolo originale si trova all'indirizzo `http://maddmaths.simai.eu/rubriche/fake_papers/fake-papers1_riemann/`

1 Introduzione

Le riviste scientifiche specializzate usano nel processo di scelta degli articoli da pubblicare la cosiddetta "peer review", ossia la revisione tra pari. A garanzia della buona qualità di un articolo proposto per la pubblicazione al comitato di redazione della rivista, uno degli editori sceglie uno o più esperti dell'argomento trattato nell'articolo e chiede il loro parere. Tipicamente la peer review è "blind", ossia gli autori dell'articolo proposto non sono a conoscenza dei nomi degli esperti scelti come revisori, e a volte è "double-blind", ossia anche i revisori non conoscono il nome degli autori dell'articolo. Ma siamo sicuri che questo processo funzioni sempre bene?

Con il proliferare del numero di articoli e di riviste specializzate, il sistema appare sempre più in crisi, è infatti in aumento il numero di articoli pubblicati che vengono poi ritirati dalle riviste. È quello che succede, per esempio, con gli articoli che sono stati copiati da altri già pubblicati. Di recente è stato creato il sito Retraction Watch, `http://retractionwatch.com/`, che svolge un servizio di pubblica utilità, raccogliere le segnalazioni di articoli ritirati dalle riviste.

Tuttavia, in matematica bisogna distinguere in maniera chiara tra articoli che presentano errori di tipo matematico sfuggiti alla peer review, e può succedere, da articoli che sono invece frutto di comportamenti quanto meno poco attenti da parte del comitato editoriale della rivista, o truffaldini da parte degli autori, e che possono essere a tutti gli effetti chiamati “fake papers”. Nella rubrica “Fake Papers” ci vogliamo occupare di questi ultimi e, in particolare, di quelli che non risultano ritirati, descrivendo il problema di cui un fake paper si occupa, spesso problemi molto famosi, senza tuttavia provare ad analizzare il fenomeno dell'esistenza dei “fake papers”. Ogni segnalazione di fake papers da parte dei lettori è benvenuta.

2 L'uomo che scambiò la Zeta di Riemann per un cappello

Alla fine del 2015 è apparsa sui media la notizia che il Prof. Opeyemi Enoch, della Federal University di Oye-Ekiti in Nigeria, avesse dimostrato l'“ipotesi di Riemann”, uno tra i più famosi dei problemi aperti in matematica, se non il più famoso, e l'unico ad apparire come problema da risolvere sia nella lista dei “Problemi del Millennio” del Clay Mathematics Institute, sia nella lista dei “Problemi di Hilbert” presentati al Congresso Internazionale di Matematica del 1900 dal matematico David Hilbert.

Non ci occuperemo della presunta dimostrazione che il Prof. Enoch avrebbe presentato all'“International Conference on Mathematics and Computer Science” tenutasi a Vienna il 10 e 11 Novembre 2015, e che è stata pubblicata sull'International Scientific Journal - Journal of Mathematics, in vendita su Amazon!!! Ma non ci occuperemo nemmeno delle nuove tre (!) presunte dimostrazioni che il Prof. Enoch ha presentato alla nuova edizione della conferenza, tenutasi il 7 e 8 Giugno 2016. Alla stessa conferenza appena conclusasi è stata presentata anche un'altra dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, però da un altro autore, almeno a quanto annunciato sul programma. Chi volesse leggere queste dimostrazioni dovrà presumibilmente aspettarne l'uscita su Amazon. Nel frattempo potete ritrovare tutte le informazioni sul sito `http://computer.conference-site.com/`.

Con una semplice ricerca sui motori di ricerca per articoli pubblicati su riviste scientifiche, è possibile scoprire che probabilmente il Prof. Enoch non è nuovo a dimostrazioni dell'ipotesi di Riemann. Nel 2012 è infatti apparso sull'Australian Journal of Basic and Applied Sciences, l'articolo [1] a nome di un singolo autore, O.O.A. Enoch, della Ekiti State University in Nigeria. In quest'articolo l'autore asserisce di dimostrare l'ipotesi di Riemann.

