Appunti di
Analisi Matematica Uno

E. Paolini

20 giugno 2019

INTRODUZIONE

Queste note sono nate come appunti per il corso di Analisi Matematica del corso di studi in Fisica dell'Università di Pisa negli anni accademici 2017/18 e 2018/19.

Queste note sono estensive, non c'è alcun tentativo di concisione. L'obiettivo è quello di raccogliere tutti quei risultati che non sempre è possibile esporre in maniera dettagliata e rigorosa a lezione. Troveremo, ad esempio, definizioni equivalenti della funzione esponenziale e una definizione analitica (tramite serie di potenze) delle funzioni trigonometriche (e di π). Proponiamo la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, della formula di Stirling e di Wallis, e dell'irrazionalità di e e di π. Viene proposta una definizione formale dei simboli di Landau o-piccolo e O-grande con i relativi teoremi per trattare queste espressioni. Lo stesso viene fatto per il simbolo di integrale indefinito. Vengono trattati quei risultati algebrici che permettono di giustificare gli algoritmi per il calcolo delle primitive delle funzioni razionali e per risolvere le equazioni differenziali lineari con il metodo di similarità.

Le note (come il corso a cui fanno riferimento) riguardano l'analisi delle funzioni di una variabile reale. Gli argomenti trattati sono serie e successioni numeriche, il calcolo differenziale e il calcolo integrale. Viene anche introdotta la convergenza uniforme allo scopo di considerare, come ultimo argomento, lo studio delle equazioni differenziali ordinarie. Da subito vengono introdotti i numeri complessi che vengono utilizzati laddove possono aiutare a dare una visione più unitaria e concettualmente più semplice degli argomenti trattati (in particolare nello studio delle serie di potenze e nella definizione delle funzioni trigonometriche).

I risultati più importanti sono marcati con degli asterischi sul margine della pagina: *** molto importante, ** importante, * rilevante. Il lettore è invitato a non perdere tempo sui risultati più marginali se i risultati importanti non sono del tutto chiari. Le figure non sono frequenti ma a margine di molte di esse è presente un *QR-code* (un quadrato formato da una nuvola di pixel) che permette di accedere alla figura *online* e modicarne i parametri. Nella versione PDF il *QR-code* è *cliccabile*. Nella versione cartacea si può usare la fotocamera del proprio *smartphone* per scansionare il codice e visitare la pagina corrispondente. In alternativa si può visitare la pagina `https://paolini.github.io/AnalisiUno/` dove sono inseriti tutti i collegamenti alle figure interattive. Queste note sono rese disponibili liberamente sia in formato PDF che in forma di sorgente LaTeX. Il materiale è costantemente in evoluzione e certamente contiene errori e incoerenze. Ogni suggerimento o commento è benvenuto!

CONTRIBUTI

Ringrazio gli studenti: Valerio Amico, Rico Bellani, Fabio Bensch, Davide Campanella Galanti, Alessandro Canzonieri, Luca Casagrande, Alessandro Casini, Tommaso Ceccotti, Luca Ciucci, Martino Dimartino, Luigina Mazzone, Michele Monti, Ruben Pariente, Paolo Pennoni, Davide Perrone, Lorenzo Pierfederici, Mattia Ripepe, Maria Antonella Secondo, Antonio Tagliente, Laura Toni, Giacomo Trupiano, Bianca Turini, Francesco Vaselli, Antoine Venturini, Matteo Vilucchio, Piero Viscone che hanno segnalato errori e correzioni.

Ringrazio i colleghi Vincenzo Tortorelli e Pietro Majer che mi hanno dato molti suggerimenti preziosi.

INDICE

1 INSIEMI NUMERICI

Supponiamo esista un insieme $\mathbb{R}$ su cui sono definite le operazioni $+$ e $\cdot$ e la relazione d'ordine $\leq$ che lo rendono un *campo ordinato continuo* come specificato nelle seguenti definizioni. Gli elementi di tale insieme verranno chiamati *numeri reali*. $\mathbb{R}$ numeri reali

Definizione 1.1 (campo). *Si dice* campo *un insieme X su cui sono definite le operazioni di somma $+$ e prodotto $\cdot$ che soddisfano le proprietà per ogni $x, y, z \in X$:* *campo*

1. *associativa:* $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
2. *commutativa:* $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$;
3. *distributiva:* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
4. *esistenza degli elementi neutri:* $0, 1 \in X$, $0 \neq 1$, $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$;
5. *esistenza dell'opposto: per ogni x esiste y tale che $x + y = 0$;*
6. *esistenza del reciproco: per ogni $x \neq 0$ esiste y tale che $x \cdot y = 1$.*

Definizione 1.2 (ordine totale). *Si dice* ordine totale *una relazione $\leq$ con le seguenti proprietà* *ordine totale* $\leq$

1. *dicotomica: $x \leq y$ o $y \leq x$;*
2. *riflessiva: $x \leq x$;*
3. *antisimmetrica: se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$;*
4. *transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$.*

Un insieme su cui è definita una relazione di ordine totale si dice essere totalmente ordinato.

Definiamo $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$ e definiamo le relazioni inverse $x \geq y$ se $y \leq x$ e $x > y$ se $y < x$. $\geq$ $<$ $>$

Definizione 1.3 (campo ordinato). *Un campo su cui è definito un ordinamento totale si dice essere un* campo ordinato *se le operazioni e l'ordinamento sono compatibili nel senso che valgono le seguenti proprietà:* *campo ordinato*

1. *positività: se* $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$ *allora* $x + y \geq 0$ *e* $x \cdot y \geq 0$*;*

2. *monotonia: se* $x \geq y$ *allora* $x + z \geq y + z$*.*

Dedekind-completo

Definizione 1.4 (proprietà di Dedekind o continuità)**.** *Diremo che un insieme X totalmente ordinato è* continuo *o* Dedekind-completo *se dati A e B sottoinsiemi non vuoti di X tali che* $A \leq B$ *(cioè: per ogni* $a \in A$ *e per ogni* $b \in B$ *vale* $a \leq b$*) allora esiste* $x \in X$ *tale che* $A \leq x \leq B$ *(cioè per ogni* $a \in A$ *e per ogni* $b \in B$ *vale* $a \leq x \leq b$*).* ***

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali soddisfa dunque, per ipotesi, tutte le definizioni precedenti. La proprietà di continuità, come vedremo, è quella che sta alla base dell'analisi matematica, ma prima di esaminare in dettaglio tale proprietà, vediamo le proprietà algebriche di $\mathbb{R}$.

Teorema 1.5. *In un campo ordinato valgono le seguenti familiari proprietà:*

1. *l'opposto e il reciproco sono unici (denotiamo con* $-x$ *l'unico opposto di x e con* x^{-1} *l'unico inverso di* $x \neq 0$*);*

2. $-(-x) = x$, $\left(x^{-1}\right)^{-1}$*;*

3. $x \cdot 0 = 0$*;*

4. $x \geq 0 \iff -x \leq 0$*;*

5. $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$*;*

6. $-x = (-1) \cdot x$*;*

7. $(-1) \cdot (-1) = 1$*;*

8. $x \cdot x \geq 0$*;*

9. $1 > 0$*;*

10. *se* $x \cdot y = 0$ *allora* $x = 0$ *o* $y = 0$*;*

11. *se* $x > 0$ *e* $y > 0$ *allora* $x \cdot y > 0$*.*

Dimostrazione.

1. Supponiamo y e z siano due opposti di x cioè $x + y = 0$, $x + z = 0$. Allora da un lato $x + y + z = 0 + z = z$, dall'altro $x + y + z = y + x + z = y + 0 = y$. Dunque $y = z$. Dimostrazione analoga si può fare per il reciproco.

2. Se x è opposto di y allora y è opposto di x in quanto la somma è commutativa. Dunque l'opposto di $-x$ è x cioè $-(-x) = x$. Lo stesso vale per il reciproco.

3. Si ha

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x + (-x) = x \cdot (0 + 1) + (-x) = x + (-x) = 0.$$

4. Se $x \geq 0$ sommando ad ambo i membri $-x$ si ottiene $x + (-x) \geq 0 + (-x)$ cioè $0 \geq -x$. Sommando x ad ambo i membri si riottiene $x \geq 0$.

5. Osserviamo che $(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0$ dunque $(-x) \cdot y$ è l'opposto di $x \cdot y$.

6. Dunque $(-1) \cdot x = -(1 \cdot x) = -x$

7. e per $x = -1$ si ottiene $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$.

8. Si ha
$$(-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot x = x \cdot x.$$
Dunque se $x \geq 0$ per assioma di positività abbiamo $x \cdot x \geq 0$ e se $x \leq 0$ abbiamo $-x \geq 0$ e quindi $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$.

9. In particolare per $x = 1$ otteniamo $1 \geq 0$. Essendo inoltre per assioma $0 \neq 1$ otteniamo $1 > 0$.

10. Se fosse $x \cdot y = 0$ e $x \neq 0$ allora x avrebbe inverso x^{-1} e avremmo:
$$y = x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 = 0.$$
Dunque o $x = 0$ oppure $y = 0$.

11. Se $x > 0$ e $y > 0$ allora $x \geq 0$ e $y \geq 0$ da cui $x \cdot y \geq 0$. Se fosse $x \cdot y = 0$ uno dei due fattori si dovrebbe annullare cosa che abbiamo escluso per ipotesi.

□

*** **Definizione 1.6** (valore assoluto). *Definiamo il* valore assoluto $|x|$ *di un numero* $x \in \mathbb{R}$ *nel seguente modo* *valore assoluto*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

** **Proposizione 1.7** (proprietà del valore assoluto). *Si ha*

1. $|x| \geq 0$ *(positività)*
2. $\big||x|\big| = |x|$ *(idempotenza)*
3. $|-x| = |x|$ *(simmetria)*
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *(omogenità)*
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(convessità)*
6. $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ *(disuguaglianza triangolare)*
7. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ *(disuguaglianza triangolare inversa)*

Useremo inoltre spesso la seguente equivalenza (valida anche con $<$ al posto di $\leq$). Se $r \geq 0$ allora

$$|x-y| \leq r \iff y-r \leq x \leq y+r.$$

Dimostrazione. Le prime quattro proprietà sono immediate conseguenze della definizione. *

Dimostriamo innanzitutto l'ultima osservazione. Se $x \geq y$ allora $x-y \geq 0$ e quindi $|x-y| \leq r$ è equivalente a $x-y \leq r$ cioè $x \leq y+r$. Se $x < y$ allora $x-y < 0$ e quindi $|x-y| \leq r$ è equivalente a $y-x \leq r$ cioè $x \geq y-r$. Viceversa se $y-r \leq x \leq y+r$ allora vale sia $x-y \leq r$ che $y-x \leq r$ e dunque $|x-y| \leq r$.

Osserviamo allora che per la precedente osservazione applicata a $|x-0| \leq |x|$ si ottiene

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e sommando la stessa disuguaglianza con y al posto di x si ottiene

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

che è equivalente alla proprietà di convessità:

$$|x+y| \leq \big||x|+|y|\big| = |x|+|y|.$$

Ponendo $y = z-x$ nella disuguaglianza precedente, si ottiene

$$|z| \leq |x| + |z-x|$$

da cui

$$|z| - |x| \leq |z-x|.$$

Scambiando z con x si ottiene la disuguaglianza opposta e mettendole assieme si ottiene la disuguaglianza triangolare inversa:

$$\big||z|-|x|\big| \leq |z-x|.$$

La disuguaglianza triangolare segue dalla convessità:

$$|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|.$$

□

Osserviamo che dal punto di vista geometrico $|x-y|$ rappresenta la *distanza* tra i punti x e y sulla retta reale.

Come applicazione dell'assioma di continuità possiamo mostrare l'esistenza della *radice quadrata*. Più avanti, con qualche strumento in più, rivedremo più in generale la costruzione della radice n-esima.

radice quadrata

Teorema 1.8 (radice quadrata). *Dato $y \geq 0$ esiste un unico $x \geq 0$ tale che $x^2 = y$. Tale x verrà denotato con $\sqrt{y}$,* radice quadrata *di y.* ***

$\sqrt{\cdot}$

* *Dimostrazione.* Se $y = 0$ allora è facile verificare che $x^2 = y$ ha come unica soluzione $x = 0$. Supponiamo allora $y > 0$ e consideriamo i seguenti due insiemi

$$A = \{x \geq 0 \colon x^2 \leq y\}, \qquad B = \{x \geq 0 \colon x^2 \geq y\}$$

e verifichiamo che soddisfino le ipotesi dell'assioma di continuità. Innanzitutto $0 \in A$ e quindi A non è vuoto. Neanche B è vuoto in quanto $y + 1 \in B$, infatti essendo $y + 1 \geq 1$ si ha $(y + 1)^2 \geq y + 1$. Verifichiamo inoltre che $A \leq B$. Preso $a \in A$ e $b \in B$ si ha $a^2 \leq y \leq b^2$. Se fosse $a > b$ dovremmo avere $a^2 > b^2$, dunque $a \leq b$.

Dunque possiamo applicare l'assioma di continuità che ci garantisce l'esistenza di $z \in \mathbb{R}$ tale che $A \leq z \leq B$. Vogliamo ora verificare che $z^2 = y$.

Ci servirà innanzitutto sapere che $z > 0$. Se $y \geq 1$ si avrebbe $1 \in A$ e dunque $z \geq 1$ essendo $z \geq A$. Se $y < 1$ allora $y^2 < y$ e dunque $y^2 \in A$ da cui si ottiene $z \geq y^2 > 0$.

Se fosse $z^2 < y$ vorremmo dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(z + \varepsilon)^2 \leq y$. Questo succede se $(z + \varepsilon)^2 = z^2 + 2\varepsilon z + \varepsilon^2 \leq y$ e si può ottenere, ad esempio, imponendo che sia $2\varepsilon z \leq (y - z^2)/2$ e $\varepsilon^2 \leq (y - z^2)/2$. Cioè (ricordiamo che $z > 0$) se $\varepsilon \leq (y - z^2)/(4z)$ e $\varepsilon \leq 1$ (in modo che $\varepsilon^2 \leq \varepsilon$) e $\varepsilon \leq (y - z^2)/2$. Dunque possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che

$$\varepsilon \leq 1, \qquad \varepsilon \leq \frac{y - z^2}{4z}, \qquad \varepsilon \leq \frac{y - z^2}{2}$$

(basta prendere il più piccolo dei tre numeri) si osserva allora che vale $(z + \varepsilon)^2 \leq y$. Dunque $z + \varepsilon \in A$ e dunque non può essere $z \geq A$.

Se fosse $z^2 > y$ vorremmo dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(z - \varepsilon)^2 \geq y$. Questo succede se $(z - \varepsilon)^2 = z^2 - 2\varepsilon z + \varepsilon^2 \geq y$. E' quindi sufficiente che sia $z^2 - 2\varepsilon z \geq y$ ovvero basta scegliere

$$\varepsilon = \frac{z^2 - y}{2z}.$$

Ma allora se $(z - \varepsilon)^2 \geq y$ si ha $z - \varepsilon \in B$ e dunque non può essere $z \leq B$.

Rimane dunque l'unica possibilità che sia $z^2 = y$, come volevamo dimostrare.

Se ci fosse un altro $w \geq 0$ tale che $w^2 = y$ si avrebbe $w^2 - z^2 = 0$ ovvero $(w - z)(w + z) = 0$ da cui (ricordando che $z > 0$ e quindi $w + z \neq 0$) si ottiene $w - z = 0$. Dunque $w = z$. □

1.1 I NUMERI NATURALI, INTERI, RAZIONALI

Definizione 1.9 (numeri naturali). *Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice essere* induttivo *se valgono le due proprietà:* *numeri naturali*

$$0 \in A,$$
$$n \in A \implies n + 1 \in A.$$

$\mathbb{N}$ *La famiglia di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$ non è vuota in quanto $\mathbb{R}$ stesso è induttivo. Definiamo $\mathbb{N}$ come l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$ (ovvero: il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$).*

Risulta immediato dimostrare che l'insieme $\mathbb{N}$ così definito soddisfa gli assiomi di Peano (si veda [5]) in particolare vale il seguente.

Teorema 1.10 (principio di induzione). *Se $P(n)$ è un predicato nella variabile $n \in \mathbb{N}$ tale che:*

1. *$P(0)$ è vero;*
2. *per ogni $n \in \mathbb{N}$ se $P(n)$ è vero allora anche $P(n+1)$ è vero.*

Allora $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Si consideri l'insieme $I = \{n \in \mathbb{N} \colon P(n) \text{ è vera}\}$. Le ipotesi del principio di induzione garantiscono che I sia induttivo (definizione 1.9) e quindi che $\mathbb{N} \subseteq I$. Dunque $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.11 (definizione per induzione). *Sia X un insieme, sia $\alpha \in X$ e sia $g \colon X \to X$ una funzione. Allora esiste una unica funzione $f \colon \mathbb{N} \to X$ tale che*

$$\begin{cases} f(0) = \alpha, \\ f(n+1) = g(f(n)). \end{cases} \tag{1}$$

Più in generale se abbiamo $\alpha \in X$ e una funzione $g \colon X \times \mathbb{N} \to X$ esisterà una unica funzione $f \colon \mathbb{N} \to X$ tale che

$$\begin{cases} f(0) = \alpha, \\ f(n+1) = g(n, f(n)). \end{cases} \tag{2}$$

Dimostrazione. Si rimanda agli appunti di logica [5] per una dimostrazione formale. Informalmente sarà possibile definire una funzione f_n sull'insieme dei primi $n+1$ numeri naturali che soddisfi le proprietà richieste. Bisognerà poi fare l'unione delle funzioni f_n per ottenere una funzione definita su tutto $\mathbb{N}$. □

numeri interi

numeri razionali

A partire da $\mathbb{N}$ si può costruire l'insieme $\mathbb{Z}$ dei *numeri interi* e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali*:

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R} \colon \exists n \in \mathbb{N} \colon (x = n) \vee (x = -n)\},$$
$$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{N} \setminus \{0\}} = \left\{x \in \mathbb{R} \colon \exists p \in \mathbb{Z} \colon \exists q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \colon x = \frac{p}{q}\right\}.$$

Si avrà dunque $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 1.12 (potenza intera). *Dato $x \in \mathbb{R}$ possiamo definire la potenza x^n per ogni $n \in \mathbb{N}$ come l'unica funzione che soddisfa la seguente definizione per induzione* *potenza intera* x^n

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{n+1} = x \cdot x^n. \end{cases}$$

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ possiamo anche definire x^{-n} con $n \in \mathbb{N}$ come

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Risulta quindi che x^n è definito per ogni $n \in \mathbb{Z}$ se $x \neq 0$.

In base alla definizione si ha $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$ e così via. Dunque in generale x^n è il prodotto di n fattori tutti uguali a x. Si osservi in particolare che abbiamo definito $0^0 = 1$. In alcuni testi si preferisce lasciare indefinito 0^0 ma vedremo che questa definizione risulterà molto utile e naturale.

Si osservi che la notazione x^{-1} appena introdotta coincide con l'inverso moltiplicativo che, per questo motivo, avevamo già denotato con x^{-1}.

Teorema 1.13 (proprietà delle potenze intere). *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, e per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti proprietà:*

1. $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$;
2. $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$;
3. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$;
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ *se* $y \neq 0$.

Le stesse proprietà valgono per $n, m \in \mathbb{Z}$ se $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo, come esempio, solamente la prima proprietà: $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$. Fissato $m \in \mathbb{N}$ procediamo per induzione su n. Se $n = 0$ si ha $x^{0+m} = x^m = x^m \cdot 1 = x^m \cdot x^0$. Supponendo la proprietà sia stata verificata per n, verifichiamo che vale anche con $n + 1$ al posto di n. Si ha infatti

$$x^{(n+1)+m} = x^{n+m+1} = x \cdot x^{n+m} = x \cdot x^n \cdot x^m = x^{n+1} \cdot x^m.$$

□

***Esercizio* 1.14.** Utilizzando il principio di induzione si dimostri che $2^n > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.15 (fattoriale). *Possiamo definire il* fattoriale *di un numero n, indicato con $n!$, come il prodotto dei numeri naturali da 1 a n:* *fattoriale*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Se $n = 0$ il prodotto è vuoto e quindi $0! = 1$, l'elemento neutro del prodotto. La definizione formale si ottiene mediante una definizione per induzione:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

A volte sarà utile considerare anche i prodotti di solamente i numeri pari o i numeri dispari fino ad un certo numero n. Questo si chiama doppio fattoriale *e si indica con $n!!$:*

doppio fattoriale

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \\ (2n+1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1). \end{aligned}$$

***Osservazione* 1.16.** Si osservi che risulta

$$(2n)!! = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot n) = 2^n \cdot n!$$

mentre

$$(2n+1)!! = 1 \cdot \frac{2}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4}{4} \cdot 5 \cdot \frac{6}{6} \cdots \frac{2n}{2n} \cdot (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}.$$

Queste formule permettono di esprimere il doppio fattoriale utilizzando il fattoriale (singolo) e le potenze.

***Esercizio* 1.17.** Si dia una definizione per induzione del doppio fattoriale e si dimostrino, per induzione, le formule nell'osservazione precedente.

In generale è possibile introdurre una notazione per ripetere le operazioni di somma e prodotto un numero arbitrario di volte:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f(k) &= f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \\ \prod_{k=1}^{n} f(k) &= f(1) \cdot f(2) \cdots f(n). \end{aligned}$$

Formalmente questo può essere fatto tramite una definizione per induzione, osservando che ogni somma (o prodotto) di n numeri si ottiene mediante la somma dei primi $n-1$ a cui si aggiunge (o si moltiplica) l'ultimo numero.

Definizione 1.18 (somme e prodotti). *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ e $f \colon \{a, a+1, a+2, \dots, b\} \to X$ è una funzione a valori in un insieme X in cui è definita una operazione $+$ di addizione (ad esempio $\mathbb{R}$) si definisce*

$$\sum_{a}^{b} f \qquad \textit{ovvero} \qquad \sum_{k=a}^{b} f(k).$$

tramite la definizione per induzione:

$$\sum_a^a f = f(a), \qquad \sum_a^{n+1} f = \left(\sum_a^n f\right) + f(n+1).$$

Analogamente si definisce

$$\prod_a^b f \qquad \textit{ovvero} \qquad \prod_{k=a}^b f(k)$$

quando su X è definita una operazione di moltiplicazione, ponendo:

$$\prod_a^a f = f(a), \qquad \prod_a^{n+1} f = \left(\prod_a^n f\right) \cdot f(n+1).$$

La definizione precedente ci permette, ad esempio, di definire le potenze e il fattoriale come prodotti ripetuti, almeno quando $n \geq 1$:

$$x^n = \prod_{k=1}^n x, \qquad n! = \prod_{k=1}^n k.$$

*** **Definizione 1.19** (coefficiente binomiale). *Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ il* coefficiente binomiale *coefficiente binomiale*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Per convenzione può essere utile porre $\binom{n}{k} = 0$ se $k \in \mathbb{Z}$ con $k < 0$ o $k > n$. Questa definizione verrà estesa nella definizione 5.73.

Si osservi che risulta

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1}\\ &= n(n-1)\cdots(n-k+1) = \prod_{j=1}^k (n+1-k)\end{aligned}$$

e questo permette in pratica di calcolare il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ svolgendo solamente k prodotti a numeratore e a denominatore, indipendentemente da quanto è grande n.

* **Teorema 1.20** (triangolo di Tartaglia). *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$ si ha*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

mentre

$$\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6	k
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
n	$\vdots$							$\ddots$

Tabella 1: Il triangolo di Tartaglia (o di Pascal).

Dimostrazione. La seconda parte si ottiene direttamente dalla definizione. Per la prima parte si ha:

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}
$$

□

In base al teorema precedente i coefficienti binomiali si possono elencare come nella tabella 1 partendo dalla prima riga e scrivendo in ogni riga successiva la somma dei due termini nella riga precedente sopra e a sinistra del numero considerato, immaginando che negli spazi vuoti ci siano degli zeri.

Teorema 1.21 (sviluppo binomiale). *Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha:* ***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}.$$

Dimostrazione. Lo dimostriamo per induzione su n. Per $n = 0$ l'uguaglianza è soddisfatta per verifica diretta (ambo i membri sono uguali ad 1).

Supponendo valida l'uguaglianza per un certo $n \in \mathbb{N}$ proviamo a verificarla per $n+1$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k\cdot b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k\cdot b^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che per $k<0$ e per $k>n$ il coefficiente binomiale è nullo. Sfruttando la relazione del triangolo di Tartaglia si ottiene infine, come volevamo dimostrare

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}.$$

□

Esercizio* 1.22** *(interpretazione combinatoria del coefficiente binomiale).** Il numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme con n elementi è $\binom{n}{k}$.

***Esercizio* 1.23.** Provare che

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

1.2 ESTREMO SUPERIORE

Si può verificare che $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato che però non soddisfa l'assioma di continuità. Infatti se consideriamo i due insiemi:

$$A = \{x\in\mathbb{Q}\colon x\ge 0, x^2\le 2\}, B = \{x\in\mathbb{Q}\colon x\ge 0, x^2\ge 2\}$$

si può verificare che A e B sono non vuoti, $A\le B$, ma l'elemento di separazione $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ non è elemento di $\mathbb{Q}$, in base al seguente classico risultato.

** **Teorema 1.24** (Pitagora)**.** *L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.*

* *Dimostrazione.* Supponiamo $x\in\mathbb{Q}$ sia una soluzione di $x^2=2$. Allora si potrà scrivere $x = p/q$ con $p\in\mathbb{Z}$ e $q\in\mathbb{N}$, $q\neq 0$. Possiamo anche supporre che la frazione p/q sia ridotta ai minimi termini cioè che p e q non abbiano fattori in comune. Moltiplicando l'equazione $(p/q)^2 = 2$

per q^2 si ottiene $p^2 = 2q^2$. Risulta quindi che p^2 è pari. Ma allora anche p è pari (perché il quadrato di un dispari è dispari). Ma se p è pari allora p^2 è multiplo di quattro. Ma allora anche $2q^2$ è multiplo di quattro e quindi q^2 è pari. Dunque anche q è pari. Ma avevamo supposto che p e q non avessero fattori in comune quindi questo non può accadere. □

irrazionale

Abbiamo quindi dimostrato che $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (diremo che $\sqrt{2}$ è *irrazionale*) e dunque $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$.

maggiorante *minorante* *limitato*

Definizione 1.25. *Siano $x \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Se $A \leq x$ (ovvero $a \leq x$ per ogni $a \in A$) diremo che x è un* maggiorante *di A. Se $x \leq A$ diremo invece che x è un* minorante *di A. Se A ammette un maggiorante diremo che A è* superiormente limitato*, se A ammette un minorante diremo che A è* inferiormente limitato, *se A ammette sia maggiorante che minorante diremo che A è* limitato. ***

Se $A \leq x$ e $x \in A$ diremo che x è il massimo di A, se $x \leq A$ e $x \in A$ diremo che x è il minimo di A

estremo superiore e inferiore

Se x è minimo dei maggioranti di A diremo che x è estremo superiore *di A se invece x è massimo dei minoranti diremo che x è* estremo inferiore *di A.*

Massimo e minimo di un insieme A, se esistono, sono unici. Infatti se x e y fossero due minimi di A si avrebbe $x \leq y$ in quanto $x \leq A$ e $y \in A$. Analogamente si avrebbe $y \leq x$ e quindi $x = y$. Ragionamento analogo se x e y fossero due massimi. Anche l'estremo superiore e l'estremo inferiore se esistono sono unici in quanto sono essi stessi un minimo ed un massimo (rispettivamente dei maggioranti e dei minoranti).

max min sup inf

Useremo quindi le notazioni:

$$\max A, \qquad \min A, \qquad \sup A, \qquad \inf A$$

per denotare univocamente (quando esistono) il massimo, il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme A.

Se l'insieme A è finito e non vuoto, il massimo e il minimo esistono sempre. Se, ad esempio, non esiste il massimo di A significa che scelto $x_k \in A$ esiste sempre $x_{k+1} \in A$ con $x_{k+1} > x$ e quindi l'insieme A deve contenere infiniti punti $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ Ad esempio l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x < 1\}$ non ha né massimo né minimo perché per ogni $x \in A$ si ha $\frac{x}{2} < x$, $\frac{1+x}{2} > x$ con $\frac{x}{2} \in A$ e $\frac{1+x}{2} \in A$, dunque nessun $x \in A$ può essere massimo o minimo.

Teorema 1.26 (esistenza del sup). *Se A è un insieme non vuoto, superiormente limitato, allora esiste l'estremo superiore di A. Tale numero $x = \sup A$ è caratterizzato dalle seguenti proprietà* **

1. $\forall a \in A \colon x \geq a$;

2. $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists a \in A \colon x < a + \varepsilon$.

Risultato analogo vale per l'estremo inferiore.

* *Dimostrazione.* Consideriamo l'insieme dei maggioranti $B = \{b \in \mathbb{R} : b \geq A\}$. Per ipotesi B è non vuoto e per come è definito risulta $A \leq B$. Dunque dall'assioma di continuità deduciamo l'esistenza di un numero $x \in \mathbb{R}$ tale che $A \leq x \leq B$. La prima disuguaglianza $A \leq x$ ci dice che x è un maggiorante e quindi $x \in B$, la seconda $x \leq B$ ci dice che x è il minimo di B e quindi concludiamo che x è l'estremo superiore di A.

La prima delle due proprietà caratterizzanti il sup traduce la condizione che x sia un maggiorante di A. La seconda delle due proprietà esprime il fatto che x sia il minimo dei maggioranti, infatti se x è il minimo dei maggioranti significa che nessun numero minore di x è un maggiorante, ovvero che ogni $x - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ non è un maggiorante, ovvero che esiste $a \in A$ tale che $a > x - \varepsilon$. □

La seguente proprietà dei numeri reali esprime il fatto che non esistono gli *infinitesimi* ovvero numeri reali positivi che siano più piccoli di ogni $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$.

** **Teorema 1.27** (proprietà archimedea dei numeri reali). *Dato $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. E se $x > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $1/m < x$.* *proprietà archimedea*

* *Dimostrazione.* Se esistesse $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq \mathbb{N}$ allora $\mathbb{N}$ sarebbe superiormente limitato. Dunque avrebbe un estremo superiore $m = \sup \mathbb{N}$. Siccome m è il minimo dei maggioranti di $\mathbb{N}$ e $m - 1$ è più piccolo di m, allora $m - 1$ non è un maggiorante di $\mathbb{N}$. Dunque deve esistere $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > m - 1$. Ma allora $n + 1 > m$ ed essendo $n + 1 \in \mathbb{N}$ troviamo che m non poteva essere un maggiorante di $\mathbb{N}$.

Dunque per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > y$. Se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ allora posto $y = 1/x$ possiamo trovare $n \in \mathbb{N}$ con $n > y = 1/x$ da cui $x > 1/n$. □

* **Teorema 1.28** (parte intera). *Dato $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico $m \in \mathbb{Z}$ tale che $m - 1 \leq x < m$.*

Dimostrazione. Supponiamo per un attimo che sia $x \geq 1$. In tal caso consideriamo l'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$. Per la proprietà archimedea tale insieme non può essere vuoto e, per il buon ordinamento di $\mathbb{N}$ (si vedano gli appunti di logica), deve avere un minimo m. Dunque $m > x$ (in quanto $m \in A$) e $m \geq 1$ (in quanto $x \geq 1$). Quindi necessariamente $m - 1 \leq x$ altrimenti avremmo che $m - 1 \in A$ e m non poteva essere il minimo. Si ottiene dunque $m - 1 \leq x < m$ come volevamo dimostrare.

Nel caso fosse $x < 1$ possiamo trovare un $N \in \mathbb{N}$ (sempre per la proprietà archimedea) per cui $x + N \geq 1$. Applicando il ragionamento precedente a $x + N$ si trova comunque il risultato desiderato. □

** **Definizione 1.29** (parte intera). *Dato $x \in \mathbb{R}$ denotiamo con $\lfloor x \rfloor$ l'unico intero che soddisfa* *parte intera* $\lfloor \cdot \rfloor$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

$\lceil\cdot\rceil$ *e denotiamo con* $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ *l'unico intero che soddisfa (verificare!)*

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

Si ha dunque

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$$

con entrambe le uguaglianze che si realizzano quando $x \in \mathbb{Z}$. *I due interi* $\lfloor x \rfloor$ *e* $\lceil x \rceil$ *sono la migliore approssimazione intera di x rispettivamente per difetto e per eccesso. L'intero più vicino ad x (approssimazione per* arrotondamento*) è*

arrotondamento

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \textit{ossia} \quad \left\lceil x - \frac{1}{2} \right\rceil$$

(le due espressioni differiscono solamente quando x si trova nel punto medio tra due interi consecutivi, nel qual caso la prima approssima per eccesso e la seconda per difetto).

In alcuni testi si usa la notazione $[x]$ per denotare la parte intera $\lfloor x \rfloor$ e si definisce anche la *parte frazionaria*

$$\{x\} = x - [x]$$

per evitare ambiguità con il normale utilizzo delle parentesi noi preferiremo evitare queste notazioni.

densità di $\mathbb{Q}$

Teorema 1.30 (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *Dati* $x, y \in \mathbb{R}$ *con* $x < y$ *esiste* $q \in \mathbb{Q}$ *tale che* $x < q < y$. *

Dimostrazione. Per la proprietà archimedea dei numeri reali essendo $y - x > 0$ deve esistere $n \in \mathbb{N}$ tale che $y - x > 1/n$ così si avrà

$$nx + 1 < ny.$$

Prendiamo allora $m = \lfloor nx + 1 \rfloor$ cosicché si abbia

$$nx < m \leq nx + 1.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze e dividendo per n si ottiene, come volevamo dimostrare,

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

□

1.3 REALI ESTESI

$\bar{\mathbb{R}}$

$+\infty, -\infty$

Definizione 1.31 (reali estesi). *Denotiamo con* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *l'insieme dei numeri reali a cui vengono aggiunti due ulteriori* quantità *che chiameremo* infinite *e che denotiamo con* $+\infty$ *e* $-\infty$. *Diremo che* $x \in \bar{\mathbb{R}}$ *è* finito *se* $x \in \mathbb{R}$.

Estendiamo la relazione d'ordine imponendo che valga

$$-\infty \leq x \leq +\infty, \qquad \forall x \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Estendiamo anche la addizione e moltiplicazione tra reali estesi imponendo che valga per ogni $x \in \bar{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} x + (+\infty) &= +\infty, \qquad \text{se } x \neq -\infty \\ x + (-\infty) &= -\infty, \qquad \text{se } x \neq +\infty \end{aligned}$$

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \qquad x \cdot (-\infty) = -\infty, \qquad \text{se } x > 0$$
$$x \cdot (+\infty) = -\infty, \qquad x \cdot (-\infty) = +\infty, \qquad \text{se } x < 0.$$

Si definiscono anche:

$$-(+\infty) = -\infty, \qquad -(-\infty) = +\infty, \qquad \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

facendo però attenzione che questi formalmente non sono *opposto* e *reciproco* in quanto su $\bar{\mathbb{R}}$ non sono più garantite le regole: $x + (-x) = 0$ e $x \cdot (1/x) = 1$. Infatti le operazioni $(+\infty) + (-\infty)$ e $+\infty \cdot 0$ vengono lasciate indefinite.

Definiamo anche il valore assoluto: $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Possiamo infine definire la sottrazione e la divisione tramite addizione e moltiplicazione:

$$x - y = x + (-y), \qquad \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

Possiamo definire gli operatori sup e inf anche sugli insiemi illimitati ponendo:

$$\begin{aligned} \sup A &= +\infty \qquad \text{se } A \text{ non è superiormente limitato} \\ \inf A &= -\infty \qquad \text{se } A \text{ non è inferiormente limitato.} \end{aligned}$$

Osserviamo infatti che su $\bar{\mathbb{R}}$ la quantità $+\infty$ è maggiorante di qualunque insieme e $-\infty$ è minorante, dunque queste definizioni mantengono su $\bar{\mathbb{R}}$ le proprietà caratterizzanti: l'estremo superiore è il minimo dei maggioranti e l'estremo inferiore è il massimo dei minoranti. Definiamo infine

$$\begin{aligned} \sup \emptyset &= -\infty \\ \inf \emptyset &= +\infty. \end{aligned}$$

Queste ultime definizioni possono essere comprese da un punto di vista strettamente logico: ogni numero reale è sia maggiorante che minorante dell'insieme vuoto, dunque il minimo dei maggioranti non esiste in $\mathbb{R}$ ma in $\bar{\mathbb{R}}$ è $-\infty$ e il massimo dei minoranti è $+\infty$.

1.4 INTERVALLI

intervallo **Definizione 1.32** (intervallo)**.** *Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice essere un* intervallo *se soddisfa la* proprietà dei valori intermedi*:*

$$\textit{se } x, y \in I \textit{ e } x < z < y \textit{ allora } z \in I.$$

Teorema 1.33 (caratterizzazione intervalli)**.** *Sia I un intervallo e sia $a = \inf I$, $b = \sup I$. Allora $z \in I$ se $a < z < b$.*

Dimostrazione. Se $I = \emptyset$ si ha $a > b$ e quindi nessun z verifica $a < z < b$. Supponiamo $I \neq \emptyset$ e sia $a < z < b$. Visto che a è il massimo dei minoranti di I deve esistere $x \in I$ tale che $a \leq x < z$ altrimenti ogni x tra a e z sarebbe un minorante di I e a non sarebbe il minimo. Analogamente dovrebbe esistere $y \in I$ con $z < y \leq b$. Ma allora, per la proprietà dei valori intermedi anche $z \in I$. □

Il teorema precedente ci dice che una volta identificati i due estermi di un intervallo, tutti i punti intermedi devono stare nell'intervallo. Gli estremi, invece, possono essere o non essere inclusi nell'intervallo. Punti esterni agli estremi non possono invece esserci. Possiamo quindi caratterizzare tutti gli intervalli di $\bar{\mathbb{R}}$ introducendo le seguenti notazioni. Dati $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ con $a \leq b$ poniamo

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \colon a \leq x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \colon a \leq x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \colon a < x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in \bar{\mathbb{R}} \colon a < x < b\}.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi utilizzato le parentesi quadre per indicare che gli estremi sono inclusi e le parentesi tonde per indicare che gli estremi sono esclusi. Osserviamo che in alcuni testi si usano le parentesi quadre rovesciate al posto delle parentesi tonde.

Noi considereremo per lo più intervalli di $\mathbb{R}$ (non di $\bar{\mathbb{R}}$): in tal caso gli estremi infiniti non potranno mai essere inclusi nell'intervallo.

1.5 I NUMERI COMPLESSI

numeri complessi Dal punto di vista geometrico l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* può essere visto come un modello del piano euclideo. Il piano euclideo è uno spazio affine reale di dimensione 2. Possiamo mettere delle coordinate sul piano se fissiamo un punto O (origine) e due vettori ortonormali e_1, e_2. Chiamiamo 0 il vettore nullo OO e chiamiamo 1 il vettore e_1. La retta passante per O con direzione e_1 rappresenta i numeri reali $\mathbb{R}$. Chiamiamo i il vettore e_2. La retta passante per O con direzione e_2 verrà chiamata *retta dei numeri immaginari*.

Un generico punto del piano z potrà essere scritto in maniera univoca nella base scelta: $z = xe_1 + ye_2$ ovvero, per come abbiamo definito e_1 ed e_2:

$$z = x + iy.$$

Tale z viene chiamato *numero complesso* con parte reale x e parte immaginaria y. Questa rappresentazione del numero complesso z viene chiamata *rappresentazione cartesiana* in quanto definisce il punto z del piano complesso tramite le sue coordinate cartesiane x e y. I numeri reali sono *immersi* nei complessi, nel senso che se $x \in \mathbb{R}$ allora $z = x + i \cdot 0 = x$ è anche un numero complesso. Il numero complesso $i = 0 + i \cdot 1$ viene chiamata *unità immaginaria* e i numeri complessi della forma iy sono chiamati *immaginari*. Un numero complesso $z = x + iy$ è quindi una somma tra un numero reale ed un numero immaginario. Il numero reale x viene chiamato *parte reale* di z e si denota a volte con $x = \operatorname{Re} z$. Il numero reale y viene chiamato *parte immaginaria* di z e si denota con $y = \operatorname{Im} z$ (osserviamo che la parte immaginaria di un numero complesso è un numero reale, non immaginario). Dunque $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

rappresentazione cartesiana

unità immaginaria

$\operatorname{Re} z$

$\operatorname{Im} z$

L'insieme dei numeri complessi viene denotato con $\mathbb{C}$. Lo spazio $\mathbb{C}$, per come è stato costruito, è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2. Abbiamo quindi già definite la *addizione* tra elementi di $\mathbb{C}$ e la moltiplicazione tra elementi di $\mathbb{C}$ ed elementi di $\mathbb{R}$. Se $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$ si ha:

addizione

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d), \\ t(a + ib) &= ta + itb. \end{aligned}$$

Vogliamo estendere la *moltiplicazione* a tutte le coppie di numeri complessi. Imponendo (arbitrariamente) che valga $i \cdot i = -1$ e che rimanga valida la proprietà distributiva, si ottiene questa definizione:

moltiplicazione

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Si può verificare che questa moltiplicazione estende quella "scalare" definita in precedenza. E' facile verificare che addizione e moltiplicazione soddisfano le proprietà commutativa associativa e distributiva, 0 è elemento neutro per la addizione, 1 è elemento neutro della moltiplicazione. Si osservi che se $z = x + iy$ non è nullo, allora

$$(x + iy) \cdot \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = 1.$$

Significa che ogni $z \neq 0$ ammette inverso moltiplicativo e quindi $\mathbb{C}$ risulta essere un campo.

Osserviamo che su $\mathbb{C}$ non si definisce una operazione d'ordine perché in effetti non è possibile definire un ordine "compatibile" con le operazioni appena definite.

coniugato Su $\mathbb{C}$ definiamo delle ulteriori operazioni. Il *coniugato* di un numero complesso $z = x + iy$ è il numero $\bar{z} = x - iy$. Geometricamente l'operazione di coniugio è una simmetria rispetto alla retta reale. I numeri reali sono in effetti punti fissi del coniugio (il coniugato di un numero reale è il numero stesso). E' un semplice esercizio verificare che il coniugio "attraversa" somma e prodotto:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Ovviamente risulta $\bar{\bar{z}} = z$. E' anche utile osservare che si ha:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i} \tag{3}$$

e

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

modulo Possiamo allora definire il *modulo* di un numero complesso $z = x + iy$ come il numero reale

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geometricamente tale quantità rappresenta la distanza del punto z dal punto 0 e quindi la distanza tra due numeri complessi z e w si potrà rappresentare con $|z - w|$.

Osserviamo che se $z = x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ il modulo di z coincide con il valore assoluto: $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ e per questo motivo non distinguiamo, nelle notazioni, il modulo dal valore assoluto. Più in generale risulta per ogni $z \in \mathbb{C}$ (la verifica è immediata):

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Possiamo a questo punto trovare una utile formula per calcolare il reciproco di un numero complesso. Essendo infatti $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ si osserva che

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} \cdot z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Teorema 1.34. *Il modulo di un numero complesso soddisfa (come il valore assoluto) le seguenti proprietà*

1. $\big||z|\big| = |z|$,

2. $|-z| = |z| = |\bar{z}|$,

3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(convessità)*,

5. $|z - w| \leq |z - v| + |v - w|$ *(disuguaglianza triangolare)*,

Dimostrazione. La prima proprietà è ovvia in quanto il valore assoluto di un numero reale non negativo è il numero stesso.

La seconda proprietà viene immediatamente dalla definizione.

Per la terza proprietà sia $z = x + iy$, $w = a + ib$. Allora:

$$\begin{aligned}
|z \cdot w| = |(x+iy)\cdot(a+ib)| &= |xa - yb + i(xb+ay)| \\
&= \sqrt{(xa-yb)^2 + (xb+ay)^2} \\
&= \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 - 2xayb + x^2b^2 + a^2y^2 + 2xbay} \\
&= \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + a^2y^2} \\
&= \sqrt{x^2(a^2+b^2) + y^2(a^2+b^2)} \\
&= \sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)} = |x+iy| \cdot |a+ib| \\
&= |z| \cdot |w|.
\end{aligned}$$

Per la quarta disuguaglianza osserviamo che si ha

$$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\cdot\bar{w} + \bar{z}\cdot w$$

e visto che

$$z\cdot\bar{w} + \bar{z}\cdot w = z\cdot\bar{w} + \overline{z\cdot\bar{w}} = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) \le 2|z\bar{w}| = 2|z|\cdot|\bar{w}| = 2|z|\cdot|w|$$

otteniamo

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\cdot|w| = (|z|+|w|)^2$$

che è equivalente alla disuguaglianza di convessità.