Saranno i due professor Enoch la stessa persona? Ogni matematico sogna di ottenere fama imperitura dimostrando una congettura come l'ipotesi di Riemann, ma credo che nessuno abbia mai sperato di darne addirittura cinque dimostrazioni diverse, stando agli abstract delle comunicazioni alle conferenze di Vienna, in soli 4 anni! Tra tutte le dimostrazioni del Prof. Enoch quella del 2012 merita certamente di ricevere l'appellativo di "fake paper", e di questa ci occupiamo qui.

La congettura di Riemann, nota con il nome "Ipotesi di Riemann" a causa del grandissimo numero di articoli in cui si ottengono risultati di grande importanza supponendo la congettura verificata, fu formulata da Bernhard Riemann nell'articolo "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (On the number of primes less than a given quantity), apparso nel 1859 su Monatsberichte der Berliner Akademie, in cui si occupava del problema della distribuzione dei numeri primi, problema studiato per la prima volta da Gauss. A differenza di molti altri noti problemi di teoria dei numeri, la formulazione dell'ipotesi di Riemann non è affatto semplice, né lo è tanto meno la sua piena comprensione. Cercheremo in questo articolo di fornire i dettagli necessari per una comprensione almeno dell'enunciato nella formulazione originale.

La congettura ha come oggetto la funzione indicata con $\zeta(s)$ e nota come funzione "Zeta di Riemann". Introdotta da Eulero per una nuova dimostrazione dell'infinità dei numeri primi, dopo quella di Euclide, le proprietà della funzione $\zeta(s)$, e soprattutto il fine legame con la distribuzione dei numeri primi, furono studiate appunto da Riemann.

Il primo aspetto essenziale è la definizione della funzione Zeta. La funzione $\zeta(s)$ è definita come la somma di una quantità infinita di termini, e se questo non fosse già abbastanza complicato, questa definizione ha in realtà senso soltanto per alcuni valori complessi dell'argomento s. La funzione $\zeta(s)$ è infatti definita come

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,, \tag{1}$$

ed elementari conoscenze di convergenza delle serie numeriche, suggeriscono che questa definizione abbia senso soltanto per numeri complessi s con parte reale maggiore di 1. Un primo legame con i numeri primi si ottiene osservando, come fece Eulero, che la funzione $\zeta(s)$ si può esprimere sempre per numeri complessi s con parte reale maggiore di 1, come

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

dove $\mathbb{P}$ indica l'insieme di tutti i numeri primi. Quest'espressione è nota con il nome di “prodotto di Eulero”. Torneremo in un’altra occasione su quest’espressione e la sua importanza.

Il primo risultato di Riemann fu riuscire a dimostrare, tramite una procedura nota come “continuazione analitica”, che è possibile assegnare alla funzione $\zeta(s)$ un valore anche per tutti i numeri complessi s diversi da 1.

Apriamo una breve parentesi e proviamo a spiegare il senso della continuazione analitica con un semplice esempio. Definiamo la funzione

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

per valori complessi di z. La teoria delle serie numeriche ci dice che la funzione F è ben definita, in quanto la serie è convergente, se $|z| < 1$. Consideriamo poi la funzione

$$G(z) = \frac{1}{1-z}$$

che è ben definita per tutti i numeri complessi $z \neq 1$. La teoria delle serie numeriche ci dice anche che $F(z) = G(z)$ se $|z| < 1$, ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

per ogni z di modulo minore di 1. Ma un attimo! Visto che la funzione G a destra è definita su un insieme più grande rispetto a quello in cui vale l’uguaglianza, allora possiamo usare l’equazione per dire che la funzione $F(z)$ vale anch’essa $\frac{1}{1-z}$, anche dove non è definita come serie geometrica. Diciamo quindi che F si continua analiticamente a una funzione su tutto il piano complesso tranne $z = 1$.

Potremmo scegliere altri modi di definire F fuori da $|z| < 1$? No, se vogliamo che sia una funzione analitica (ossia derivabile rispetto ad un parametro complesso). Questo dipende dalle proprietà dell’analisi sui numeri complessi.

Un’interpretazione fuorviante della continuazione analitica di F sarebbe scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1\,.$$

Quest’uguaglianza ha invece senso solo se interpretata come $F(2) = -1$, dove il valore di F in $z = 2$ è calcolato tramite la sua continuazione analitica, ossia $F(2) = G(2)$.

Ci sono molti metodi per trovare una continuazione analitica della Zeta di Riemann, accenniamo brevemente a un possibile procedimento. Usiamo l'uguaglianza

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s}\, dx$$

per scrivere innanzitutto

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s}\, dx \right) = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato un bel "trucco": $\int_n^{n+1} \frac{1}{n^s}\, dx = \frac{1}{n^s}$. Infine per $x \in [n, n+1]$ si ha

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| = \left| s \int_n^x \frac{1}{t^{s+1}}\, dt \right| \leq |s| \frac{1}{n^{1+\Re(s)}}$$

dove $\Re(s)$ indica la parte reale di s. Ne segue che

$$\left| \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \leq \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} |s| \frac{1}{n^{1+\Re(s)}}\, dx = \sum_{n=1}^\infty |s| \frac{1}{n^{1+\Re(s)}}$$

e l'ultimo termine è una serie convergente per $\Re(s) > 0$. Dunque possiamo scrivere

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \tag{2}$$

per tutti i numeri complessi s con parte reale positiva, da cui dobbiamo escludere il caso $s = 1$. Abbiamo quindi fatto il primo passo di continuazione analitica della zeta! Siamo passati dalla definizione (1) per la funzione Zeta, che ha senso solo per gli s con parte reale maggiore di 1, all'equazione (2), che possiamo interpretare come una definizione della funzione Zeta per gli s con parte reale maggiore di 0 e diversi da 1, e ovviamente coincide con la definizione (1) per gli s con parte reale maggiore di 1.

Osserviamo in particolare che tramite (2) si ottiene

$$\lim_{s\to 1} (s-1)\, \zeta(s) = 1\,. \tag{3}$$

Questo comportamento si indica dicendo che la funzione Zeta ha in $s = 1$ un polo semplice con residuo uguale a 1, il valore del limite.

Si può ripetere un procedimento analogo, e trovare nuove formulazioni per la funzione Zeta che abbiano senso per gli s con parte reale maggiore di un qualsiasi numero negativo fissato. Ma c'è un modo più veloce, più elegante e anche più interessante per dimostrare che è possibile definire la funzione Zeta su tutto il piano complesso. Questo fu il secondo importante risultato dimostrato da Riemann sulla funzione Zeta.

Per dimostrare la possibilità di estendere la definizione della sua funzione Zeta, Riemann definì una nuova funzione $\xi(s)$, la funzione "Xi di Riemann", come[1]

$$\xi(s) := \frac{1}{2}\, s\,(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\,\zeta(s) \tag{4}$$

dove $\Gamma(s)$ è un'altra importante funzione, la funzione "Gamma di Eulero", un'estensione del concetto di fattoriale di un numero naturale. Richiamiamo brevemente la sua definizione e le principali proprietà, che ci serviranno per ottenere informazioni sulla funzione Zeta.

La funzione Gamma è definita tramite

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$$

per numeri complessi s con parte reale positiva, quelli che rendono finito l'integrale improprio. Tramite il procedimento della continuazione analitica è possibile dimostrare che la funzione Gamma si estende ad una funzione analitica per tutti i valori complessi di s diversi dagli interi non-positivi, ossia per s diverso da $\{0, -1, -2, \dots\}$. Questi punti sono per la funzione Gamma poli semplici, e vale per ogni $n \geq 0$

$$\lim_{s \to -n} (s+n)\,\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}\,. \tag{5}$$

Torniamo alla funzione Xi di Riemann. La definizione data in (4) in termini della funzione Gamma e della funzione Zeta ha senso per valori complessi di s con parte reale positiva. Notiamo in particolare che la proprietà (3) assicura che $\xi(s)$ sia ben definita per $s = 1$, in particolare si ottiene $\xi(1) = \frac{1}{2}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, vale infatti $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$. Riemann dimostrò però che la funzione Xi verifica l'equazione funzionale

$$\xi(s) = \xi(1-s)\,, \tag{6}$$

grazie alla quale è possibile determinare il suo valore per tutti i numeri complessi s. Ad esempio $\xi(0) = \xi(1) = \frac{1}{2}$, e se $s = \sigma + i\tau$ con $\sigma \leq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$, allora $\xi(s) = \xi(1-\sigma-i\tau)$ che è definito come in (4) essendo $1-\sigma > 0$.