La disuguaglianza triangolare è conseguenza immediata della convessità, infatti

$$|z-w| = |(z-v)+(v-w)| \le |z-v| + |v-w|.$$

□

Anche lo spazio dei numeri complessi può essere esteso aggiungendoci un punto all'*infinito*. A differenza dei reali, su cui era presente un ordinamento che era utile conservare, nel caso dei numeri complessi è più usuale utilizzare un unico punto infinito che si denota con ∞. Definiamo lo spazio dei complessi estesi $\bar{\mathbb{C}}$ come

infinito

∞

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Definiamo

$$\begin{aligned} z+\infty &= \infty \qquad \forall z \in \bar{\mathbb{C}} \\ z-\infty &= \infty \qquad \forall z \in \bar{\mathbb{C}} \\ z\cdot\infty &= \infty \qquad \forall z \in \bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\} \\ z/\infty &= 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \\ z/0 &= \infty \qquad \forall z \in \bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\} \\ |\infty| &= +\infty \in \bar{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Si noti che abbiamo definito la divisione per zero di numeri complessi (e quindi anche reali) diversi da zero. Il risultato è ∞ e quindi rimane confermato che la divisione per zero non è una operazione valida se vogliamo un risultato finito. Una quantità $z \in \bar{\mathbb{C}}$ sarà detta *finita* se $z \in \mathbb{C}$.

2

SUCCESSIONI

Una *successione* in un insieme X è una funzione[1] $\boldsymbol{a}\colon \mathbb{N} \to X$. L'insieme delle funzioni $\mathbb{N} \to X$ viene usualmente indicato con $X^{\mathbb{N}}$. In effetti una successione $\boldsymbol{a}$ può essere interpretata come una sequenza di elementi di X con infinite componenti: successione

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

dove si intende

$$a_n = \boldsymbol{a}(n).$$

Le componenti a_n si chiamano *termini* della successione. I numeri n si chiamano, invece, *indici*. L'intera successione $\boldsymbol{a}$ può essere indicata con $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ oppure $(a_n)_n$ oppure, più semplicemente, con a_n quando sia chiaro che si intende l'intera successione $\boldsymbol{a}$ e non un singolo termine della stessa.

Per noi il caso più interessante sarà per quello delle *successioni reali* $a_n \in \mathbb{R}$ cioè il caso $X = \mathbb{R}$. Considereremo però anche il caso di *successioni complesse* $a_n \in \mathbb{C}$ (dunque $X = \mathbb{C}$).

Le successioni vengono usualmente considerate nei procedimenti di approssimazione. Spesso infatti siamo interessati a capire qual è il numero (se esiste) a cui la successione si avvicina al crescere di n.

*** **Definizione 2.1** (successione convergente). *Diremo che una successione $a_n \in \mathbb{R}$ converge ad un numero $\ell \in \mathbb{R}$ ovvero ha limite finito e scriveremo:* *convergenza*

$$a_n \to \ell \qquad (\textit{per } n \to +\infty)$$

$a_n \to \ell$

se scelto comunque un errore $\varepsilon > 0$ ogni termine della successione, da un certo punto in poi, si trova a distanza inferiore di ε dal punto limite ℓ. Formalmente:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon n > N \implies |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

La stessa definizione è valida per le successioni complesse $a_n \in \mathbb{C}$ dove il simbolo $|\cdot|$ rappresenta il modulo complesso invece che il valore assoluto. Si ottiene che $a_n \to \ell \in \mathbb{C}$ se e solo se $|a_n - \ell| \to 0$ (si osservi che $|a_n - \ell|$ è una successione reale).

1 Nella scrittura a mano si sottolineano i caratteri invece di utilizzare il grassetto: scriveremo $\underline{a}$ invece che $\boldsymbol{a}$.

***Esempio* 2.2.** La successione $a_n = \frac{n}{n+1}$ converge a $\ell = 1$:

$$\frac{n}{n+1} \to 1 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$ ci chiediamo quali siano gli indici n per i quali risulta $|a_n - 1| < \varepsilon$ e troviamo che devono valere due disequazioni:

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \varepsilon.$$

Facilmente possiamo osservare che $n/(n+1) < 1$ per ogni n, dunque la seconda disequazione è sempre verificata. La prima disequazione si riconduce a

$$n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dunque qualunque sia $\varepsilon > 0$, scelto $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ sappiamo che per ogni $n > N$ si ha $n + 1 > n > N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ e quindi $1 - \varepsilon < a_n$. Inoltre la disuguaglianza $a_n < 1 < 1 + \varepsilon$ è verificata per ogni n. Abbiamo quindi verificato che vale la condizione che definisce la convergenza. □

***Esercizio* 2.3.** Una successione complessa $z_n \in \mathbb{C}$ potrà essere scritta nella forma $z_n = x_n + iy_n$ dove x_n e y_n sono successioni reali. Si può allora verificare che $z_n \to z$ per $z \in \mathbb{C}$ se e solo se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ dove $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

Le successioni reali possono anche avere limite infinito, in tal caso si dice che divergono.

divergente $a_n \to +\infty$

Definizione 2.4 (successione divergente). *Una successione $a_n \in \mathbb{R}$ si dice avere limite $+\infty$ o divergere a $+\infty$* ***

$$a_n \to +\infty \qquad (\text{per } n \to +\infty)$$

se comunque si scelga un numero reale, anche molto grande, ogni termine della successione, da un certo punto in poi, risulta essere maggiore di tale numero scelto. Formalmente

$$\forall M \in \mathbb{R} \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon n > N \implies a_n > M.$$

$a_n \to -\infty$ *Definizione analoga si ha per il limite $-\infty$. Scriveremo*

$$a_n \to -\infty \qquad (\text{per } n \to +\infty)$$

se $-a_n \to +\infty$ ovvero se

$$\forall M \in \mathbb{R} \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon n > N \implies a_n < -M.$$

Se a_n è una successione complessa diremo che $a_n \to \infty$ se $|a_n| \to +\infty$ (si osservi che $|a_n|$ è una successione reale).

Esempio 2.5. Si ha
$$1000 - n^2 \to -\infty.$$

Dimostrazione. Per dimostrare che $1000 - n^2 \to -\infty$ sarà necessario trovare per ogni $M \in \mathbb{R}$ dei valori di n per i quali si abbia $1000 - n^2 < -M$. Questo avviene se $n^2 > 1000 + M$. Visto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $n^2 \geq n$ (verificare!) sappiamo che se $n > 1000 + M$ allora anche $n^2 > 1000 + M$. Dunque per ogni M sarà sufficiente considerare un numero intero $N \geq 1000 + M$ (ad esempio si potrebbe scegliere $N = \max\{0, \lceil 1000 + M \rceil\}$) cosicché per ogni $n > N$ si avrebbe:

$$a_n = 1000 - n^2 \leq 1000 - n < 1000 - N \leq 1000 - (1000 + M) = -M$$

come richiesto dalla definizione di limite $-\infty$. □

Volendo esprimere il concetto di limite in maniera uniforme (senza dover distinguere limiti finiti e infiniti) possiamo rendere la definizione un poco più astratta introducendo il concetto di *intorno*. La condizione $|a_n - \ell| < \varepsilon$ può essere scritta in modo equivalente come $a_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. L'insieme $B_\varepsilon(\ell) = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ si chiama *intorno simmetrico* di raggio ε centrato in ℓ. Possiamo quindi considerare la famiglia di tutti questi intorni del punto ℓ: intorno simmetrico

$$\mathcal{B}_\ell = \{B_\varepsilon(\ell) \colon \varepsilon > 0\}.$$

Questa famiglia di insiemi si chiama *base di intorni* del punto ℓ. La definizione di limite finito si può dunque riscrivere così: base di intorni

$$a_n \to \ell \qquad \iff \qquad \forall B \in \mathcal{B}_\ell \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n > N \colon a_n \in B.$$

Il vantaggio di questa *astrazione* è che ora possiamo definire gli intorni di $+\infty$ e di $-\infty$ nel modo seguente:

$$\mathcal{B}_{+\infty} = \{(M, +\infty] \colon M \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{B}_{-\infty} = \{[-\infty, -M) \colon M \in \mathbb{R}\}$$

e la definizione data per il caso ℓ finito risulta valida anche nel caso in cui ℓ sia infinito.

In generale se per ogni punto x di un insieme X specifichiamo quale sia una base di intorni $\mathcal{B}_x$ di x, potremo definire i limiti delle successioni a valori in X. Nel caso $X = \mathbb{C}$ gli intorni di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ sono gli insiemi (palle) della forma:

$$B_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < \rho\}$$

e dunque $\mathcal{B}_z = \{B_\rho(z) \colon \rho > 0\}$. Se $X = \bar{\mathbb{C}}$ dovremo definire anche gli intorni di ∞ ad esempio come:

$$\mathcal{B}_\infty = \{\mathbb{C} \setminus B_\rho(0) \colon \rho > 0\}.$$

Definizione 2.6 (definizione topologica di limite)**.** *Sia X uno spazio topologico (cioè un insieme tale che per ogni $x \in X$ è definita una famiglia $\mathcal{U}_x$ di sottoinsiemi di X che chiameremo* base di intorni*). Sia $a_n \in X$ una successione e sia $\ell \in X$. Diremo che a_n ha limite ℓ e scriveremo*

$$a_n \to \ell$$

se

$$\forall U \in \mathcal{U}_\ell \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon n > N \implies a_n \in U.$$

definitivamente

Definizione 2.7 (proprietà frequenti e definitive)**.** *Sia $P(n)$ un predicato dipendente da un numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Diremo che $P(n)$ vale* definitivamente *(in n) se*

$$\exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n > N \colon P(n).$$

frequentemente

Diremo che $P(n)$ vale frequentemente *(in n) se*

$$\forall N \in \mathbb{N} \colon \exists n > N \colon P(n).$$

Chiaramente se una proprietà vale definitivamente vale anche frequentemente. E dire che vale frequentemente è equivalente a dire che l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \colon P(n)\}$ è infinito (cioè la proprietà vale per infiniti valori di $n \in \mathbb{N}$).

Le due proprietà sono complementari nel senso che vale la seguente relazione:

$$\text{non frequentemente } P(n) \iff \text{definitivamente non } P(n)$$

Se due proprietà $P(n)$ e $Q(n)$ valgono definitivamente allora anche $P(n) \wedge Q(n)$ vale definitivamente. Se invece valgono entrambe frequentemente allora anche $P(n) \vee Q(n)$ vale frequentemente.

***Esempio* 2.8.** La proprietà

$$n \text{ è un numero pari}$$

vale frequentemente in n. La proprietà

$$n! > 2^n$$

vale definitivamente in n.

La definizione di limite $a_n \to \ell$ potrebbe quindi enunciarsi così: per ogni intorno B di ℓ si ha $a_n \in B$ definitivamente. E la sua negazione è: esiste un intorno B di ℓ per cui frequentemente $a_n \notin B$.

Teorema 2.9 (proprietà di separazione di $\bar{\mathbb{R}}$ e $\bar{\mathbb{C}}$)**.** *Punti distinti $\ell_1 \neq \ell_2$ in $\bar{\mathbb{R}}$ o in $\bar{\mathbb{C}}$ ammettono intorni disgiunti $B_1 \in \mathcal{B}_{\ell_1}$, $B_2 \in \mathcal{B}_{\ell_2}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.*

Dimostrazione. Consideriamo innanzitutto $\ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{R}}$. Se ℓ_1 ed ℓ_2 sono entrambi finiti, è sufficiente considerare $\varepsilon = |\ell_2 - \ell_1|/2$. Dall'interpretazione geometrica risulta chiaro che gli intorni $B_1 = B_\varepsilon(\ell_1)$ e

$B_2 = B_\varepsilon(\ell_2)$ sono disgiunti. Algebricamente questo si ottiene applicando opportunamente la disuguaglianza triangolare per il valore assoluto.

Se ℓ_1 ed ℓ_2 sono entrambi infiniti e sono diversi, possiamo supporre $\ell_1 = -\infty$ e $\ell_2 = +\infty$. In tal caso gli intorni $B_1 = [-\infty, 0)$ e $B_2 = (0, +\infty]$ sono disgiunti. Se ℓ_1 è finito e $\ell_2 = +\infty$, basterà prendere $B_1 = (\ell_1 - 1, \ell_1 + 1)$ ed $B_2 = (\ell_1 + 1, +\infty]$ per avere due intorni disgiunti. Analogamente si procederà nel caso $\ell_2 = -\infty$.

Per $\ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{C}}$ la dimostrazione si fa in maniera del tutto analoga: per due punti in $\mathbb{C}$ si può prendere come $\varepsilon = |\ell_2 - \ell_1|/2$ metà della distanza tra i due punti: la disuguaglianza triangolare del modulo garantirà che $B_\rho(\ell_1) \cap B_\rho(\ell_2) = \emptyset$ Se uno dei due punti è $\ell_2 = +\infty$ e l'altro è $\ell_1 \in \mathbb{C}$ si potrà prendere $B_1(\ell_1)$ l'intorno di raggio unitario di ℓ_2 e $\mathbb{C} \setminus B_{|\ell_2|+1}(0)$ come intorno del punto ∞. La disuguaglianza triangolare ci assicura che questi due intorni sono disgiunti, come ovvio da una interpretazione geometrica. $\square$

Teorema 2.10 (unicità del limite)**.** *Sia a_n una successione a valori reali e siano $\ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ tali che* *unicità del limite*

$$a_n \to \ell_1, \qquad a_n \to \ell_2.$$

Allora si ha $\ell_1 = \ell_2$ (il limite, se esiste, è unico). Lo stesso vale per le successioni a valori complessi che hanno limite $\ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{C}}$.

Dimostrazione. Questo risultato discende direttamente dalla proprietà enunciata nel teorema 2.9. Se una successione avesse due limiti diversi allora potrei trovare due intorni disgiunti dei due punti limite e la definizione di limite mi direbbe che la successione deve stare definitivamente in ognuno dei due intorni. Questo è impossibile. $\square$

Osserviamo che non è detto che un limite esista, come si vede dal seguente esempio.

Esempio 2.11. Sia $a_n = (-1)^n$. Non esiste $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ tale che $a_n \to \ell$.

Dimostrazione. La successione a_n ha come valori solamente i numeri 1 e -1, infatti se n è pari si ha $(-1)^n = 1$ e se n è dispari $(-1)^n = -1$. Supponiamo per assurdo che la successione abbia limite ℓ e consideriamo l'intorno $B = (\ell - 1, \ell + 1)$. Se $\ell \geq 0$ certamente $-1 \notin B$ in quanto $\ell - 1 \geq -1$. Se invece $\ell \leq 0$ certamente $1 \notin B$ in quanto $\ell + 1 \leq 1$. Dunque frequentemente $a_n \notin B$ che significa che non può essere $a_n \to \ell$. $\square$

Abbiamo dunque osservato che in generale il limite di una successione può non esistere ma se esiste è unico. Questo ci permette di definire l'operatore di limite che associa ad ogni successione che ammette limite il suo (unico) limite in $\bar{\mathbb{R}}$: $\lim a_n$

$$\lim a_n = \ell \qquad \text{se} \qquad a_n \to \ell.$$

Per esplicitare il fatto che a_n rappresenta una intera successione e non un singolo valore, (cioè n è una variabile muta) si potrà anche scrivere

$$\lim_n a_n \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Definizione 2.12 (carattere di una successione). *Sia a_n una successione a valori reali o complessi. Se a_n non ammette limite si dice anche che a_n è* indeterminata *(si intende che è indeterminato il suo limite!). Abbiamo dunque le seguenti alternative* ***

successione indeterminata

1. *la successione è convergente (ha limite finito);*
2. *la successione è divergente (ha limite infinito);*
3. *la successione è indeterminata (non ha limite).*

carattere di una successione

Determinare il carattere *di una successione significa specificare a quale delle tre categorie appartiene.*

2.1 CRITERI DI CONVERGENZA

Teorema 2.13 (criteri di confronto). *Siano a_n, b_n e c_n successioni a valori reali[2].* ***

confronto tra limiti

1. *Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*
$$a_n \le b_n$$
e se entrambe le successioni ammettono limite: $a_n \to a$ e $b_n \to b$ allora
$$a \le b.$$

2. *Supponiamo per ogni n si abbia:*
$$a_n \le b_n$$
Se $a_n \to +\infty$ allora $b_n \to +\infty$. Se $b_n \to -\infty$ allora $a_n \to -\infty$.

teorema dei carabinieri

3. *(teorema dei carabinieri) Se per ogni n vale*
$$a_n \le b_n \le c_n$$
e se le due successioni a_n e c_n hanno lo stesso limite: $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$ allora anche $b_n \to \ell$.

Dimostrazione. **

1. Se per assurdo fosse $a > b$ esisterebbero degli intorni disgiunti $B_a \in \mathcal{B}_a$ e $B_b \in \mathcal{B}_b$. Inoltre si avrebbe $B_a > B_b$ (cioè: ogni punto di B_a sarebbe maggiore di ogni punto di B_b) visto che $a > b$. Ma, dalla definizione di limite, si dovrebbe avere che definitivamente $a_n \in B_a$ e $b_n \in B_b$ il che è assurdo se $a_n \le b_n$ e $B_a > B_b$.

2 Non è possibile fare confronti tra valori complessi, visto che sui numeri complessi non abbiamo un ordinamento

2. Se $a_n \to +\infty$ per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha $a_n > M$ definitivamente. Ma se $b_n > a_n$ si ha anche $b_n > M$. Questo è vero per ogni $M \in \mathbb{R}$ e quindi si ottiene la definizione di limite $b_n \to +\infty$. Dimostrazione analoga si ottiene nel caso $b_n \to -\infty$.

3. Se a_n e c_n hanno lo stesso limite ℓ significa che per ogni $B \in \mathcal{B}_\ell$ si ha $a_n \in B$ e $c_n \in B$ definitivamente. Ma allora anche $b_n \in B$ definitivamente. Essendo questo vero per ogni $B \in \mathcal{B}_\ell$ si ottiene la definizione di limite $b_n \to \ell$.

□

*** **Corollario 2.14** (permanenza del segno). *Sia a_n una successione e $c \in \mathbb{R}$. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \geq c$ e se a_n ha limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ allora $\ell \geq c$. In particolare se una successione ha valori non negativi ed ammette limite, allora il limite è non negativo.*

permanenza del segno

Viceversa, se una successione a_n ha limite positivo: $a_n \to a > 0$ allora $a_n > 0$ per ogni n tranne al più un numero finito di termini. Risultato analogo vale se $a_n \to a < 0$: a parte un numero finito di termini, i valori della successione sono negativi.

** *Dimostrazione.* Prima parte. E' sufficiente considerare la successione costante $c_n = c$ cosicché si ha $c_n \leq a_n$ per ogni n. Ma ovviamente la successione c_n ha limite c e dunque, per confronto, deve essere $c \leq \ell$.

Seconda parte. Se $a > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ per definizione di limite esiste N tale che per ogni $n > N$ si ha $a_n > a/2 > 0$. Dunque solo un numero finito di termini (quelli con indice $n \leq N$) possono essere negativi. Se $a = +\infty$ il ragionamento si ripete a maggior ragione sapendo che esiste N tale che $a_n > 1$ per $n > N$. Cambiando segno alla successione si ottiene il caso $a < 0$. □

Si presti molta attenzione al fatto che se a_n è a termini positivi non è detto che il limite sia positivo, possiamo solo affermare che non è negativo. Ad esempio $1/(n+1) > 0$ ma $1/(n+1) \to 0$ (verificare!). In generale se una successione ha valori in un intervallo il suo limite, se esiste, deve essere un punto del corrispondente intervallo chiuso.

Se una successione ha limite 0 può avere infiniti termini positivi e infiniti termini negativi, come nel caso della successione $a_n = 1/(-2)^n$.

** **Teorema 2.15** (successioni che differiscono su un numero finito di termini). *Se a_n e b_n sono due successioni che differiscono solamente per un numero finito di termini (significa l'insieme $\{n \in \mathbb{N} \colon a_n \neq b_n\}$ è finito) allora a_n e b_n hanno lo stesso carattere e se non sono indeterminate hanno lo stesso limite.*

successioni che differiscono su un numero finito di termini

Dimostrazione. Due successioni che differiscono su un numero finito di termini sono definitivamente uguali. Avere limite ℓ significa che per ogni B intorno di ℓ la successione sta definitivamente in B e dunque la condizione è equivalente se le successioni sono definitivamente uguali. Significa che hanno lo stesso carattere e lo stesso limite. □

Il teorema precedente è molto utile perché ci permette di applicare i criteri di confronto anche nel caso in cui le ipotesi siano violate su un numero finito di termini, come nel seguente esempio.

Esempio 2.16. Sapendo che la successione $a_n = n$ tende a $+\infty$ dimostrare che anche la successione $b_n = n^2 - 10$ tende a $+\infty$.

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che $n^2 - 10 > n$ se $n \geq 4$ infatti se $n \geq 4$ si ha

$$n^2 - 10 \geq 4n - 10 = n + 3n - 10 \geq n + 12 - 10 \geq n + 2 > n.$$

Dunque se consideriamo la successione c_n ottenuta da b_n modificando i primi quattro termini (ponendo ad esempio $c_0 = a_0$, $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$ e $c_3 = a_3$) si ottiene $c_n \geq a_n$ per ogni n. Ma allora $c_n \to +\infty$ (per confronto con a_n) ma visto che b_n differisce da c_n solo nei primi 4 termini anche $b_n \to +\infty$. □

Il teorema precedente garantisce inoltre che per quanto riguarda lo studio del limite possiamo considerare successioni che siano definite solamente da un certo indice in poi. Ad esempio è molto frequente considerare successioni il cui primo indice sia $n = 1$ invece che $n = 0$. Questo non cambia nulla per quanto riguarda il limite della successione.

Esempio 2.17. La successione $a_n = 1/n$ è definita per $n \in \mathbb{N}$ ma $n \neq 0$. Ciò non toglie che possiamo studiarne il limite come qualunque altra successione. Per evidenziare il fatto che il primo indice è $n = 1$ si potrà usare la notazione $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Per la cronaca: $1/n \to 0$.