L'equazione (6) permette quindi di ottenere anche la continuazione della funzione Zeta a tutto il piano complesso. In definitiva la funzione $\zeta(s)$ risulta

[1] La seguente è in realtà una variante dovuta a Landau.

essere una funzione analitica per ogni numero complesso s diverso da 1, con un polo semplice nel punto $s = 1$.

Concludiamo questa introduzione alla funzione Zeta con un paio di osservazioni. Innanzitutto, usando la continuazione analitica della $\zeta(s)$ e la sua definizione (1) possiamo allora scrivere che

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \text{ “ } = \text{ ” } -\frac{1}{12} \quad ?$$

I puntini a sinistra dell'uguale indicano che vanno sommati tutti i numeri naturali, dunque la loro somma non può essere uguale a un numero razionale e per di più negativo! In effetti l'uguaglianza ha senso solo pensandola come continuazione analitica di $\zeta(s)$, e ci dice che $-\frac{1}{12}$ è il valore della funzione $\zeta(s)$ per $s = -1$, valore che si ricava da (6). Se volete saperne di più su somme di questo tipo, senza usare la continuazione analitica, potete consultare l'articolo tecnico sul blog di Terence Tao [2].

Dall'equazione funzionale è possibile ottenere anche un'altra proprietà della funzione Zeta. Abbiamo visto che la funzione $\xi(s)$ è analitica per ogni s, dunque per ogni $n \geq 1$ esiste finito il valore $\xi(-2n)$, e possiamo usare la definizione (4) per scrivere

$$\xi(-2n) = \lim_{s \to -2n} \xi(s) = \lim_{s \to -2n} \left[\frac{1}{2}\, s\,(s-1)\, \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\!\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \right] =$$

$$= n(2n+1)\, \pi^{n} \lim_{s \to -2n} (s + 2n)\, \Gamma\!\left(\frac{s}{2}\right) \frac{\zeta(s)}{(s+2n)}$$

Usando la proprietà (5), otteniamo che

$$\lim_{s \to -2n} \frac{\zeta(s)}{(s+2n)}$$

deve assumere un valore finito. Questo è possibile solo se $\zeta(-2n) = 0$. Ricaviamo dunque che la funzione Zeta si annulla su tutti i numeri interi negativi pari, i cosiddetti “zeri banali” della funzione Zeta di Riemann. Altri valori di s per cui la funzione Zeta si annulla sono quindi detti “zeri non banali”.

Avendo completato il procedimento di definizione della funzione $\zeta(s)$, possiamo finalmente enunciare l'ipotesi di Riemann. Nell'articolo del 1859 Riemann dimostrò che la distribuzione dei numeri primi è legata alla posizione dei suoi zeri non banali. L'equazione funzionale (4) ci dice che la funzione Xi ha un asse di simmetria, dato dalla retta dei numeri complessi con parte reale uguale ad $\frac{1}{2}$. Riemann affermò nel suo articolo che è molto probabile che gli zeri si trovino tutti proprio sulla retta di simmetria. Questa è la sua congettura, l'ipotesi di Riemann.

Ipotesi di Riemann. Gli zeri non banali della funzione $\zeta(s)$ hanno parte reale uguale a $\frac{1}{2}$.