Data una successione a_n potremo considerare l'*insieme dei suoi valori*: $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si tratta dell'immagine della funzione $n \mapsto a_n$ e a volte si chiama *supporto* della successione. Si faccia attenzione al fatto che l'insieme dei valori non descrive completamente la successione perché viene persa l'informazione sull'ordine in cui vengono elencati i termini della successione e sulla loro molteplicità (ogni valore potrebbe essere assunto su molti indici diversi). Ad esempio l'insieme dei valori della successione $a_n = (-1)^n$ è l'insieme $\{-1, 1\}$. Ma anche la successione

supporto

$$b_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \leq 42 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha lo stesso insieme dei valori. Si osservi però che la prima successione non ammette limite mentre la seconda è convergente (verificare!).

Le operazioni sup, inf, max e min che abbiamo definito sugli insiemi, si intenderanno definite anche sulle successioni, considerando l'insieme dei valori della successione. Queste operazioni potrebbero essere sensibili anche ai primi termini della successione (a differenza dell'operazione di limite) dunque potrebbe essere necessario, per chiarezza, specificare qual è il primo indice da cui si intende cominciare a considerare i valori. Ad esempio se la successione a_n è definita sui naturali tranne lo zero si avrà:

$$\sup a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Esempio 2.18. Si consideri $a_n = \frac{1}{n+1}$ definita per $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\sup a_n = \max a_n = 1, \qquad \inf a_n = 0, \qquad \text{non esiste } \min a_n.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $n + 1 \geq 1$ e quindi $a_n = 1/(n+1) \leq 1$. Visto poi che $a_0 = 1$ si ottiene immediatamente che $\max a_n = 1$ e di conseguenza $\sup a_n = 1$.

Per verificare che $\inf a_n = 0$ dobbiamo verificare innanzitutto che 0 è minorante, e questo è vero in quanto $a_n = 1/(n+1) > 0$ essendo $n + 1 \geq 1 \geq 0$. Inoltre dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < 0 + \varepsilon = \varepsilon$. Questo succede se $1/(n+1) < \varepsilon$ ovvero se $n > 1/\varepsilon - 1$ ad esempio per $n = \lceil 1/\varepsilon \rceil$. Abbiamo dunque verificato che $\inf a_n = 0$. Il minimo di a_n non esiste perché se esistesse dovrebbe essere uguale all'estremo inferiore cioè dovrebbe essere 0. Ma questo è impossibile perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n = 1/(n+1) \neq 0$. □

Diremo che una successione di numeri reali è limitata (superiormente o inferiormente) se l'insieme dei suoi valori è un insieme limitato (superiormente o inferiormente). Una successione a_n è superiormente limitata se ammette un maggiorante: successioni limitate

$$\exists M \in \mathbb{R} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq M$$

ovvero il minimo dei maggioranti è finito:

$$\sup a_n < +\infty.$$

Caratterizzazioni analoghe valgono per la limitatezza inferiore.

Una successione a_n è limitata se la successione dei suoi valori assoluti $|a_n|$ è superioremente limitata, ovvero:

$$\sup |a_n| < +\infty. \tag{1}$$

Questo discende dalla proprietà $-|x| \leq x \leq |x|$ valida per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per le successioni di numeri complessi non potremo parlare di limitatezza superiore e inferiore in quanto sui complessi non c'è un ordinamento. Diremo però comunque che la successione $a_n \in \mathbb{C}$ è limitata se vale (1) (con il modulo al posto del valore assoluto).

** **Teorema 2.19** (limitatezza delle successioni convergenti). *Sia $a_n \in \mathbb{R}$ una successione. Se a_n è convergente allora a_n è limitata. Se $a_n \to +\infty$ allora a_n è inferiormente limitata. Se $a_n \to -\infty$ allora a_n è superiormente limitata.* *limitatezza delle successioni convergenti*

Anche nel caso complesso: se $a_n \in \mathbb{C}$ è una successione convergente allora è limitata.

Dimostrazione. Sia $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ il limite di a_n. Se ℓ è finito, dalla definizione di limite (ponendo $\varepsilon = 1$) sappiamo che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha $\ell - 1 < a_n < \ell + 1$. Prendiamo allora $M = \max\{a_0, a_1, \dots, a_N, \ell + 1\}$ e $m = \min\{a_0, a_1, \dots, a_N, \ell - 1\}$. Si avrà allora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$m \leq a_n \leq M$$

e dunque a_n è limitata.

Se $a_n \to +\infty$ allora, per definizione di limite, deve esistere un N tale che per ogni $n > N$ si abbia $a_n \geq 0$ (abbiamo scelto arbitrariamente $M = 0$ nella definizione). Ma allora ponendo $K = \min\{a_0, a_1, \dots, a_N, 0\}$ si avrà che $a_n \geq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ dunque a_n è inferiormente limitata.

Dimostrazione analoga si fa nel caso $a_n \to -\infty$.

Se $a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \to a \in \mathbb{C}$, allora $|a_n| \to |a| \in \mathbb{R}$. Dunque la successione reale $|a_n|$ è limitata che significa (per definizione) che la successione complessa a_n è limitata. □

2.2 OPERAZIONI CON I LIMITI

limite del valore assoluto

Teorema 2.20 (limite del valore assoluto). *Se $a_n \in \mathbb{R}$ è una successione che ammette limite $a_n \to a \in \bar{\mathbb{R}}$ allora* **

$$|a_n| \to |a|.$$

Se $|a_n| \to 0$ allora $a_n \to 0$.

Lo stesso vale per le successioni $a_n \in \mathbb{C}$ che hanno limite $a_n \to a \in \bar{\mathbb{C}}$ (rimpiazzando il valore assoluto con il modulo).

Dimostrazione. Per la prima parte, se $a \in \mathbb{R}$ è sufficiente osservare che (disuguaglianza triangolare inversa)

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|.$$

Quando a è infinito la condizione $a_n \to a$ implica chiaramente $|a_n| \to +\infty$ in quanto sia la condizione $a_n > M$ che la condizione $a_n < -M$ implicando $|a_n| > M$ quando $M > 0$.

Per la seconda parte è sufficiente osservare che essendo $\big||x|\big| = |x|$ la definizione di limite $a_n \to 0$ è equivalente a $|a_n - 0| = |a_n| \to 0$.

La stessa identica dimostrazione è valida anche per le successioni di numeri complessi. □

limite della somma

Teorema 2.21 (limite della somma). *Siano $a_n \to a$ e $b_n \to b$ successioni reali con $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$. Se a e b non sono infiniti di segno opposto (nel qual caso $a + b$ non è stato definito), allora* ***

$$a_n + b_n \to a + b.$$

Se a e b non sono infiniti con lo stesso segno allora

$$a_n - b_n \to a - b.$$

Lo stesso risultato vale per successioni complesse con $a, b \in \bar{\mathbb{C}}$ supponendo che a e b non siano entrambi ∞.

** *Dimostrazione.* Consideriamo inizialmente il caso in cui a, b siano entrambi limiti finiti. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N (che, al solito, sarà il massimo tra un N_a ed un N_b) tale per cui per ogni $n > N$ si ha $|a_n - a| < \varepsilon/2$ e $|b_n - b| < \varepsilon/2$.

Risulta allora che per ogni $n > N$ si ha

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Cioè $a_n + b_n \to a + b$, come volevamo dimostrare.

Se $a = +\infty$ e $b \neq -\infty$ allora la successione b_n è inferiormente limitata cioè esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $b_n \geq K$ per ogni n e quindi $a_n + b_n \geq a_n + K$. Visto che $a_n \to +\infty$ sappiamo che per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tal che per $n > N$ si ha $a_n > M - K$. Ma allora $a_n + b_n > M$ da cui si ottiene la validità della definizione di limite $a_n + b_n \to +\infty$.

Per completare la dimostrazione osserviamo che se $a_n \to \ell$ con $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $-a_n \to -\ell$. Si tratta semplicemente di cambiare i segni nella definizione di limite.

Dunque se $a = -\infty$ e $b \neq +\infty$ possiamo cambiare segno a entrambe le successioni e ricondurci al caso precedente. Questo completa la prima parte della dimostrazione.

Per dimostrare la seconda parte (il limite della differenza è uguale alla differenza dei limiti) ci si riconduce alla prima parte, ricordando che la differenza è la somma con l'opposto.

Per quanto riguarda le successioni complesse, se a e b sono finiti ci si riconduce al caso reale in quanto la convergenza sul piano complesso si riconduce alla convergenza di parte reale e parte immaginaria. Se $a = \infty$ e $b \in \mathbb{C}$ allora significa che $|a_n| \to +\infty$ e basta utilizzare la disuguaglianza triangolare inversa per ottenere che:

$$|a_n + b_n| \geq |a_n| - |b_n| \to +\infty - b = +\infty$$

da cui $a_n + b_n \to \infty$. Analogo il caso $a \in \mathbb{C}$, $b = \infty$. □

** **Teorema 2.22** (prodotto di limitata per infinitesima). *Se a_n è una successione limitata e $b_n \to 0$ allora $a_n \cdot b_n \to 0$. Il risultato è valido sia per le successioni reali che per le successioni complesse.*

prodotto limitata per infinitesima

Dimostrazione. Per la definizione di limite applicata a b_n, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha $|b_n - 0| = |b_n| < \varepsilon/M$. Allora per ogni $n > N$ si ha

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| \leq M \cdot |b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Dunque è verificata la definizione di limite $a_n \cdot b_n \to 0$. □

limite del prodotto

Teorema 2.23 (limite del prodotto). *Siano $a_n \in \mathbb{R}$ e $b_n \in \mathbb{R}$ successioni che ammettono limite $a_n \to a \in \bar{\mathbb{R}}$ e $b_n \to b \in \bar{\mathbb{R}}$. Se escludiamo il caso in cui uno dei due limiti è zero e l'altro è infinito allora risulta* ***

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b.$$

Lo stesso risultato vale per successioni $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ con limite in $\bar{\mathbb{C}}$.

Dimostrazione. Se a e b sono entrambi finiti si osserva che **

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b + a_n \cdot b - a \cdot b| \\ &\le |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b|.\end{aligned}$$

Sappiamo che $b_n - b \to 0$ e $a_n - a \to 0$ (limite della differenza) e sappiamo che a_n è limitata e ovviamente la successione costante b è anch'essa limitata. Dunque (prodotto di limitata per infinitesima) si ha $a_n(b_n - b) \to 0$ e $(a_n - a)b \to 0$. E ancora applicando il limite della somma si ottiene infine che $a_n b_n - ab \to 0$ il che è equivalente (sommo ab) ad $a_n b_n \to ab$, come volevamo dimostrare.

Se $a = +\infty$ e $b > 0$ allora per la definizione di limite applicata a b_n esiste $N_b \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha $b_n > b/2$. La definizione di limite applicata ad a_n ci dice invece che per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N_a \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N_a$ si ha $a_n > 2M/b$. Deduciamo che per ogni $n > N = \max\{N_a, N_b\}$ si ha

$$a_n \cdot b_n > \frac{2M}{b}\frac{b}{2} = M.$$

Si ottiene dunque la validità della definizione di limite $a_n b_n \to +\infty$. Se $a = +\infty$ e $b < 0$ oppure $a = -\infty$ e $b > 0$ si può cambiare segno ad una delle due successioni e ricondursi al caso precedente. □

limite del reciproco

Teorema 2.24 (limite del reciproco). *Sia $a_n \in \mathbb{R}$ una successione che ammette limite $a_n \to a \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $a \neq 0$ allora* **

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}.$$

Se $a = 0$ ma $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{a_n} \to +\infty.$$

Se $a = 0$ ma $a_n < 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{a_n} \to -\infty.$$

Nel caso complesso non ci sono eccezioni. Se $a_n \to a \in \bar{\mathbb{C}}$ allora $1/a_n \to 1/a$.

* *Dimostrazione.* Se a è infinito allora (che sia $a = +\infty$ o $a = -\infty$) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$ si ha $|a_n| > 1/\varepsilon$. E dunque per ogni $n > N$

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$$

che significa che $1/a_n \to 0$, come volevamo dimostrare.

Nel caso $0 < a < +\infty$ si ha

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n \cdot a}\right| = |a_n - a| \cdot \frac{1}{|a_n| \cdot a} \tag{2}$$

Essendo $a_n \to a > 0$ esiste $N_a \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N_a$ si ha $a_n > a/2$. Dunque si ha per ogni $n > N_a$:

$$\frac{1}{|a_n| \cdot a} \leq \frac{2}{a^2}.$$

Modificando un numero finito di termini possiamo dunque supporre che la stima precedente sia valida per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque sul lato destro di (2) abbiamo il prodotto di una successione infinitesima per una successone limitata e dunque il limite è zero. Questo significa che $1/a_n \to 1/a$.

Il caso $-\infty < a < 0$ che può essere ricondotto al precedente cambiando segno ad a_n.

Consideriamo il caso $a = 0$ con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso dalla definizione di limite $a_n \to 0$ sappiamo che per ogni $M > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$ si ha $a_n = |a_n| < 1/M$. Dunque per $n > N$ si ha $1/a_n > M$ ed abbiamo ottenuto la validità della definizione di limite $1/a_n \to +\infty$.

Il caso $a = 0$ con $a_n < 0$ si riconduce al precedente cambiando segno ad a_n. □

** **Teorema 2.25** (limite del rapporto). *Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ allora*

limite del rapporto

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

escludendo il caso in cui a e b siano entrambi infiniti o entrambi nulli.

* *Dimostrazione.* Possiamo ricondurci ai teoremi precedenti osservando che

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}.$$

□

2.3 funzioni continue

Definizione 2.26 (continuità su $\mathbb{R}$). *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f è* continua in un punto *$a \in A$ se*

continua in un punto

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in A\colon |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

continua *Diremo che f è* continua *se è continua in ogni punto $a \in A$.*

Teorema 2.27 (continuità sequenziale)**.** *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e $a \in A$. Allora f è continua in a se e solo se per ogni successione $a_n \in A$, $a_n \to a$ risulta*
$$f(a_n) \to f(a).$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua nel punto a e sia $a_n \in A$ una successione tale che $a_n \to a$. Scriviamo di seguito la definizione di continuità nel punto a e la definizione di convergenza $a_n \to a$:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
$$\forall \delta > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon n > N \implies |a_n - a| < \delta.$$

Scegliendo nella seconda condizione lo stesso δ dato dalla prima condizione si ottiene $n > N \implies |a_n - a| < \delta \implies |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ da cui si ottiene esattamente la definizione di limite $f(a_n) \to f(a)$:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon n > N \implies |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Viceversa supponiamo che per ogni $a_n \to a$, $a_n \in A$ si abbia $f(a_n) \to f(a)$ e supponiamo, per assurdo, che f non sia continua in a. Allora negando la condizione di continuità in a si ottiene:

$$\exists \varepsilon > 0\colon \forall \delta > 0\colon \exists x \in A\colon |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Fissato ε possiamo dunque porre $\delta = 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ottiene allora che esiste x_n che soddisfa le due condizioni:

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

La prima condizione garantisce che si abbia $a_n \to a$. Ma la seconda condizione impedisce che si abbia $f(x_n) \to a$. Abbiamo quindi trovato un assurdo. □

***Esercizio* 2.28.** Le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ sono continue. Le funzioni $h(x) = \lfloor x \rfloor$ e $k(x) = \lceil x \rceil$ non sono continue (sono continue solamente nei punti $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).

***Esempio* 2.29.** La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua. Utilizziamo il teorema **??**: se $x_n \to x$ allora per il teorema sul limite del prodotto si ha
$$x_n^2 = x_n \cdot x_n \to x \cdot x = x^2.$$

***Esempio* 2.30.** La funzione $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua. Preso $a_n \to a$ con $a_n, a \neq 0$, per il teorema sul limite del rapporto si ha $f(a_n) = \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$. Si noti infatti che $a \neq 0$ essendo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ il dominio di f e quindi il teorema sul limite del rapporto si applica.

In alcuni testi si definisce il concetto di *discontinuità* che viene applicato anche a punti che non stanno nel dominio della funzione. In particolare si dice che la funzione $f(x) = 1/x$ ha una discontinuità (di "terza specie") nel punto $x_0 = 0$. Comunque risulta che tale funzione è continua in tutti gli altri punti e quindi è continua in ogni punto del dominio. Questo è sufficiente (si riguardi la definizione) a garantire che la funzione $f(x) = 1/x$ sia continua.

Definizione 2.31 (operazioni sulle funzioni)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano f, g funzioni $A \to \mathbb{R}$. Possiamo allora definire $f+g$, $-f$, $f-g$, $f \cdot g$ e (se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$) anche f/g come funzioni $A \to \mathbb{R}$ mediante le seguenti ovvie definizioni*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad (f/g)(x) = f(x)/g(x),$$
$$(-f)(x) = -(f(x)).$$

Se $c \in \mathbb{R}$ è un numero considereremo a volte $c \colon A \to \mathbb{R}$ come una funzione $A \to \mathbb{R}$ costante*, intendendo che*

$$c(x) = c \qquad \forall x \in A.$$

Risulta quindi inteso che se $c \in \mathbb{R}$ e $f \colon A \to \mathbb{R}$ allora $c \cdot f$ è la funzione definita da $(c \cdot f)(x) = c \cdot (f(x))$.

Queste operazioni rendono l'insieme $A \to \mathbb{R}$ delle funzioni definite su A a valori in $\mathbb{R}$, denotato anche come $\mathbb{R}^A$, uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

Teorema 2.32 (composizione di funzioni continue)**.** *Se $c \in \mathbb{R}$ è fissato la funzione costante $f(x) = c$ (definita su tutto $\mathbb{R}$) è continua. Anche la funzione $f(x) = x$ (definita su tutto $\mathbb{R}$) è continua.*

Se f e g sono funzioni continue allora anche

$$f+g \qquad f \cdot g \qquad f-g \qquad \frac{f}{g} \qquad f \circ g \qquad |f|$$

sono funzioni continue. Si intende che ognuna di queste funzioni è definita nei punti in cui sono definite tutte le funzioni e le operazioni coinvolte. Più precisamente: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ e $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ sono definite sull'intersezione dei domini di f e di g. Il rapporto $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ è definito sui punti dell'intersezione dei domini dove, inoltre, $g(x) \neq 0$. La composizione $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ è definita sui punti x del dominio di g tali che $g(x)$ sta nel dominio di f. Il valore assoluto $|f|(x) = |f(x)|$ ha lo stesso dominio della funzione f.

Dimostrazione. Se $f(x) = c$ e $a_n \to a$ allora $f(a_n) = c \to c = f(a)$ in quanto si ha $|f(a_n) - a| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Dunque $f(x) = c$ è continua. Se $f(x) = x$ e $a_n \to a$ allora $f(a_n) = a_n \to a = f(a)$. Dunque $f(x) = x$ è continua.

Se $a_n \to a$ allora per il teorema **??** si ha $f(a_n) \to f(a)$ e $g(a_n) \to g(a)$. Per il teorema 2.21 si ottiene quindi che $f(a_n) + g(a_n) \to f(a) + g(a)$ e dunque $f + g$ è continua. Per lo stesso teorema anche $f - g$ è continua. Analogamente tramite il teorema 2.23 si ottiene che $f \cdot g$ è continua, con il teorema 2.25 si ottiene che f/g è continua e con il teorema 2.20 si ottiene che $|f|$ è continua.

Per quanto riguarda la composizione si ha $(f \circ g)(a_n) = f(g(a_n))$. Se $a_n \to a$ essendo g continua in a si avrà $g(a_n) \to g(a)$ ed essendo f continua in $g(a)$ si avrà $f(g(a_n)) \to f(g(a))$. □

Esempio 2.33. La funzione

$$f(x) = \frac{(x-3) \cdot x - \frac{1}{x+x^2}}{\left|x - \frac{1-x^3}{x}\right|}$$

è continua.

Si intende che tale funzione è definita sull'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per cui tutte le operazioni coinvolte sono definite ovvero $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon x + x^2 \neq 0,\ x \neq 0,\ \left| x - \frac{1-x^3}{x} \right| \neq 0 \right\}.$$

Infatti le funzioni x e le costanti 3 e 1 sono funzioni continue per il teorema 2.32. Ma allora per lo stesso teorema le funzioni $x - 3$ e $x^2 = x \cdot x$ sono continue. Dunque anche $(x-3) \cdot x$, $x + x^2$ e x^3 e $1 - x^3$ sono continue. Di conseguenza sono continue pure $\frac{1}{1+x^2}$ e $\frac{1-x^3}{x}$. E poi saranno continue anche $(x-3) \cdot x - \frac{1}{1+x^2}$ e $x - \frac{1-x^3}{x}$ e quindi $x - \frac{1-x^3}{x}$ e pure $\left|x - \frac{1-x^3}{x}\right|$. Infine sarà dunque continua $f(x)$.

2.4 SUCCESSIONI ESTRATTE

funzioni monotòne **Definizione 2.34** (funzioni monotòne). *Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice essere* ***

1. *crescente* crescente *se $x < y \implies f(x) \leq f(y)$;*
2. *decrescente* decrescente *se $x < y \implies f(x) \geq f(y)$;*
3. *monotòna* monotòna *se crescente o decrescente;*
4. *costante* costante *se crescente e decrescente;*
5. *strettamente crescente* strettamente crescente *se $x < y \implies f(x) < f(y)$;*
6. *strettamente decrescente* strettamente decrescente *se $x < y \implies f(x) > f(y)$;*
7. *strettamente monotòna* strettamente monotòna *se strettamente crescente o strettamente decrescente.*

Si osservi che se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è costante allora esiste c tale che $f(x) = c$ per ogni $x \in A$. Si osservi anche che ogni funzione strettamente monotona è anche iniettiva. Si osservi infine (fare un esempio!) che esistono funzioni che non rientrano in nessuna delle categorie sopra elencate (cioè che non sono né crescenti né decrescenti).

Si faccia attenzione alla terminologia. In alcuni testi (in particolare nei testi anglosassoni) si utilizza il termine *crescente* con il significato di *strettamente crescente* e si usa la dizione *non decrescente* per indicare il concetto che noi abbiamo definito con *crescente*. In effetti con le nostre definizioni una funzione crescente può essere costante e quindi non crescere affatto! E' questo uno dei casi in cui il termine utilizzato nelle definizioni non corrisponde esattamente alla dizione utilizzata nel linguaggio comune.

Le successioni sono funzioni $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dunque le precedenti definizioni si applicano anche alle successioni. Per le successioni, tuttavia, si possono dare delle definizioni equivalenti utilizzando il principio di induzione, come nel seguente teorema la cui dimostrazione è elementare.

*** **Teorema 2.35** (successioni monotòne). *Una successione a_n è*

1. crescente*: se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_{n+1} \geq a_n$;*
2. decrescente*: se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_{n+1} \leq a_n$;*
3. strettamente crescente*: se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_{n+1} > a_n$;*
4. strettamente decrescente*: se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_{n+1} < a_n$;*

Dimostrazione. Consideriamo ad esempio la prima condizione (funzione crescente). Ovviamente se a_n è crescente si ha $a_{n+1} \geq a_n$ in quanto $n+1 > n$. Viceversa supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $a_{n+1} \geq a_n$. Allora chiaramente $a_1 \geq a_0$, $a_2 \geq a_1 \geq a_0$, $a_3 \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0$... Per induzione si può quindi dimostrare che $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_1$.

Gli altri casi si svolgono in maniera analoga. □

*** **Teorema 2.36** (limite di successioni monotòne). *Ogni successione monotòna ammette limite. Più precisamente: se a_n è crescente allora* $\lim a_n = \sup a_n$*, se a_n è decrescente allora* $\lim a_n = \inf a_n$*.*

limite di successioni monotòne

*** *Dimostrazione.* Supponiamo sia a_n crescente e sia $\ell = \sup a_n$. Se ℓ è finito sappiamo che (caratterizzazione del sup) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_N > \ell - \varepsilon$. Ma siccome a_n è crescente si avrà che per ogni $n > N$ vale $a_n \geq a_N > \ell - \varepsilon$. D'altra parte sappiamo anche che $\ell \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque, mettendo insieme le due cose, si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon n > N \implies \ell - \varepsilon < a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

Abbiamo dunque verificato la definizione di limite $a_n \to \ell$.

Se $\ell = +\infty$ sappiamo che a_n non è superiormente limitata, cioè per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_N \geq M + 1 > M$. Essendo però

a_n crescente otteniamo anche che per ogni $n > N$ si ha $a_n \geq A_N > M$. Dunque si ottiene

$$\forall M \in \mathbb{R} \colon \forall N \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon n > N \implies a_n > M$$

che è la definizione di limite $a_n \to +\infty$.

Non può essere $\ell = -\infty$ in quanto il $\sup a_n \geq a_0 > -\infty$. □

Definizione 2.37 (sottosuccessione). *Se a_n è una successione e n_k è una successione strettamente crescente i cui valori sono numeri naturali, allora la successione $b_k = a_{n_k}$ si dice essere una* sottosuccessione *di a_n (o anche* successione estratta *da a_n).* *

sottosuccessione

Ricordando che una successione a_n non è altro che una funzione $\boldsymbol{a} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, la successione n_k corrisponde ad una funzione $\boldsymbol{n} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e la sottosuccessione a_{n_k} corrisponde alla funzione composta $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{n}$.

Si osservi che nella definizione precedente la variabile n rappresenta una variabile muta quando scriviamo la successione a_n, ma rappresenta anche il nome della successione fissata n_k. Questo sovraccarico di significato è voluto e se usato correttamente rende più semplice le notazioni, in quanto la successione n_k viene sostituita alla variabile n, con lo stesso nome, nella successione a_n. La sottosuccessione a_{n_k} risulta essere una successione nella variabile k, non nella variabile n.

***Esempio* 2.38.** Sia $a_n = n^2$ la successione dei quadrati perfetti:

$$a_0 = 0, \ a_1 = 1, \ a_2 = 4, \ a_3 = 9, \dots$$

Consideriamo la successione dei numeri pari $n_k = 2k$:

$$n_0 = 0, \ n_1 = 2, \ n_2 = 4, \ n_3 = 6, \dots$$

la corrispondente sottosuccessione dei quadrati perfetti $b_k = a_{n_k}$ rappresenta la successione dei quadrati dei numeri pari:

$$b_0 = a_0 = 0, \ b_1 = a_2 = 4, \ b_2 = a_4 = 16, \ b_3 = a_6 = 36, \dots$$

Abbiamo in effetti *estratto* alcuni dei termini della successione originaria.

***Esempio* 2.39.** Se $a_n = (-1)^n$ e $n_k = 2k$ allora $a_{n_k} = 1$. Vediamo quindi che una successione che non ammette limite può contenere una sottosuccessione che invece ha limite.

Osserviamo che se $\boldsymbol{n} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione strettamente crescente (cioè $n_k = \boldsymbol{n}(k)$ è una successione strettamente crescente di indici) allora posto $A = \boldsymbol{n}(\mathbb{N}) = \{n_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ si ha che $\boldsymbol{n} \colon \mathbb{N} \to A$ è una bigezione. Quindi A è un insieme infinito. Viceversa dato un qualunque insieme infinito $A \subseteq \mathbb{N}$ esiste una unica successione $\boldsymbol{n} \colon \mathbb{N} \to A$ bigettiva e strettamente crescente: basterà porre, per induzione, $n_0 = \min A$, $n_1 = \min\{n \in A \colon n > n_0\}$ e, in generale, $n_{k+1} = \min\{n \in A \colon n > n_k\}$.

Dunque possiamo identificare le sottosuccessioni di una successione $\boldsymbol{a}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con le restrizioni ai sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$. Nell'esempio precedente, ad esempio, si è considerata la sottosuccessione di tutti i termini con indice pari $n_k = 2k$ per ottenere la sottosuccessione $a_{n_k} = a_{2k}$. Si può equivalentemente pensare di prendere l'insieme di tutti i numeri pari $A = 2\mathbb{N}$ e considerare la successione ristretta ai soli indici pari:

$$a_0, a_2, a_4, \dots$$

Se rinumeriamo gli indici pari usando tutti i numeri naturali otteniamo la sottosuccessione $b_k = a_{n_k}$:

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_2,\ b_2 = a_4,\ \dots,\ b_k = a_{n_k},\ \dots$$

Teorema 2.40 (cambio di variabile nei limiti). *Se n_k è una successione di numeri naturali con $n_k \to +\infty$ e se a_n è una qualunque successione che ammette limite allora*

cambio di variabile nei limiti

$$\lim_k a_{n_k} = \lim_n a_n. \tag{3}$$

Se a_{n_k} è una sottosuccessione di a_n allora in particolare $n_k \to +\infty$ e quindi anche in questo caso vale (3).

Dimostrazione. Le definizioni di $a_n \to \ell$ e $n_k \to +\infty$ sono le seguenti (usiamo la notazione con gli intorni per non dover distinguere i casi di ℓ finito / infinito ma si potrebbe ugualmente procedere con le definizioni usuali). Se indichiamo con $\boldsymbol{a}(n) = a_n$ e con $\boldsymbol{n}(k) = n_k$ le condizioni $a_n \to \ell$ e $n_k \to +\infty$ si possono esprimere come segue:

$$\forall U \in \mathcal{B}_\ell\colon \exists V \in \mathcal{B}_{+\infty}\colon \boldsymbol{a}(V) \subseteq U,$$
$$\forall V \in \mathcal{B}_{+\infty}\colon \exists W \in \mathcal{B}_{+\infty}\colon \boldsymbol{n}(W) \subseteq V.$$

Mettendo insieme le due definizioni si ottiene

$$\forall U \in \mathcal{B}_\ell\colon \exists V \in \mathcal{B}_{+\infty}\colon \exists W \in \mathcal{B}_{+\infty}\colon \boldsymbol{n}(W) \subseteq V \text{ e } \boldsymbol{a}(V) \subseteq U$$

e dunque

$$\forall U \in \mathcal{B}_\ell\colon \exists W \in \mathcal{B}_{+\infty}\colon \boldsymbol{a}(\boldsymbol{n}(W)) \subseteq U$$

che corrisponde esattamente alla definizione di limite $a_{n_k} = a(n(k)) \to \ell$.

Per la seconda parte è sufficiente verificare che se n_k è strettamente crescente e a valori in $\mathbb{N}$, deve necessariamente essere $n_k \to +\infty$. Notiamo infatti che $\boldsymbol{n}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è iniettiva (per la stretta monotonia) e dunque rappresenta una corrispondenza biunivoca tra il suo dominio $\mathbb{N}$ e l'insieme dei suoi valori $\{n_k\colon k \in \mathbb{N}\}$. Significa dunque che l'insieme dei valori è un insieme infinito di numeri naturali che quindi non può che essere illimitato. Dunque $\sup n_k = +\infty$ e dalla monotonia otteniamo $\lim n_k = \sup n_k = +\infty$. □

*** **Teorema 2.41** (Bolzano-Weierstrass). *Se a_n è limitata allora esiste una sottosuccessione a_{n_k} convergente. Il teorema è valido sia per successioni reali che complesse.*

Bolzano-Weierstrass

Dimostrazione. Facciamo dapprima il caso $a_n \in \mathbb{R}$. Sia $A_0 = \inf a_n$ e $B_0 = \sup a_n$. Essendo a_n limitata sia A_0 che B_0 sono finiti e ogni termine della successione sta nell'intervallo $[A_0, B_0]$. Definiamo n_0: ovviamente si avrà $a_{n_0} = a_0 \in [A_0, B_0]$. ***

Consideriamo il punto medio $M_0 = (A_0 + B_0)/2$ dell'intervallo $[A_0, B_0]$ e consideriamo i due mezzi intervalli $[A_0, M_0]$ e $[M_0, B_0]$. Tutti i termini della successione stanno in almeno uno di questi due intervalli. Se consideriamo gli indici $n \in \mathbb{N}$ della successione a_n, uno dei due sotto-intervalli deve contenere termini della successione per infiniti indici. Chiamiamo $[A_1, B_1]$ tale sottointervallo, chiamiamo n_1 il più piccolo naturale maggiore di $n_0 = 0$ per cui $a_{n_1} \in [A_1, B_1]$.

Ripetiamo il procedimento. Consideriamo il punto medio M_1 dell'intervallo $[A_1, B_1]$. Per costruzione l'intervallo contiene termini della successione per infiniti indici dunque uno dei due sotto-intervalli $[A_1, M_1]$ o $[M_1, B_1]$ deve anche lui contenere termini della successione per infiniti indici. Chiamiamo $[A_2, B_2]$ tale intervallo e definiamo n_2 come il più piccolo naturale maggiore di n_1 per cui $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$.

Si può procedere così all'infinito (formalmente: tramite una definizione per induzione) e ottenere quindi le successioni A_k, B_k e n_k che soddisfano le seguenti proprietà (da verificare con il principio di induzione):

1. A_k è crescente, B_k è decrescente, $A_k \leq B_k$;
2. $B_k - A_k = (B_0 - A_0)/2^k$;
3. $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Essendo A_k monotona sappiamo che esiste $\ell = \lim A_k$. Essendo poi $A_0 \leq A_k \leq B_k \leq B_0$ sappiamo che A_k è limitata, quindi ℓ è finito. Inoltre

$$\lim B_k = \lim A_k + \frac{B_0 - A_0}{2^k} = \lim A_k = \ell$$

e dunque passando al limite nelle disuguaglianze

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$$

si ottiene (teorema dei carabinieri)

$$a_{n_k} \to \ell.$$

Questo conclude la dimostrazione per le successioni reali.

Se a_n è una successione di numeri complessi, si potrà scrivere $a_n = x_n + iy_n$ con x_n e y_n successioni reali. Se a_n è limitata significa che $|a_n|$ è superiormente limitata. Ma risulta $|x_n| \leq |a_n|$ e $|y_n| \leq |a_n|$ quindi se a_n è limitata anche la parte reale x_n e la parte immaginaria y_n sono successioni limitate. Ma allora x_n ammette una sotto-successione convergente x_{n_k}. Ma y_{n_k} è anch'essa limitata e quindi anch'essa ammette una sotto-sotto-successione $y_{n_{k_j}}$ convergente. Dunque la sotto-sotto-successione $a_{n_{k_j}}$ è convergente. □

Corollario 2.42. *Sia a_n una successione qualunque (reale o complessa). Allora esiste una sottosuccessione a_{n_k} che ha limite (in $\bar{\mathbb{R}}$ o in $\bar{\mathbb{C}}$).*

Più precisamente se la successione è limitata allora ammette una estratta convergente, se è reale e superiormente illimitata allora ammette una estratta con limite $+\infty$, se è reale e inferiormente illimitata ammette una estratta con limite $-\infty$, se è complessa e illimitata ammette una estratta con limite ∞.

Dimostrazione. Se a_n è limitata il risultato segue dal teorema di Bolzano-Weierstrass.

Se a_n è reale e non è superiormente limitata allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste n tale che $a_n \geq M$. Allora scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ in modo che $a_{n_0} \geq 0$ e poi definiamo, induttivamente n_k in modo che

$$a_{n_{k+1}} \geq \max\{k+1, a_0, a_1, \ldots, a_{n_k}\}.$$

Se a_n è superiormente limitata è sempre possibile soddisfare la precedente relazione. Chiaramente $a_{n_k} \geq k \to +\infty$ e quindi abbiamo mostrato che esiste una sottosuccessione che tende a $+\infty$.

In modo analogo si svolge il caso in cui a_n si inferiormente illimitata.

Se a_n è una successione illimitata complessa allora significa che $|a_n|$ è superiormente illimitata e quindi, per quanto detto sopra, esiste una sottosuccessione tale che $\left|a_{n_l}\right| \to +\infty$. Ma questo significa che $a_{n_k} \to \infty$. □

Il seguente lemma non verrà usato in seguito ma può essere interessante di per sé. Si osservi che tale lemma fornisce una dimostrazione alternativa del teorema di Bolzano-Weierstrass in quanto ogni sottosuccessione monotona ammette limite.

Lemma 2.43 (estratte monotone)**.** *Ogni successione $a_n \in \mathbb{R}$ ammette una estratta monotona.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme P dei punti di "picco", ovvero degli indici di quei termini della successione che sono maggiori o uguali a tutti i termini seguenti:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \colon m \geq n \implies a_n \geq a_m\}.$$

Se P è finito significa che esiste un indice $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che non ci sono picchi da n_1 in poi. In particolare n_1 non è un punto di picco quindi deve esistere $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_1} < a_{n_2}$. Ma neanche n_2 è un punto di picco quindi deve esistere $n_3 > n_2$ tale che $a_{n_2} < a_{n_3}$... procedendo induttivamente si riesce quindi a definire una successione n_k di indici tali che a_{n_k} risulta essere strettamente crescente.

Se, viceversa, P è infinito allora elencando in ordine i suoi elementi otterremo una successione $n_1 < n_2 < n_3, \ldots$ di indici ognuno dei quali corrisponde ad un valore di picco. Se $j > k$ si ha dunque $n_j > n_k$ ed essendo $n_k \in P$ significa che $a_{n_j} \leq a_{n_k}$. Dunque la successione a_{n_k} risulta essere decrescente. □

non numerabilità dei reali

Teorema 2.44 (Cantor: secondo metodo diagonale)**.** *L'insieme dei numeri reali non è numerabile:* $\#\mathbb{R} > \#\mathbb{N}$.

Dimostrazione. E' sufficiente dimostrare che $\#[0,1] > \#\mathbb{N}$ in quanto chiaramente $\#\mathbb{R} \geq \#[0,1]$. Supponiamo per assurdo che esista una funzione biettiva $a\colon \mathbb{N} \to [0,1]$. Questa funzione corrisponde dunque ad una successione a_n. Consideriamo l'intervallo $[0,1]$ e dividiamolo in tre intervalli di lunghezza $1/3$: $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$. Il punto a_0 non può stare in tutti e tre questi intervalli. Sia $[A_0, B_0]$ un intervallo (dei tre) che non contiene a_0: $a_0 \notin [A_0, B_0]$. Dividiamo anche $[A_0, B_0]$ in tre intervalli di lunghezza $1/9$. Almeno uno di questi tre intervalli, che chiamiamo $[A_1, B_1]$, non contiene a_1: $a_1 \notin [A_1, B_1]$. Procediamo così all'infinito in maniera simile al teorema precedente. Otterremo due successioni A_n, B_n che soddisfano queste proprietà:

1. A_n crescente, B_n decrescente;
2. $0 \leq A_n \leq B_n \leq 1$;
3. $a_n \notin [A_n, B_n]$;
4. $B_n - A_n = 1/3^{n+1}$.

Essendo A_n monotona e limitata, essa ha limite finito $\lim A_n = \ell$. Fissato n osserviamo che per ogni $k \geq n$ si ha

$$A_n \leq A_k \leq B_n$$

passando al limite in k (con n fissato) si ottiene

$$A_n \leq \ell \leq B_n$$

che significa che $\ell \in [A_n, B_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (in particolare $\ell \in [0,1]$). Visto che invece $a_n \notin [A_n, B_n]$ risulta che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\ell \neq a_n$. Dunque il numero ℓ non è un termine della successione a_n ovvero la funzione $a\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ non è suriettiva. □

2.5 PUNTI LIMITE

Proposizione 2.45 (proprietà caratteristica della convergenza)**.** *Sia data una successione e un candidato punto limite ℓ. Se da ogni sottosuccessione è possibile estrarre una sotto-sottosuccessione che ha limite ℓ allora l'intera successione ha limite ℓ.*

Dimostrazione. Sia a_n la successione. Se per assurdo non fosse $a_n \to \ell$ allora esisterebbe un intorno $B \in \mathcal{B}_\ell$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ con $n > k$ tale che $a_n \notin B$. In effetti n dipende da k quindi potremmo scrivere $n = n_k$. La condizione $n_k > k$ garantisce che $k \to +\infty$. Ma allora a patto di riordinare i termini possiamo suppore che n_k sia strettamente crescente e quindi che a_{n_k} sia una sottosuccessione tale che

$a_{n_k} \notin B$. Ma allora da a_{n_k} non è possibile estrarre una sottosuccessione che converga ad ℓ perché ogni sottosuccessione mantiene la proprietà di stare fuori da B. $\square$

Definizione 2.46 (punti limite, limite superiore, limite inferiore)**.** *Sia a_n una successione. Una quantità $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ si dice essere un* punto limite *di a_n se esiste una sottosuccessione a_{n_k} che ha limite ℓ. Se chiamiamo $L \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ l'insieme dei punti limite possiamo definire il* limite superiore *e il* limite inferiore *rispettivamente come*

punto limite

limite superiore/inferiore

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \sup L, \qquad \liminf_{n\to-\infty} a_n = \inf L.$$

Potremo anche scrivere più brevemente $\limsup_n a_n$ *o anche* $\limsup a_n$ *al posto di* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$*. Lo stesso vale per il* $\liminf$.

***Esempio* 2.47.** La successione $a_n = (-1)^n$ ha due punti limite:

$$\limsup_{n\to+\infty}(-1)^n = 1, \qquad \liminf_{n\to+\infty}(-1)^n = -1.$$

Infatti la sottosuccessione dei termini con indice pari è costante 1 mentre quella dei termini di indice dispari è costante -1.

***Esempio* 2.48.** Visto che $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$ esiste una funzione $\boldsymbol{a}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ surgettiva. Utilizzando la proprietà di densità dei numeri razionali si può dimostrare che l'insieme dei punti limite della corrispondente successione $a_n = \boldsymbol{a}(n)$ è tutto $\bar{\mathbb{R}}$.

Teorema 2.49 (proprietà del limite superiore/inferiore)**.** *Sia a_n una successione reale e sia L l'insieme dei suoi punti limite. Allora*

1. $L \neq \emptyset$
2. $\limsup a_n \geq \liminf a_n$;
3. *se* $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$ *allora* $\lim a_n = \ell$;
4. *l'insieme dei punti limite è chiuso per passaggio al limite: se $x_k \in L$ e $x_k \to \ell$ per qualche $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ allora $\ell \in L$;*
5. *esiste una sottosuccessione a_{n_k} tale che $a_{n_k} \to \limsup a_n$ (idem per quanto riguarda il* $\liminf$*);*
6. *a_n è superiormente limitata se e solo se $\limsup a_n < +\infty$; a_n è inferiormente limitata se e solo se $\liminf a_n > -\infty$;*
7. *Se $\ell \in \mathbb{R}$ la condizione $\limsup a_n = \ell$ è equivalente a*

$$\forall \varepsilon > 0\colon \begin{cases} a_n < \ell + \varepsilon \text{ definitivamente,} \\ a_n > \ell - \varepsilon \text{ frequentemente} \end{cases}$$

e la condizione $\liminf a_n = \ell$ *è equivalente a*

$$\forall \varepsilon > 0\colon \begin{cases} a_n > \ell - \varepsilon \text{ definitivamente,} \\ a_n < \ell + \varepsilon \text{ frequentemente;} \end{cases}$$

8. $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} a_k, \qquad \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k.$

Dimostrazione. Per il punto 1. il corollario 2.42 garantisce che sia $L \neq \emptyset$ e quindi $\sup L \geq \inf L$ da cui discende il punto 2.

Per il punto 3. se $\limsup = \liminf = \ell$ significa che $L = \{\ell\}$ ha un solo elemento. Ma per il corollario al teorema di Bolzano Weierstrass sappiamo che da ogni sottosuccessione è possibile estrarre una sotto-sottosuccessione che ammette limite. Per definizione di L tale limite deve essere in L e quindi non può che essere ℓ. Allora per la proposizione 2.45 deduciamo che l'intera successione ha limite ℓ.

Per il punto 4. sia $x_k \in L$ una successione di punti limite e sia $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ tale che $x_k \to \ell$ per $k \to +\infty$. Se $\ell = +\infty$ basta dimostrare che a_n non può essere superiormente limitata. Ma questo è chiaro, perché se fosse $a_n \leq M$ per qualche $M \in \mathbb{R}$ allora si avrebbe $x_k \leq M$ (per i teoremi di confronto) e quindi non potrebbe essere $x_k \to \ell = +\infty$. Discorso analogo vale se $\ell = -\infty$. Supponiamo allora che sia $\ell \in \mathbb{R}$. Per dimostrare che $\ell \in L$ dobbiamo trovare una sottosuccessione a_{n_k} di a_n tale che $a_{n_k} \to \ell$ per $k \to +\infty$. Se per qualche j fosse $x_k = \ell$ avremmo finito perché $\ell = x_k \in L$. Supponiamo dunque che sia $x_k \neq \ell$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Fissato k sappiamo che $x_k \in L$. Significa che esiste una sottosuccessione $a_{n_{k,j}} \to x_k$ per $j \to +\infty$ (la sottosuccessione può dipendere anche dal k che abbiamo fissato quindi invece di scrivere n_j scriviamo $n_{k,j}$ osservando però che il limite viene fatto per $j \to +\infty$ con k fissato). Ma allora per ogni k possiamo trovare un $j = j(k)$ tale che $\left|a_{n_{k,j}} - x_k\right| < 1/k$. Visto che j può essere scelto arbitrariamente grande, possiamo Posto $n_k = n_{k,j(k)}$ abbiamo quindi garantito che

$$\left|a_{n_k} - \ell\right| \leq \left|a_{n_k} - x_k\right| + |x_k - \ell| \leq \frac{1}{k} + |x_k - \ell| \to 0 + 0 = 0.$$

Visto che j poteva essere scelto arbitrariamente grande, al crescere di k possiamo anche supporre che sia $n_{k+1} > n_k$ e dunque abbiamo trovato una sottosuccessione a_{n_k} tale che $a_{n_k} \to \ell$.