Il primo risultato che fu dimostrato in questa direzione è il cosiddetto "Teorema dei Numeri Primi", dimostrato indipendentemente da Hadamard e de La Vallée Poussin nel 1896, che afferma che gli zeri non banali di $\zeta(s)$ si trovano nella striscia di punti con parte reale compresa strettamente tra 0 e 1. Successivamente, l'importanza dell'ipotesi di Riemann crebbe notevolmente quando ci si accorse che la funzione Zeta di Riemann è solo il prototipo di una grande famiglia di funzioni, dette "funzioni L", per le quali vale un'analoga congettura. La validità di questa congettura avrebbe importanti conseguenze in Teoria Algebrica e Analitica dei Numeri. Inoltre per citare uno dei risultati più importanti dello scorso secolo, un ulteriore analogo dell'ipotesi di Riemann è costituito dalle "congetture di Weil" in Geometria Algebrica, dimostrate da Deligne usando gli straordinari contributi di Grothendieck. Nonostante dunque l'enorme sviluppo delle teorie e risultati legati all'ipotesi di Riemann, la dimostrazione della congettura rimane ancora un mistero.

Veniamo all'articolo del prof. Enoch. Usando l'equazione funzionale (4) per la funzione Xi, si ricava abbastanza facilmente che la derivata di $\xi(s)$ si annulla per $s = \frac{1}{2}$, questa è la prima proprietà che ricava il prof. O.O.A. Enoch nel suo articolo, anche se lo fa in maniera molto più complicata. Inoltre si trova anche che $\xi(\frac{1}{2} + i\tau) = \xi(\frac{1}{2} - i\tau)$. Dunque, se $s = \frac{1}{2} + i\tau$ è uno zero non banale di $\zeta(s)$, anche il suo coniugato $\bar{s} = \frac{1}{2} - i\tau$ lo è, questa è la seconda proprietà che ricava il prof. O.O.A. Enoch nel suo articolo. Possiamo affermare che si tratta di proprietà abbastanza elementari, e di certo non possono bastare per dimostrare l'ipotesi di Riemann. Difficilmente i migliori matematici degli ultimi 150 anni si sarebbero lasciati sfuggire una dimostrazione basata esclusivamente su queste proprietà. In effetti, si sa molto di più sulla funzione Zeta e sulla funzione Xi. Ad esempio, circa il comportamento della funzione Xi vicino al punto $s = \frac{1}{2}$, si sa che $\xi(s)$ ha serie di Taylor in $s = \frac{1}{2}$ della forma

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2n},$$

e i coefficienti $\{a_{2n}\}$ hanno un'espressione esplicita. Per questa e altre proprietà della funzione Xi e della funzione Zeta si consiglia di consultare [3].

Infatti il punto essenziale dell'articolo del prof. Enoch è la sua affermazione che la funzione $\xi(s)$ si "comporta" come un polinomio di grado due vicino al punto $s = \frac{1}{2}$. A questo punto, facendo vedere che un polinomio di grado due con radici $a+ib$ e $a-ib$ è della forma $p(s) = s^2-2as+(a^2+b^2)$, e osservando che la derivata $p'(s) = 2s-2a$ si annulla solo per $s = a$, conclude la dimostrazione. Le radici del polinomio $p(s)$ hanno infatti parte reale uguale al punto in cui si annulla la derivata $p'(s)$. È abbastanza chiaro che questo ragionamento porterebbe ad una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann solo se la funzione $\xi(s)$ fosse esattamente un polinomio di grado due, e non se si "comportasse" come un polinomio in un qualsiasi senso. E certamente se la funzione Zeta o Xi fossero un polinomio di grado due, anche Eulero e Riemann se ne sarebbero probabilmente accorti!

Concludiamo qui l'analisi dell'articolo [1], che ci ha permesso di iniziare a parlare dell'ipotesi di Riemann. Come avete visto, non è stato semplice enunciare la congettura, e nemmeno definire gli oggetti in questione. Approfitteremo di altre presunte dimostrazioni per cercare di spiegare la relazione della funzione zeta con la distribuzione dei numeri primi, e magari anche idee che negli anni sono state esposte come possibili strade per una dimostrazione della congettura.

References

[1] O.O.A. Enoch, *On the turning point, critical line and the zeros of Riemann Zeta function*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, **vol. 6** (2012), pag. 279–282

[2] https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation/

[3] H.M. Edwards, "Riemann's zeta function". (reprint of the 1974 original Academic Press). Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001