Il punto 5. si può esprimere dicendo che $\sup L \in L$ e $\inf L \in L$. Infatti se fosse $\sup L \notin L$ per la definizione di sup esisterebbe una successione di punti $x_k \in L$ tale che $x_k \to \sup L$. Ma allora per il punto 3. avremmo $\sup L \in L$. Lo stesso per l'inf.

Il punto 6. segue dal corollario 2.42: se una successione non è limitata superiormente (o inferiormente) esiste una estratta che tende a $+\infty$ (o a $-\infty$) e quindi $\limsup = +\infty$ (o $\liminf = -\infty$). Viceversa se $\limsup = +\infty$ (o se $\liminf = -\infty$) per il punto 3. sappiamo esistere una sottosuccessione che tende a $+\infty$ (o a $-\infty$) quindi né la sottosuccessione né l'intera successione può essere superiormente (o inferiormente) limitata.

Per il punto 7. facciamo la dimostrazione per il $\limsup$ (per il $\liminf$ sarà analogo). Se $\limsup a_n = \ell$ e se fosse frequentemente $a_n \geq \ell + \varepsilon$ allora esisterebbe una sottosuccessione $a_{n_k} \geq \ell + \varepsilon$. Tale sottosuccessione avrebbe una sotto-sottosuccessione che ammette limite ℓ' e per i teoremi di confronto dovrebbe essere $\ell' \geq \ell + \varepsilon$. Ma $\ell' \in L$ e dunqe $\ell' \leq \sup L = \ell$. Assurdo. Se invece si avesse definitivamente $a_n \leq \ell - \varepsilon$ allora ogni sottosuccessione convergente a_{n_k} dovrebbe avere limite inferiore ad $\ell - \varepsilon$. Quindi si dovrebbe avere $\sup L < \ell - \varepsilon$, assurdo. Viceversa supponiamo che valgano le due proprietà $a_n < \ell + \varepsilon$ definitivamente e $a_n > \ell - \varepsilon$ frequentemente. Se fosse $\limsup a_n = \ell' > \ell$ esisterebbe una sottosuccessione $a_{n_k} \to \ell' > \ell$. Ma allora frequentemente $a_n > \ell$ contro la prima proprietà. Se invece fosse $\limsup a_n = \ell' < \ell$ scegliamo $\varepsilon = (\ell - \ell')/2$. Sappiamo che frequentemente $a_n > \ell' + \varepsilon$ e dunque esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \geq \ell' + \varepsilon$. Da tale sottosuccessione è possibile estrarre una sotto-sottosuccessione che ammette limite e tale limite dovrà essere $\geq \ell' + \varepsilon > \ell'$. Questo è assurdo in quanto avremmo $\ell' = \sup L > \ell'$.

Per il punto 8. facciamo la dimostrazione per il $\limsup$ (per il $\liminf$ sarà analogo). Posto $A_k = \sup_{n \geq k} a_n$ osserviamo che A_k è decrescente in quanto all'aumentare di k l'insieme $\{n\ colonn \geq k\}$ diminuisce e quindi il sup non aumenta. Dunque $\lim A_k$ esiste certamente. Inoltre, fissato k, per le proprietà del sup deve esistere n_k tale che a_{n_k} □

Teorema 2.50 (operazioni con $\limsup$ e $\liminf$)**.** *Siano a_n e b_n due successioni reali. Si ha:*

1. $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$, $\qquad \liminf(-a_n) = -\limsup a_n$;
2. *se $\lambda \geq 0$ allora*
$$\limsup \lambda a_n = \lambda \limsup a_n, \qquad \liminf \lambda a_n = \lambda \liminf a_n;$$
3. *si ha*
$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n,$$
$$\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n;$$
4. *se $a_n \geq b_n$ allora*
$$\limsup a_n \geq \limsup b_n, \qquad \liminf a_n \geq \liminf b_n.$$

Dimostrazione. Per il punto 1. basti osservare che se la successione a_n ha L come insieme dei punti limite allora la successione $-a_n$ ha $-L$ come punti limite. Quindi $\sup(-L) = -\inf L$ e $\inf(-L) = -\sup L$.

Per il punto 2. si osservi che se L è l'insieme dei punti limite di a_n allora l'insieme dei punti limite di λa_n è λL. Se $\lambda \geq 0$ si ha dunque $\sup \lambda L = \lambda \sup L$ e $\inf \lambda L = \lambda \inf L$ (se $\lambda < 0$ invece inf e sup si scambiano, come nel punto 1).

Per il punto 3. consideriamo il caso del lim sup (per il lim inf sarà analogo). Se $\ell = \limsup(a_n + b_n)$ significa che esiste una sottosuccessione di $a_n + b_n$ che ha limite ℓ. Ma posso estrarre una sotto-sottosuccessione tale che anche il primo addendo a_n abbia limite. E poi posso estrarre una sotto-sotto-sottosuccesione in modo che anche il secondo addendo b_n abbia limite. Dunque, a meno di sottosuccessioni, avremo $a_n \to a$, $b_n \to b$ con $a + b = \ell$. Ma allora per definizione di lim sup si avrà $\limsup a_n \geq a$ e $\limsup b_n \geq b$ da cui $\limsup a_n + \limsup b_n \geq a + b = \ell$.

Per il punto 4. si osserva che se $L = \limsup a_n$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente $a_n \leq L + \varepsilon$ e di conseguenza anche $b_n \leq L + \varepsilon$. Dunque $\limsup b_n \leq L$. Se $\ell = \liminf b_n$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente $b_n \geq \ell - \varepsilon$ ma allora anche $a_n \geq \ell - \varepsilon$ defitiviamente e quindi $\liminf a_n \geq \ell$.

□

2.6 IL TEOREMA DEGLI ZERI

teorema degli zeri

Teorema 2.51 (degli zeri). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $a, b \in I$ tali che $f(a) \leq 0$ e $f(b) \geq 0$. Allora esiste $c \in I$ tale che $f(c) = 0$.* ***

Dimostrazione. La dimostrazione che adottiamo è di particolare rilevanza in quanto non solo permette di dimostrare l'esistenza del punto c che risolve $f(x) = 0$ ma ci presenta un algoritmo, il *metodo di bisezione*, che può essere effettivamente utilizzato per approssimare tale soluzione. ***

metodo di bisezione

Possiamo supporre senza perdere di generalità che sia $a < b$. Poniamo $A_0 = a$, $B_0 = b$ e consideriamo il punto medio $C_0 = (A_0 + B_0)/2$. Scegliamo tra i due intervalli $[A_0, C_0]$ e $[C_0, B_0]$ quello per cui il segno ai due estremi è discorde (o, caso fortunato, nullo). Più precisamente se $f(C_0) \geq 0$ poniamo $[A_1, B_1] = [A_0, C_0]$ altrimenti scegliamo $[A_1, B_1] = [C_0, B_0]$ così si ha, in ogni caso, $f(A_1) \leq 0$, $f(B_1) \geq 0$.

Consideriamo il punto medio C_1 del nuovo intervallo $[A_1, B_1]$ e ripetiamo il procedimento indefinitamente. Quello che otteniamo sono due successioni A_n, B_n con queste proprietà (che potrebbero essere dimostrate per induzione):

1. $A_n < B_n$, $B_n - A_n = (b - a)/2^n$;
2. A_n è crescente, B_n è decrescente;
3. $f(A_n) \leq 0$, $f(B_n) \geq 0$.

Essendo A_n monotòna sappiamo che A_n converge $A_n \to c$. Inoltre visto che $A_n \in [a, b]$ anche $c \in [a, b]$ (per la permanenza del segno delle successione $A_n - a$ e $b - A_n$). Passando al limite nell'uguaglianza $B_n = A_n + (b-a)/2^n$ si ottiene che anche $B_n \to c$. Essendo f continua avremo

$$f(A_n) \to f(c), \qquad f(B_n) \to f(c).$$

Ma $f(A_n) \leq 0$ e quindi per la permanenza del segno anche $f(c) \leq 0$. D'altra parte $f(B_n) \geq 0$ e quindi $f(c) \geq 0$. Si ottiene dunque $f(c) = 0$, come volevamo dimostrare. □

***Esempio* 2.52.** Si voglia risolvere l'equazione

$$x^5 - x - 1 = 0.$$

Posto $f(x) = x^5 - x - 1$ è chiaro che la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua (in quanto composizione di funzioni continue). Osserviamo che $f(0) = -1$ e $f(2) = 29$, dunque la funzione soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri sull'intervallo $[0,2]$. Sappiamo quindi che l'equazione in questione ha almeno una soluzione in tale intervallo.

Utilizzando il metodo di bisezione possiamo determinare una soluzione con precisione arbitraria. Posto $A_0 = 0$, $B_0 = 2$ abbiamo verificato che $f(A_0) < 0$ e $f(B_0) > 0$. Prendiamo il punto medio $C_0 = 1$ e calcoliamo la funzione: $f(C_0) = -1 < 0$. Sappiamo allora che una soluzione deve essere compresa nell'intevallo $[A_1, B_1] = [C_0, B_0] = [1,2]$ perché anche in tale intervallo valgono le ipotesi del teorema degli zeri. Il punto medio di tale intervallo è $C_1 = 3/2 = 1.5$ e risulta $f(3/2) = 163/32 > 0$ dunque l'intervallo successivo che andremo a considerare è $[A_2, B_2] = [1, 3/2]$. Per non dover lavorare con troppe cifre decimali invece di suddividere esattamente a metà quest'ultimo intervallo consideriamo un punto intermedio $C_2 = 6/5 = 1.2$ dove si ha $f(C_2) = 901/3125 > 0$. Sappiamo allora che una soluzione è compresa nell'intervallo $[A_3, B_3] = [1, 1.2]$. Prendiamo il punto medio $C_3 = 11/10 = 1.1$ e troviamo $f(C_3) = -48949/10^5 < 0$. Abbiamo quindi ottenuto che esiste $x \in (1.1, 1.2)$ tale che $f(x) = 0$. Sappiamo quindi che $|x - 1.15| < 0.05$ cioè abbiamo trovato x con un errore inferiore a 0.05.

Con molta pazienza si può procedere con il metodo di bisezione fino ad arrivare a verificare che $f(116/10^2) = -596583424/10^{10} < 0$ e $f(117/10^2) = 224480357/10^{10} > 0$ da cui si ottiene che una soluzione è compresa tra 1.16 e 1.17 con un errore inferiore a 0.005. Con il calcolatore (si veda ad esempio il codice a pagina 365) si possono ottenere più cifre significative: $x = 1.1673039782614187\ldots$

** **Corollario 2.53** (proprietà dei valori intermedi)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora se f assume due valori y_1 e y_2 allora f assume anche tutti i valori intermedi tra y_1 e y_2. Detto altrimenti: una funzione continua manda intervalli in intervalli.*

proprietà dei valori intermedi

Dimostrazione. Se y_1 e y_2 sono valori assunti da f significa che esistono $x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Allora scelto y si consideri

```
1.4142135623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694
  8073176679 7379907324 7846210703 8850387534 3276415727
  3501384623 0912297024 9248360558 5073721264 4121497099
  9358314132 2266592750 5592755799 9505011527 8206057147
  0109559971 6059702745 3459686201 4728517418 6408891986
  0955232923 0484308714 3214508397 6260362799 5251407989
  6872533965 4633180882 9640620615 2583523950 5474575028
  7759961729 8355752203 3753185701 1354374603 4084988471
  6038689997 0699004815 0305440277 9031645424 7823068492
  9369186215 8057846311 1596668713 0130156185 6898723723
  5288509264 8612494977 1542183342 0428568606 0146824720
  7714358548 7415565706 9677653720 2264854470 1585880162
  0758474922 6572260020 8558446652 1458398893 9443709265
  9180031138 8246468157 0826301005 9485870400 3186480342
  1948972782 9064104507 2636881313 7398552561 1732204024
  5091227700 2269411275 7362728049 5738108967 5040183698
  6836845072 5799364729 0607629969 4138047565 4823728997
  1803268024 7442062926 9124859052 1810044598 4215059112
  0249441341 7285314781 0580360337 1077309182 8693147101
  7111168391 6581726889 4197587165 8215212822 9518488472
```

Tabella 1: Le prime 1000 cifre decimali del numero $\sqrt{2}$ calcolate con il metodo di bisezione usato nella dimostrazione del teorema 2.51. Si veda il codice a pagina 365.

la funzione $g(x) = f(x) - y$. Se y è intermedio tra y_1 e y_2 la funzione g assumerà segni opposti in x_1 e x_2 e dunque, per il teorema degli zeri, dovrà esserci un punto x in cui g si annulla. In tale punto si avrà dunque $f(x) = y$, come volevamo dimostrare. □

Lemma 2.54. *Se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ ogni funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ iniettiva e continua è strettamente monotona.*

Dimostrazione. Si può osservare che una funzione è strettamente monotona se mantiene i valori intermedi cioè se dati tre punti $x < y < z$ risulta sempre che $f(y)$ è un valore intermedio tra $f(x)$ e $f(z)$:

$$f(x) < f(y) < f(z) \qquad \text{oppure} \qquad f(x) > f(y) > f(z).$$

Se ciò non accadesse, ad esempio se fosse $f(y) > f(z) > f(x)$ con $x < y < z$ allora per la continuità di f dovrebbe esistere un valore intermedio tra x e y in cui la funzione assume il valore $f(z)$. Ma allora la funzione non sarebbe iniettiva. □

Lemma 2.55 (caratterizzazione delle funzioni monotone continue)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora sono equivalenti*

1. *f è continua;*
2. *per ogni $x \in I$*
   a) *se $x \neq \inf I$ allora $f(x) = \sup f(\{y \in I\colon y < x\})$,*
   b) *e se $x \neq \sup I$ allora $f(x) = \inf f(\{y \in I\colon y > x\})$.*

Risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.

Dimostrazione. Sia $A_x = \{y \in I\colon y < x\}$ e $B_x = \{y \in I\colon y > x\}$. Se f è crescente risulta sempre

$$f(A_x) \le f(x) \le f(B_x)$$

in quanto se $a \in A_x$ e $b \in B_x$ allora $a < x < b$ e quindi $f(a) \le f(x) \le f(b)$. Dunque

$$\sup f(A_x) \le f(x) \le \inf f(B_x).$$

Supponiamo che f sia continua e consideriamo un qualunque $x \in I$. Se $x \neq \inf I$ dobbiamo mostrare che $\sup f(A_x) \ge f(x)$. La successione $x_n = x - 1/n$ sta in A_x per n sufficientemente grande, dunque $\sup f(A_x) \ge f(x_n)$. Ma visto che $f(x_n) \to f(x)$ per confronto si ottiene $\sup f(A_x) \ge f(x)$. Analogamente se $x \neq \sup I$ prendendo la successione $x_n = x + 1/n$ si trova che $\inf f(B_x) \le f(x)$.

Supponiamo ora di avere $x \in I$ che non è un estremo di I e che valga $\sup f(A_x) = f(x) = \inf f(B_x)$. Per ogni $\varepsilon > 0$, per la caratterizzazione di sup e inf dovranno allora esistere $y \in A_x$ e $z \in B_x$ tali che $f(x) = \sup f(A_x) < f(y) + \varepsilon$ e $f(x) = \inf f(B_x) > f(z) - \varepsilon$. Se $x_n \in I$ e $x_n \to x$

per n abbastanza grande si dovrà avere $y < x_n < z$ e quindi, per la monotonia di f: $f(y) \leq f(x_n) \leq f(z)$ da cui

$$f(x) - \varepsilon < f(x_n) < f(x) + \varepsilon.$$

Significa allora che $f(x_n) \to f(x)$.

Se x fosse un estremo di I, ad esempio se $x = \inf I$, si ripete lo stesso ragionamento ma solo sul lato destro di x: per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà $z \in B_x$ tale che $f(x) = \inf f(B_x) \geq f(z) - \varepsilon$. Ma se $x_n \in I$ dovrà essere $x_n \geq x$ (in quanto x è l'estremo inferiore di I) e quindi si avrà comunque

$$f(x) \leq f(x_n) < f(x) + \varepsilon$$

da cui segue, per l'arbitrarietà di ε, $f(x_n) \to f(x)$. □

continuità della funzione inversa

Teorema 2.56 (continuità della funzione inversa). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua strettamente crescente. Allora posto $J = f(I)$ anche J è un intervallo, $f\colon I \to J$ è invertibile e $f^{-1}\colon J \to I$ è anch'essa continua e strettamente crescente.* *

Risultato analogo vale per le funzioni strettamente decrescenti.

Dimostrazione. Che $J = f(I)$ sia un intervallo segue direttamente dal teorema dei valori intermedi, essendo f continua. Essendo f strettamente crescente f risulta essere iniettiva e quindi $f\colon I \to J$ è biettiva. Esiste dunque la funzione inversa $f^{-1}\colon J \to I$.

Mostriamo ora che la stretta monotonia di f^{-1} segue dalla stretta monotonia di f. Presi $y_1 < y_2$ in J poniamo $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$ cosicché $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Se per assurdo fosse $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ si avrebbe $x_1 \geq x_2$ e quindi $f(x_1) \geq f(x_2)$ cioè $y_1 \geq y_2$, contro l'ipotesi $y_1 < y_2$.

Per mostrare che f^{-1} è continua utilizziamo il lemma precedente. Dato $y \in J$ con $y \neq \inf J$, consideriamo l'insieme $A'_y = \{t \in J\colon t < y\}$. Essendo f monotona e invertibile, posto $x = f^{-1}(y)$ e $A_x = \{s \in I\colon s < x\}$ si ha $f^{-1}(A'_y) = A_x$ e chiaramente $\sup A_x = x$. Dunque $\sup f^{-1}(A'_y) = x = f^{-1}(y)$. In maniera analoga si dimostra che $\inf f^{-1}(\{t \in J\colon t > y\}) = f^{-1}(y)$ quando $y \neq \sup J$. Dunque f^{-1} è continua, come volevamo dimostrare. □

Esercizio 2.57. Sia $f\colon I \to J$ una funzione continua e invertibile definita tra due intervalli $I \subseteq \mathbb{R}$ e $J \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che f è strettamente monotona (e quindi f^{-1} è continua).

2.7 IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

** **Definizione 2.58** (massimi e minimi assoluti). *Sia A un insieme e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Il* massimo *M e il* minimo *m di f su A sono, se esistono, i valori*

massimo/minimo

$$M = \max f(A) = \max\{f(x)\colon x \in A\}$$
$$m = \min f(A) = \min\{f(x)\colon x \in A\}.$$

Si indicano anche con

max, min

$$M = \max_{x\in A} f(x), \qquad m = \min_{x\in A} f(x).$$

Diremo inoltre che x_0 è un punto di massimo assoluto *per f se $f(x_0) = M$ e diremo che x_0 è un* punto di minimo assoluto *per f se $f(x_0) = m$.*

massimo/minimo assoluto

Equivalentemente x_0 è un massimo assoluto se $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in A$ e invece x_0 è un minimo assoluto se $f(x_1) \leq f(x)$ per ogni $x \in A$.

Si faccia attenzione a non confondere i *valori* massimo e minimo con i *punti* di massimo e minimo. I valori sono elementi della immagine della funzione, i punti sono elementi del dominio.

***Esempio* 2.59.** Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Per ogni x si ha $x^2 \geq 0$ quindi $1 + x^2 \geq 1$ e dunque $f(x) \leq 1$. Inoltre si ha $f(0) = 1$. Dunque 1 è il massimo della funzione e il punto $x = 0$ è un punto di massimo (in questo caso l'unico).

Ma chiaramente $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $f(n) \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi $\inf f(\mathbb{R}) = 0$. Se f avesse minimo si dovrebbe avere $\min f(\mathbb{R}) = \inf f(\mathbb{R}) = 0$ ma 0 non può essere minimo in quanto $f(x) > 0$ per ogni x. Risulta quindi che la funzione f non ha minimo.

Lemma 2.60 (successioni minimizzanti/massimizzanti). *Sia A un insieme non vuoto e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora esistono due successioni a_n e b_n di punti di A tali che*

successioni minimizzanti/massimizzanti

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \inf f(A), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \sup f(A).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}$ è l'immagine della funzione f. Facciamo la dimostrazione per l'estremo inferiore, risultato analogo si potrà ottenere per l'estremo superiore.

Sia $m = \inf f(A)$. Se $m = -\infty$ significa che $f(A)$ non è inferiormente limitato, in particolare per ogni $n \in \mathbb{R}$ esiste a_n tale che $f(a_n) < -n$. Dunque (per confronto) $f(a_n) \to -\infty$ come volevamo dimostrare.

Se $m \in \mathbb{R}$ per le proprietà caratterizzanti l'estremo inferiore sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) < m + \varepsilon$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere $\varepsilon = 1/n$ e ottenere quindi una successione a_n tale che $f(a_n) < m + 1/n$. D'altra parte essendo m un minorante di $f(A)$ sappiamo che $m \leq f(a_n)$. Abbiamo dunque $m \leq f(a_n) < m + 1/n$ e per il teorema dei carabinieri possiamo quindi concludere che $f(a_n) \to m$ per $n \to +\infty$. □

teorema di Weierstrass

Teorema 2.61 (Weierstrass). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono punti di massimo e di minimo per f su $[a, b]$.* ***

Dimostrazione. Dimostriamo solamente che f ha minimo, per il massimo la dimostrazione procede infatti in maniera del tutto analoga. ***

Sia $m = \inf f([a, b])$. Per il lemma precedente sappiamo che esiste una successione a_n minimizzante ovvero tale che $a_n \in A$ e $f(a_n) \to m$ per $n \to +\infty$.

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass dalla successione a_n possiamo estrarre una sottosuccessione a_{n_k} convergente: $a_{n_k} \to x_0$. Visto che $a_{n_k} \in [a, b]$ si avrà, per il teorema della permanenza del segno, anche $x_0 \in [a, b]$ (si applichi la permanenza del segno alle successioni $a_{n_k} - a$ e $b - a_{n_k}$).

Dunque abbiamo una successione $a_{n_k} \to x_0$ con $a_{n_k} \in [a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$. Essendo f continua si avrà dunque $f(a_{n_k}) \to f(x_0)$. Ma noi sapevamo che $f(a_n) \to m$ e dunque anche $f(a_{n_k}) \to m$. Concludiamo quindi che $f(x_0) = m$ cioè m, l'estremo inferiore, è un valore assunto dalla funzione ed è quindi un minimo. Dal canto suo x_0 è un punto di minimo assoluto. □

Corollario 2.62 (limitatezza delle funzioni continue). *Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è limitata.*

Dimostrazione. Visto che f ha massimo M e minimo m si ha $f(x) \in [m, M]$ per ogni $x \in [a, b]$. Ovviamente $m > -\infty$ e $M < +\infty$ in quanto m e M sono valori della funzione f. □

2.8 POTENZE E RADICI n-ESIME

invertibilità della funzione potenza

Teorema 2.63 (invertibilità della funzione potenza). *Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la funzione* *

$$\begin{aligned} f \colon [0, +\infty) &\to [0, +\infty) \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

è strettamente crescente e biettiva. Inoltre, se n è dispari, la funzione

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

è strettamente crescente e biettiva.

Dimostrazione. La funzione f su $[0, +\infty)$ è strettamente crescente perché per l'assioma di monotonia del prodotto di numeri reali si osserva che se $x > y \geq 0$ allora $x^2 > y^2$, $x^3 > y^3$ e così via (la dimostrazione andrebbe formalizzata, al solito, utilizzando il principio di induzione). Essendo strettamente crescente f è anche iniettiva. Per mostrare che $f \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è suriettiva, consideriamo un qualunque

$y \in [0, +\infty)$ e prendiamo la funzione $g(x) = f(x) - y$. Chiaramente $g(0) = 0^n - y = -y \leq 0$. Se $y \leq 1$ allora $g(1) = 1^n - y \geq 0$ altrimenti, se $y > 1$, si ha $y^n > y$ e quindi $g(y) = y^n - y \geq 0$. In ogni caso abbiamo verificato che esistono a, b tali che $g(a) \leq 0$ e $g(b) \geq 0$

Osserviamo che, per il teorema sul limite del prodotto, se $x_k \to x$ allora $x_k^2 = x_k \cdot x_k \to x \cdot x = x^2$. Questo dimostra che la funzione x^2 è continua. Per induzione si dimostra che x^n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il teorema sul limite della differenza risulta che anche g è continua. Dunque possiamo applicare il teorema degli zeri per determinare l'esistenza di un $x \in [0, +\infty)$ tale che $g(x) = 0$. Visto che x risolve l'equazione $f(x) = y$ e la surgettività è dimostrata.

Se n è dispari si ha $(-x)^n = -(x^n)$. In particolare per $x < 0$ si ha $x^n < 0$. Dunque se $x > y \geq 0$ si ha $-x < -y \leq 0$ e

$$(-x)^n = -x^n < -y^n \leq 0.$$

E' quindi facile verificare che la funzione x^n risulta strettamente crescente e bigettiva su tutto $\mathbb{R}$. □

*** **Definizione 2.64** (radice n-esima). *Se $n \in \mathbb{N}$ è pari e non nullo chiamiamo $\sqrt[n]{x}$ la funzione inversa di x^n come funzione $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari chiamiamo $\sqrt[n]{x}$ la funzione inversa di x^n come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.* *radice n-esima*

Se ricordiamo come era stata definita la radice quadrata $\sqrt{x}$ nel teorema Teorema 1.8 ci rendiamo conto che $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$. La radice seconda viene usualmente chiamata radice quadrata e analogamente la radice terza viene usualmente chiamata *radice cubica*.

Teorema 2.65 (proprietà della radice n-esima). *Per ogni $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a \geq 0$, $b > 0$ si ha:* *proprietà della radice*

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$;
2. $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$;
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
5. *la funzione $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ è continua e strettamente crescente.*

Dimostrazione. Le proprietà della radice vengono dedotte dalle corrispondenti proprietà della potenza intera, sfruttando il fatto che la radice è la funzione inversa. L'ultima proprietà discende dal teorema 2.56. □

** **Teorema 2.66** (disuguaglianza di Bernoulli). *Se $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha* *disuguaglianza di Bernoulli*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Dimostrazione. Lo dimostriamo per induzione su n. Per $n = 0$, sostituendo si ottiene $1 \geq 1$. Supponendo che sia verificata la disuguaglianza per un certo n: **

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

moltiplicando ambo i membri per $1 + x > 0$ si ottiene

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare. □

limite della radice n-esima

Teorema 2.67 (limite della radice n-esima)**.** *Se $a > 0$* **

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Dimostrazione. Consideriamo innanzitutto il caso $a \geq 1$. Posto $x = \sqrt[n]{a} - 1$ nella disuguaglianza di Bernoulli, si ha *

$$a = (1+x)^n \geq 1 + nx = 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$$

da cui

$$\sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n} \to 1 + 0 = 1.$$

D'altra parte se $a \geq 1$ si ha $\sqrt[n]{a} \geq 1$ e dal confronto tra limiti si ottiene la tesi.

Se $a < 1$ basta osservare che

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$$

per il caso precedente applicato con $1/a$ al posto di a. □

Siamo ora intenzionati a definire le potenze x^y con esponente $y \in \mathbb{R}$. La funzione $f(x) = a^x$ si ottiene dal seguente teorema.

funzione esponenziale

Teorema 2.68 (funzione esponenziale)**.** *Per ogni $a > 0$ esiste una unica funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*

1. *$f(1) = a$;*
2. *per ogni $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;*
3. *f è monotòna.*

Tale funzione risulta inoltre essere positiva, e continua, soddisfa la relazione $f(-x) = 1/f(x)$ e se $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ risulta

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}.$$

Inoltre se $a > 1$ tale funzione è strettamente crescente, se $a < 1$ tale funzione è strettamente decrescente e se $a = 1$ tale funzione è costante.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che f non si può annullare mai. Infatti per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$a = f(1) = f(x + 1 - x) = f(x) \cdot f(1 - x)$$

e dunque se fosse $f(x) = 0$ si avrebbe $a = 0$ che abbiamo escluso per ipotesi. Possiamo anzi dire che f non è mai negativa in quanto

$$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)^2 \geq 0.$$

Osserviamo anche che

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$$

da cui, dividendo per $f(0)$ si ottiene $f(0) = 1$. E' anche facile verificare, per induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(nx) = (f(x))^n$$

infatti $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x)$. In particolare se $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(n) = f(1)^n = a^n.$$

Ma poi

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x)$$

e quindi $f(-x) = 1/f(x)$ e quindi $f(nx) = (f(x))^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. In particolare se $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$a^p = f(p) = f(q \cdot p/q) = (f(p/q))^q$$

da cui

$$f(p/q) = \sqrt[q]{a^p}. \tag{4}$$

Dunque la funzione $f(x)$ è univocamente determinata per ogni $x \in \mathbb{Q}$. Osserviamo che, per le proprietà delle radici, se $p/q = n/m$ allora

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$$

e questo significa che f può effettivamente essere definita coerentemente su tutto $\mathbb{Q}$ tramite la (4).

Supponiamo d'ora in poi che sia $a > 1$ e verifichiamo che in tal caso f deve essere strettamente crescente su $\mathbb{Q}$. Se $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x < y$ si avra $x = p/q$, $y = n/m$ con $pm < nq$ allora $a^{pm} < a^{nq}$ e quindi

$$f(x) = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qm]{a^{pm}} < \sqrt[qm]{a^{nq}} = \sqrt[m]{a^n} = f(y).$$

Definiamo ora

$$A_x = \{t \in \mathbb{Q} \colon t < x\} = \mathbb{Q} \cap (-\infty, x),$$
$$B_x = \{t \in \mathbb{Q} \colon t > x\} = \mathbb{Q} \cap (x, +\infty).$$

Ovviamente $A_x < x < B_x$ (nel senso che per ogni $\alpha \in A_x$ e per ogni $\beta \in B_x$ si ha $\alpha < x < \beta$). Siccome vogliamo che f sia crescente si dovrà avere $f(A_x) \leq f(x) \leq f(B_x)$ da cui in particolare $\sup f(A_x) \leq f(x) \leq \inf f(B_x)$.

Vogliamo ora mostrare che deve essere $\sup f(A_x) = \inf f(B_x)$ cosicché $f(x)$ sarà univocamente determinata per ogni $x \in \mathbb{R}$ da:

$$f(x) = \sup f(A_x) = \inf f(B_x). \tag{5}$$

(ricordiamo infatti che su $\mathbb{Q}$ f è già stata univocamente determinata e A_x e B_x sono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$).

Dato qualunque $x \in \mathbb{R}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $x < k$. Scelto comunque $n \in \mathbb{N}$, per la densità dei razionali esistono $y, z \in \mathbb{Q}$ tali che

$$y < x < z < k$$

e tali che $z - y < \frac{1}{n}$. Allora si avrà

$$\begin{aligned} 0 \leq f(z) - f(y) = f(y) \cdot \left(\frac{f(z)}{f(y)} - 1 \right) &\leq f(k) \cdot (f(z-y) - 1) \\ &\leq f(k) \cdot (f(1/n) - 1). \end{aligned}$$

Chiaramente $y \in A_x$ e $z \in B_x$ dunque

$$\inf f(B_x) - \sup f(A_x) \leq f(z) - f(y) \leq f(k) \cdot (f(1/n) - 1).$$

Ricordiamo ora che $f(1/n) = \sqrt[n]{a} \to 1$ (teorema precedente) dunque il lato destro della precedente disuguaglianza può essere reso minore di qualunque $\varepsilon > 0$ e quindi, come voluto, dovrà essere $\inf f(B_x) = \sup f(A_x)$.

Mostriamo ora che $f(x)$ deve essere strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, ricordando che abbiamo già verificato che f è strettamente crescente su $\mathbb{Q}$. Ma presi $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ esistono $z, w \in \mathbb{Q}$ tale che $x < z < w < y$. Allora $z \in B_x$ e $w \in A_y$, dunque

$$f(x) = \inf f(B_x) \leq f(z) < f(w) \leq \sup A_y = f(y).$$

Il teorema di caratterizzazione delle funzioni monotone e continue ci assicura che le condizione $f(x) = \sup A_x$ e $f(x) = \inf B_x$ garantiscono la continuità di f.

Infine, la relazione

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

è verificata se $x, y \in \mathbb{Q}$ (abbiamo costruito f su $\mathbb{Q}$ in modo che questa relazione fosse valida). Ma se $x, y \in \mathbb{R}$ per densità esisteranno $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Allora passando al limite nella relazione

$$f(x_n + y_n) = f(x_n) \cdot f(y_n)$$

sfruttando la continuità di f si ottiene il risultato voluto.

Nel caso $a < 1$ si procede in maniera analoga, la funzione risulterà strettamente decrescente su $\mathbb{Q}$ e si potrà estendere su tutto $\mathbb{R}$ mantenendo la monotonia. Nel caso $a = 1$ si vede che la funzione f è costante $f(x) = 1$ su $\mathbb{Q}$ e quindi per mantenere la monotonia l'unico modo per estendere f a tutto $\mathbb{R}$ è quello di mantenere la stessa costante. □

Definizione 2.69 (potenze con esponente reale)**.** *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Definiamo a^x come l'unica funzione definita dal teorema precedente.* *a^x*

***Esercizio* 2.70.** Si dimostri che $a^{xy} = (a^x)^y$ e $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$. (sfruttare l'unicità data dal teorema della funzione esponenziale).

Osserviamo che abbiamo dato due diverse definizioni di x^y. La prima è quella delle potenze intere, valida se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{Z}$ e se $x \neq 0$ quando $y < 0$. La seconda, quella delle potenze con esponente reale è valida per $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$. Il teorema precedente ci garantisce che le due definizioni coincidono quando $x > 0$ e $y \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.71 (limite dell'esponenziale)**.** *Sia $a > 1$.* *limite dell'esponenziale*

1. *se $x_n \to +\infty$ allora $a^{x_n} \to +\infty$;*
2. *se $x_n \to -\infty$ allora $a^{x_n} \to 0$;*

Dimostrazione. La disuguaglianza di Bernoulli garantisce che

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1).$$

Ma allora se $x_n \to +\infty$

$$a^{x_n} \geq a^{\lfloor x_n \rfloor} \geq 1 + \lfloor x_n \rfloor (a-1) \geq 1 + (x_n - 1) \cdot (a-1) \to +\infty.$$

Se $x_n \to -\infty$ allora $-x_n \to +\infty$ ed essendo $a^{-x_n} = 1/a^{x_n}$ si ottiene il risultato voluto. □

2.9 IL LOGARITMO

Fissato $a > 1$ consideriamo la funzione esponenziale $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Sappiamo che f, essendo strettamente crescente, è iniettiva. Il teorema sulla funzione esponenziale ci dice che $f(x) > 0$ e quindi $f(\mathbb{R}) \subseteq (0, +\infty)$. Visto però che $a^n \to +\infty$ e $a^{-n} \to 0$ scopriamo che $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ e $\inf f(\mathbb{R}) = 0$. Per la continuità di f risulta però che $f(\mathbb{R})$ sia un intervallo e dunque necessariamente $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Dunque $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è biettiva. Lo stesso vale nel caso $0 < a < 1$ (semplicemente per il fatto che $a^x = (1/a)^{-x}$).

Definizione 2.72 (logaritmo)**.** *Per $a > 0$, $a \neq 1$ definiamo $\log_a\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, chiamato* logaritmo in base a, *la funzione inversa di a^x. Si ha dunque* *logaritmo*

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

proprietà del logaritmo

Teorema 2.73 (proprietà del logaritmo). *Se $a > 0$, $a \neq 1$*

1. $\log_a(a^x) = x$;
2. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
3. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$;
4. $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$;
5. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ *(qualunque sia $b > 0$, $b \neq 1$)*;
6. *se $a > 1$ la funzione $\log_a(x)$ è strettamente crescente, se $0 < a < 1$ è strettamente decrescente;*
7. *$\log_a(x)$ è una funzione continua;*
8. *se $a > 1$ e $x_n \to +\infty$ allora $\log_a(x_n) \to +\infty$;*
9. *se $a > 1$ e $x_n \to 0$, $x_n > 0$ allora $\log_a(x_n) \to -\infty$.*

Dimostrazione. Tutte queste proprietà si ricavano direttamente dalle analoghe proprietà dell'esponenziale. □

Per completezza enunciamo il seguente teorema che però probabilmente non conviene memorizzare. L'idea veramente rilevante, che si usa nella dimostrazione, è il fatto che quando in una potenza variano sia la base che l'esponente conviene riscrivere la potenza fissando una base $c > 1$ qualunque tramite la seguente identità:

$$a^b = c^{b \cdot \log_c a}.$$

In questo modo la base rimane fissata e quello che varia è solo l'esponente.

limite della potenza

Teorema 2.74 (limite della potenza). *Siano a_n e b_n successioni Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ sono successioni convergenti e $a > 0$ allora*

$$(a_n)^{b_n} \to a^b.$$

Inoltre se $a_n \to a$, $a_n > 0$, $b_n \to b$:

1. *se $a < 1$ e $b = +\infty$ allora ${a_n}^{b_n} \to 0$;*
2. *se $a < 1$ e $b = -\infty$ allora ${a_n}^{b_n} \to +\infty$;*
3. *se $a > 1$ e $b = +\infty$ allora ${a_n}^{b_n} \to +\infty$;*
4. *se $a > 1$ e $b = -\infty$ allora ${a_n}^{b_n} \to 0$;*
5. *se $a = +\infty$ e $b > 0$ allora ${a_n}^{b_n} \to +\infty$.*

Dimostrazione. Scelto un qualunque numero $c > 1$ (ad esempio $c = 2$) si ha
$$a_n^{b_n} = c^{\log_c a_n^{b_n}} = c^{b_n \cdot \log_c a_n}.$$

Per la continuità del logaritmo si ha $\log_c a_n \to \log_c a$ (oppure $\log_c a_n \to +\infty$ se $a = +\infty$), per il teorema sul limite del prodotto si ha $b_n \cdot \log_c a_n \to b \cdot \log_c a$ e infine, per la continuità dell'esponenziale si ottiene
$$c^{b_n \cdot \log_c a_n} \to c^{b \log_c a} = a^b.$$

Negli altri casi si procede con la stessa dimostrazione e si osserva che il prodotto $b_n \cdot \log a_n$ non risulta essere una forma indeterminata. $\square$

Rimangono esclusi i seguenti casi (forme indeterminate):

1. $a = 0$, $b = 0$ forma indeterminata "0^0";
2. $a = 1$, $b = +\infty$ forma indeterminata "$1^{+\infty}$";
3. $a = 1$, $b = -\infty$ forma indeterminata "$1^{-\infty}$";
4. $a = +\infty$, $b = 0$ forma indeterminata "$(+\infty)^0$".

2.10 LA COSTANTE DI NEPERO

La funzione esponenziale è legata ad un modello di crescita che si trova spesso in natura: la *crescita esponenziale*. Prendiamo come esempio una popolazione di batteri che cresce senza limitazioni di spazio e di nutrimento (oppure la crescita di un capitale dovuto ad una rendita finanziaria).

crescita esponenziale

Se $q(t)$ indica il numero di batteri al tempo t (o il capitale accumulato) possiamo affermare che al tempo $t + s$ ho una popolazione $q(t + s)$ che, fissato s, è proporzionale a $q(t)$, perché ogni batterio avrà avuto la sua discendenza moltiplicata per un fattore $k(s)$ indipendentemente dalla numerosità dei batteri.

Si avrà dunque
$$q(t + s) = q(t) \cdot k(s).$$
In particolare fissato s si avrà
$$q(s) = q(0 + s) = q(0) \cdot k(s)$$
cioè $k(t) = q(t)/q(0)$. Ma allora
$$k(t + s) = \frac{q(t + s)}{q(0)} = \frac{q(t)k(s)}{q(0)} = k(t)k(s).$$
In base al teorema 2.68 possiamo affermare che $k(t)$ è una funzione esponenziale $k(t) = a^t$ per una qualche costante a. La costante a può essere determinata mediante la formula:
$$a = k(1) = \frac{q(1)}{q(0)}$$

ma questa espressione non ha un preciso significato fisico in quanto dipende dall'unità di tempo scelta.

La costante a cui possiamo dare significato è invece l'aumento relativo istantaneo della popolazione. Possiamo infatti supporre che se lasciamo la popolazione crescere per un tempo Δt molto piccolo, si otterrà un aumento di popolazione proporzionale al tempo Δt e alla popolazione:

$$q(t+\Delta t) = q(t) + cq(t)\Delta t = (1+c\Delta t)q(t). \tag{6}$$

La costante c rappresenta quindi l'aumento relativo istantaneo della popolazione. Questa definizione ha senso quando Δt è piccolo in quanto non tiene conto del fatto che nell'intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$ la popolazione che si è aggiunta genera anch'essa nuova popolazione (ovvero l'interesse accumulato genera anch'esso interesse).

Per calcolare l'aumento della popolazione su tempi "grandi" possiamo suddividere gli intervalli temporali in n intervallini di ampiezza Δt e applicare in ognuno di essi la relazione (6). Si trova:

$$\begin{aligned} q(t+\Delta t) &= (1+c\Delta t)q(t) \\ q(t+2\Delta t) &= (1+c\Delta t)q(t+\Delta t) = (1+c\Delta t)^2 q(t) \\ &\vdots \\ q(t+n\Delta t) &= (1+c\Delta t)^n q(t). \end{aligned}$$

Dunque, ponendo $\Delta t = s/n$ si ha

$$q(t+s) = (1+\frac{cs}{n})^n q(t)$$

in particolare per $t=0$ e $s=1/c$ si ottiene:

$$q(1/c) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n q(0)$$

e ricordando che $q(t) = a^t q(0)$ otteniamo:

$$a^{\frac{1}{c}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Se per $n \to +\infty$ (che corrisponde a $\Delta t \to 0$) la quantità sul lato destro tende ad un numero e (che chiameremo costante di Nepero) avremo allora

$$a = e^c, \qquad q(t) = q(0)e^{ct}$$

che è la relazione che lega le due costanti a e c che definiscono la crescita esponenziale.

Risulta in effetti valido il seguente.

Teorema 2.75 (costante di Nepero). *La successione* **

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

è crescente e limitata, dunque è convergente.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che a_n è crescente, cioè che per ogni $n \geq 2$ si ha $a_n \geq a_{n-1}$. E′ chiaro che $a_n > 0$ per ogni n, quindi ci riconduciamo a verificare che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$.

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}\end{aligned}$$

Osserviamo ora che la disuguaglianza di Bernoulli garantisce

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

da cui si ottiene, come volevamo, $a_n/a_{n-1} \geq 1$ cioè a_n è crescente.

Se ora consideriamo la successione

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

osserviamo che si ha

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n.$$

Per dimostrare che a_n è limitata sarà quindi sufficiente dimostrare che b_n è superiormente limitata. Vedremo ora che b_n è decrescente (e quindi $a_n \leq b_n \leq b_1$ è superiormente limitata).

Procediamo in maniera analoga a quanto fatto per a_n:

$$\begin{aligned}\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

In base alla disuguaglianza di Bernoulli otteniamo

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n^2-1} \geq 1 + n\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Mettendo insieme le due stime si ottiene dunque $b_{n-1}/b_n \geq 1$ che è quanto ci rimaneva da dimostrare. □

E′ quindi giustificata la seguente.

*** **Definizione 2.76** (costante di Nepero)**.** *Definiamo la* costante di Nepero

costante di Nepero

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Sapendo che
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
e ponendo $n = 1$ otteniamo $2 \le e \le 4$.

***Esercizio* 2.77.** Posto $a_n = \frac{n^n}{n!}$ mostrare che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e$.

limiti che si riconducono al numero e

Teorema 2.78 (limiti che si riconducono al numero e)**.** *Se $a_k \to 0$, $a_k \neq 0$ allora, per $k \to +\infty$,*
$$(1+a_k)^{\frac{1}{a_k}} \to e.$$

Dimostrazione. Caso 1. Se $a_k > 0$ allora consideriamo la successione di naturali $n_k = \lfloor 1/a_k \rfloor$ cosicché
$$n_k \le \frac{1}{a_k} \le n_k + 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n_k+1} \le a_k \le \frac{1}{n_k}.$$
dunque
$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} \le (1+a_k)^{\frac{1}{a_k}} \le \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$
Osserviamo ora che essendo che per $k \to +\infty$ anche $n_k \to +\infty$ si deve avere (in base al teorema di cambio di variabile nei limiti)
$$\lim_k \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$
ed essendo anche $n_k + 1 \to +\infty$
$$\lim_k \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{n}} = e.$$
Dunque, per confronto tra i limiti, si ottiene $(1+a_k)^{\frac{1}{a_k}} \to e$.

Caso 2. Se $a_k < 0$ possiamo scrivere $a_k = -|a_k|$ da cui
$$(1+a_k)^{\frac{1}{a_k}} = \frac{1}{(1-a_k)^{\frac{1}{a_k}}}$$
e, procedendo come nel caso precedente, ci si riconduce al limite
$$\lim_n \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}.$$
Per quest'ultimo osserviamo che si ha
$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

che per quanto visto in precedenza (mettendo $n+1$ al posto di n) ha anch'esso limite e.

Caso generale. Se a_k ha segno variabile posso considerare le due sottosuccessione dei termini di segno positivo e dei termini di segno negativo. Per quanto visto nei casi precedenti entrambe le successioni convergono ad e e quindi è immediato verificare che l'intera successione converge ad e. □

Corollario 2.79. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Dimostrazione. Infatti, per il teorema precedente, posto $a_n = x/n$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = e.$$

Ma allora

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \to e^x$$

□

Definizione 2.80 (logaritmi naturali)**.** *Vedremo che il numero e risulta essere una base naturale per la funzione esponenziale e di conseguenza per il logaritmo. Il logaritmo in base e viene chiamato* logaritmo naturale *e viene indicato con* $\ln = \log_e$. *logaritmo naturale*

In alcuni testi si utilizza l'operatore log, indicato senza una base esplicita, ma la definizione non è completamente condivisa. In certi testi (per lo più in ambito matematico) si definisce $\log = \ln = \log_e$, in altri testi si considera $\log = \log_{10}$.

Corollario 2.81 (limite notevole)**.** *Se $a_n \to 0$, $a_n > 0$ allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

Dimostrazione. Per ricondursi al teorema precedente basta osservare che

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \ln\left((1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right).$$

□

***Esercizio* 2.82.** Mostrare che

$$\lim n^n \cdot \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n = e.$$

***Esercizio* 2.83.** Mostrare che

$$\lim n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

2.11 ORDINI DI INFINITO

criterio della radice

Teorema 2.84 (criterio della radice). *Sia a_n una successione a termini positivi tale che* ***

$$\sqrt[n]{a_n} \to \ell$$

con $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora se $\ell < 1$ si ha $a_n \to 0$ se invece $\ell > 1$ si ha $a_n \to +\infty$.

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $\ell < 1$. Se $\lim \sqrt{a_n} = \ell$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ la successione $\sqrt{a_n}$ risulta definitivamente minore di $\ell + \varepsilon$. Scegliendo opportunamente ε (ad esempio $\varepsilon = (1-\ell)/2$) si potrà avere $q = \ell + \varepsilon < 1$. Dunque avremo definitivamente $\sqrt[n]{a_n} < q$ ovvero $a_n < q^n$. Per ipotesi $a_n \geq 0$ e quindi, tolto un numero finito di termini, si ottiene $0 \leq a_n < q^n \to 0$ da cui $a_n \to 0$ (in quanto l'aver tolto un numero finito di termini non cambia né il carattere né il limite della successione). **

Se $\ell > 1$ si potrà procedere in maniera analoga. Esisterà q con $1 < q < \ell$ tale che definitivamente $\sqrt[n]{a_n} > q$ da cui $a_n > q^n \to +\infty$. □

Dimostrazione alternativa. Si può osservare che

$$a_n = \left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n = e^{n \cdot \ln \sqrt[n]{a_n}}.$$

Se $\ell < 1$ allora il logaritmo tende ad un numero negativo, l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$ e quindi l'esponenziale tende a zero. Se invece $\ell > 1$ il logaritmo tende ad un numero positivo e quindi l'esponenziale tende a $+\infty$. □

Teorema 2.85 (criterio del rapporto). *Sia a_n una successione reale a termini non negativi $a_n \geq 0$ tale che esista il limite del rapporto di due termini consecutivi:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Se $\ell < 1$ allora $a_n \to 0$, se $\ell > 1$ allora $a_n \to +\infty$.

Dimostrazione. Supponiamo sia $\ell < 1$. Posto $q = (1+\ell)/2$ si ha $q < \ell < 1$ e posto $\varepsilon = q - \ell > 0$ per la definizione di limite $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ dovrà esistere un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si abbia:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon = q$$

ovvero $a_{n+1} < q \cdot a_n$. In particolare si avrà:

$$\begin{aligned} &a_{N+1} < q \cdot a_N \\ &a_{N+2} < q \cdot a_{N+1} < q^2 \cdot a_N \\ &a_{N+3} < q \cdot a_{N+2} < q^3 \cdot a_N \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

ed è chiaro che per induzione potremo dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha
$$a_{N+k} < q^k \cdot a_N.$$
Osserviamo però che $q^k \cdot a_N \to 0$ per $k \to +\infty$ in quanto $q < 1$ e quindi $q^k \to 0$. Dunque, tolti i primi N termini, la successione a_n tende a zero. Ma i primi N termini non influenzano né il carattere né il limite della successione e quindi l'intera successione a_n tende a zero.

Il caso $\ell > 1$ si fa in maniera analoga. Si sceglie q tale che $1 < q < \ell$ e si trova, in maniera analoga al caso precedente, che per un certo $N \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha
$$a_{N+k} > q^k \cdot a_N \to +\infty.$$
□

Osserviamo che, nel teorema precedente (ma anche nel criterio della radice), non si può concludere alcunché nel caso in cui sia $\ell = 1$. Ad esempio le due successioni $a_n = 1/n$ e $b_n = n$ hanno limiti diversi ($a_n \to 0$, $b_n \to +\infty$) ma per entrambe il limite del rapporto di termini consecutivi tende ad $\ell = 1$.

***Esercizio* 2.86.** Mostrare che
$$\lim \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$
Posto $a_n = 2^n/n!$ possiamo provare ad applicare il criterio del rapporto. Ci si riconduce all'esercizio 2.77 dove abbiamo già visto che $a_{n+1}/a_n \to e$. Visto che $e > 1$ per il criterio del rapporto possiamo affermare che $a_n \to +\infty$.

* **Teorema 2.87** (Cesàro, relazione tra rapporto e radice). *Sia a_n una successione a termini positivi. Se*

criterio del rapporto alla Cesàro
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \mathbb{R}$$
allora
$$\sqrt[n]{a_n} \to \ell.$$

Dimostrazione. Chiaramente deve essere $\ell \geq 0$. Supponiamo inizialmente che sia $\ell > 0$ e scegliamo qualunque $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon < \min\{1, \ell\}$. Per la definizione di limite $a_{n+1}/a_n \to \ell$ esisterà N tale che per $n > N - 1$ si abbia
$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon.$$
Osserviamo che in generale, per ogni $n \geq N$ si ha
$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N.$$

Dunque potendo stimare, dall'alto e dal basso, ognuno degli $n-N$ fattori di questo prodotto di rapporti, si ottiene

$$(\ell-\varepsilon)^{n-N} \cdot a_N < a_n < (\ell+\varepsilon)^{n-N} \cdot a_N$$

da cui

$$(\ell-\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} \cdot \sqrt[n]{a_N} < \sqrt[n]{a_n} < (\ell+\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} \cdot \sqrt[n]{a_N}$$

ovvero

$$(\ell-\varepsilon) \cdot \sqrt[n]{\frac{a_N}{(\ell-\varepsilon)^N}} < \sqrt[n]{a_n} < (\ell+\varepsilon) \cdot \sqrt[n]{\frac{a_N}{(\ell-\varepsilon)^N}}. \tag{7}$$

Ricordiamo ora che per $n \to +\infty$ si ha (teorema 2.67)

$$\sqrt[n]{\frac{a_N}{(\ell-\varepsilon)^N}} \to 1$$

dunque passando al lim inf e al lim sup nelle disuguaglianze (7) si ottiene

$$\ell-\varepsilon \le \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \le \ell+\varepsilon.$$

Essendo questo vero per ogni $\varepsilon > 0$ si ottiene

$$\ell \le \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \le \ell$$

dunque le disuguaglianze sono uguaglianze, lim inf e lim sup coincidono dunque il limite esiste ed è ℓ, come volevamo dimostrare. □

***Esercizio* 2.88.** Si applichi il risultato precedente per verificare che

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

e (più difficile)

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Si osservi che il teorema 2.87 fornisce una dimostrazione alternativa del teorema 2.85 in quanto lo riconduce al teorema 2.84.

ordine di infinito/infinitesimo $\ll$

Definizione 2.89 (ordine di infinito/infinitesimo)**.** *Se a_n e b_n sono successioni a termini positivi, diremo che per $n \to +\infty$ la successione a_n è* molto più piccola *della successione b_n e scriveremo $a_n \ll b_n$ se vale* ***

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0.$$

$\gg$ *Se $a_n \ll b_n$ diremo anche che b_n è* molto più grande *di a_n e scriveremo $b_n \gg a_n$.*

** **Teorema 2.90** (ordini di infinito). *Per ogni $a > 1$ si ha, per $n \to +\infty$* *ordini di infinito*

$$a^n \ll n! \ll n^n.$$

Se $a > 1$, $\alpha > 0$ e $x_n \to +\infty$ si ha, per $n \to +\infty$

$$\log_a(x_n) \ll (x_n)^\alpha \ll a^{x_n}.$$

** *Dimostrazione.* Cominciamo col mostrare che $a^n \ll n!$ applicando il criterio del rapporto alla successione $\frac{a^n}{n!}$:

$$\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = a \cdot \frac{1}{n+1} \to 0 < 1.$$

Dunque si ha, come richiesto $a^n/n! \to 0$. Si procede in modo analogo per mostrare che $n! \ll n^n$:

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} &= (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

Per la seconda parte del teorema cominciamo col dimostrare un caso particolare e cioè

$$n^\alpha \ll a^n.$$

Si può procedere con il criterio del rapporto, come nei casi precedenti:

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \cdot \frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \to \frac{1}{a} \cdot 1^\alpha = \frac{1}{a} < 1$$

da cui $n^\alpha/a^n \to 0$.

Se ora $x_n \to +\infty$ è qualunque cerchiamo di ricondurci ad una successione a valori interi. Osserviamo che si ha

$$\lfloor x_n \rfloor \le x_n \le \lfloor x_n \rfloor + 1$$

da cui, per monotonia,

$$\lfloor x_n \rfloor^\alpha \le x_n^\alpha \le (\lfloor x_n \rfloor + 1)^\alpha = \lfloor x_n \rfloor^\alpha \left(1 + \frac{1}{\lfloor x_n \rfloor}\right)^\alpha$$

e

$$a^{\lfloor x_n \rfloor} \le a^{x_n} \le a^{\lfloor x_n \rfloor + 1} = a \cdot a^{\lfloor x_n \rfloor}.$$

Dunque

$$\frac{\lfloor x_n \rfloor^\alpha}{a \cdot a^{\lfloor x_n \rfloor}} \le \frac{x_n^\alpha}{a^{x_n}} \le \frac{\lfloor x_n \rfloor^\alpha \left(1 + \frac{1}{\lfloor x_n \rfloor}\right)^\alpha}{a^{\lfloor x_n \rfloor}}.$$

Ma ora, se $n \to +\infty$ sapendo che $\lfloor x_n \rfloor \to +\infty$ si ha che (per il teorema di sostituzione del limite)

$$\lim \frac{\lfloor x_n \rfloor^\alpha}{a^{\lfloor x_n \rfloor}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim \frac{\lfloor x_n \rfloor^\alpha}{a^{\lfloor x_n \rfloor}} = 0$$

da cui segue che $\frac{x_n^\alpha}{a^{x_n}} \to 0$.

Per dimostrare l'ultima relazione, $\log_a(x_n) \ll (x_n)^\alpha$, consideriamo la successione $y_n = \alpha \cdot \log_a x_n$ cosicché $a^{y_n} = x_n^\alpha$. Notiamo che se $x_n \to +\infty$ anche $y_n \to +\infty$. Dunque, per le proprietà precedenti, sappiamo che $y_n \ll a^{y_n}$ e dunque

$$\frac{\log_a x_n}{x_n^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y_n}{a^{y_n}} \to 0.$$

□

***Esercizio* 2.91.** Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{n^2+n^n}}{e^{1+\ln n}\cdot \ln(n^2 - n\sqrt{n})},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n!+2^n}}{3^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n^n},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^n + \sqrt{10^n}}.$$

3 SERIE

Data una successione a_n di numeri reali o complessi possiamo considerare la successione delle cosiddette *somme parziali* somme parziali

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Potremo scrivere più concisamente $S_n = \sum a_n$. Intuitivamente si intende sommare i termini della successione a_k per k che parte da 0 fino a $k = n$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Formalmente la somma $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è definita ricorsivamente dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} S_0 = a_0, \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1}. \end{cases}$$

I numeri a_n si chiamano *termini* della serie. Se la successione delle somme parziali ammette limite il limite viene chiamato *somma* della serie e si indica con termini somma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

La terminologia già introdotta per le successioni si applica anche alle serie che sono in effetti anch'esse delle successioni. In particolare una serie può essere convergente, divergente o indeterminata. Questo si chiama il *carattere della serie*. carattere

Più in generale si potrà considerare la somma che parte da un certo indice m. Fissato m si potrà ad esempio considerare la serie:

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

che risulta definita per $n \geq m$ come

$$S_n = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

Formalmente S_n avrà la definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} S_m = a_m \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \end{cases}$$

che definisce S_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$.

***Esempio* 3.1.** Consideriamo la serie S_n definita come la somma dei numeri naturali da 1 a n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Si può dimostrare facilmente per induzione che si ha

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

E mediante la definizione di limite si può verificare che risulta

$$S_n \to +\infty.$$

Questo si esprime dicendo che la serie $\sum n$ è divergente:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k = +\infty.$$

***Esempio* 3.2** *(la serie geometrica).* Fissato $q \in \mathbb{R}$ alla successione (cosiddetta geometrica)

$$a_n = q^n$$

di termini

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = q, \qquad a_2 = q^2, \qquad a_3 = q^3, \ldots$$

serie geometrica

è associata la *serie geometrica*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^n$$

le cui somme parziali sono

$$\begin{aligned} S_0 &= 1, \\ S_1 &= 1 + q, \\ S_2 &= 1 + q + q^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Il seguente teorema ci mostra come per diversi valori di q la serie geometrica assume tutti i caratteri: convergente, divergente, indeterminato.

*** **Teorema 3.3** (somma della serie geometrica). *Sia $q \in \mathbb{R}$. Se $q \neq 1$ si ha* *somma della serie geometrica*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Se $|q| < 1$ la serie geometrica converge:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

se $q \geq 1$ diverge:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^n = +\infty$$

e se $q \leq -1$ la serie geometrica è indeterminata.

Dimostrazione. Il primo risultato riguarda una somma finita. Si ha

$$(1-q) \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

da cui si ottiene, se $q \neq 1$, il primo risultato.

Passando al limite per $n \to +\infty$, se $|q| < 1$ si nota che $q^{n+1} \to 0$ e la serie converge a $1/(1-q)$ mentre se $q > 1$ osserviamo che $q^n \to +\infty$ e quindi la serie diverge a $+\infty$ (infatti in questo caso $1 - q$ è negativo). Se $q = 1$ si ha $q^k = 1$ e quindi $\sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1 \to +\infty$.

Se $q < 0$ si ha $q = -|q|$ da cui

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - (-1)^{n+1}|q|^{n+1}}{1 + |q|}.$$

Se $q = -1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e quindi la serie è indeterminata. Se $q < -1$ si osserva che sui termini dispari si ha $(-1)^{n+1}|q|^{n+1} \to +\infty$ mentre sui termini pari tale quantità tende a $-\infty$. Lo stesso vale per le somme parziali della serie che quindi è, anche in questo caso, indeterminata. □

Teorema 3.4 (linearità della somma). *Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono convergenti allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ anche $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ è convergente e si ha* *linearità della somma infinita*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} b_n.$$

Dimostrazione. Se S_n e R_n sono le somme parziali delle serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ allora le somme parziali della serie $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ sono $\lambda S_n + \mu R_n$ (in quanto sulle somme finite vale la proprietà distributiva e commutativa). Ma se $S_n \to S$ e $R_n \to R$ allora $\lambda S_n + \mu R_n \to \lambda S + \mu R$. □

Osserviamo che le serie (così come le successioni) formano uno spazio vettoriale in cui le operazioni di somma e prodotto per scalare vengono eseguite termine a termine: $\sum a_n + \sum b_n = \sum(a_n + b_n)$, $\lambda \sum a_n = \sum(\lambda a_n)$. Il teorema precedente ci dice allora che le serie (così come le successioni) convergenti sono un sottospazio vettoriale e che la somma della serie (così come il limite della successione) è un'operatore lineare definito su tale sottospazio.

condizione necessaria per la convergenza

Teorema 3.5 (condizione necessaria per la convergenza)**.** *Se la serie $\sum a_n$ converge allora $a_n \to 0$.* ***

Dimostrazione. Se la serie $\sum a_n$ converge significa che le somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ convergono: $S_n \to S$. Ma allora ***

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

□

serie che differiscono su un numero finito di termini

Teorema 3.6 (serie che differiscono su un numero finito di termini)**.** *Se le due successioni a_n e b_n differiscono solo su un numero finito di termini, allora le serie corrispondenti $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.*

Dimostrazione. Se le successioni differiscono su un numero finito di termini significa che esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > N$ si ha $a_k = b_k$. Dunque se indichiamo con $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ e $R_n = \sum_{k=0}^n b_k$ le corrispondenti successioni delle somme parziali, si avrà per ogni $n > N$

$$S_n - R_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{N} (a_k - b_k) = C$$

dove C è una costante indipendente da n. Dunque

$$S_n = R_n + C.$$

Se il limite di R_n non esiste allora non esiste neanche il limite di S_n (altrimenti essendo $R_n = S_n - C$ anche il limite di R_n dovrebbe esistere). Se il limite di R_n è infinito allora il limite di S_n è uguale al limite di R_n. E se il limite di R_n è finito anche il limite di S_n è finito.

Dunque il carattere della successione S_n è lo stesso della successione R_n cioè le due serie hanno lo stesso carattere. □

Come per le successioni potremo considerare serie il cui primo termine ha un indice diverso da 0. Ci si potrà sempre ricondurre (con un cambio di variabile) ad una serie il cui indice parte da zero. Ad esempio (facendo il cambio di variabile $j = k - 1$ da cui $j = 0$ quando $k = 1$ e ricordando che l'indice utilizzato nelle somme delle serie è una variabile muta):

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Si osservi inoltre che in base al teorema precedente quale sia il primo indice da cui si comincia a sommare non è rilevante per quanto riguarda il carattere della serie. Se però la serie è convergente la sua somma può variare, ad esempio:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \right) - 2^0.$$

Nota bene: in molti libri si scrive ∞ al posto di $+\infty$. Risulta quindi molto comune omettere il segno $+$ davanti a ∞ nella terminologia delle serie (e anche delle successioni) visto che gli indici si intendono numeri naturali e quindi $-\infty$ non avrebbe senso.

Ci sono però casi in cui può essere utile usare anche gli indici negativi, ad esempio se a_k è definita per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si potrebbe definire (ma non lo faremo):

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{(-k)}$$

richiedendo che entrambe le serie al lato destro dell'uguaglianza esistano e non abbiano somme infinite di segno opposto.

* **Teorema 3.7** (coda di una serie convergente). *Sia $\sum a_n$ una serie convergente. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = 0.$$

* *Dimostrazione.* Posto

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

per definizione di serie convergente sappiamo che esiste S finito tale che $S_n \to S$. Osserviamo allora che

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} a_k = \lim_{N\to+\infty} S_N - S_n = S - S_n$$

e, per $n \to +\infty$ si ha ovviamente $S - S_n \to S - S = 0$. □

3.1 SERIE TELESCOPICHE

Una serie scritta nella forma

$$\sum (a_k - a_{k+1})$$

serie telescopica

viene detta *telescopica* in quanto i singoli termini della somma (come i tubi di un cannocchiale), si semplificano uno con l'altro (permettendo al cannocchiale di chiudersi):

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_0 - a_{n+1}.$$

In linea teorica ogni serie può essere scritta in forma telescopica, basta infatti scegliere $a_0 = 0$, $a_n = -S_{n-1}$, affinché valga la relazione precedente. Scrivere una serie in forma telescopica è quindi equivalente a determinare la successione delle somme parziali.

***Esempio* 3.8** *(serie di Mengoli).* Si ha **

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Dimostrazione. Infatti **

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

□

3.2 SERIE A TERMINI POSITIVI

Nel seguito considereremo serie i cui termini sono numeri reali positivi (o almeno non negativi). Quando scriveremo $a_n > 0$ (o $a_n \geq 0$) sarà sempre sottointeso che $a_n \in \mathbb{R}$ visto che per i numeri complessi non reali non abbiamo definito la relazione d'ordine.

carattere delle serie a termini positivi

Teorema 3.9 (carattere delle serie a termini positivi). *Se $a_n \geq 0$ la serie $\sum a_n$ non può essere indeterminata: o converge oppure diverge a $+\infty$.* ***

Dimostrazione. Se $a_n \geq 0$ essendo $a_n = S_n - S_{n-1}$ significa che la successione S_n delle somme parziali è crescente. Dunque il limite delle S_n esiste e non può essere negativo. □ ***

criterio del confronto

Teorema 3.10 (criterio del confronto). *Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ serie a termini positivi che si confrontano: $0 \leq a_n \leq b_n$. Allora* **

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_n.$$

In particolare se $\sum b_n$ converge anche $\sum a_n$ converge e se $\sum a_n$ diverge anche $\sum b_n$ diverge.

Quest'ultimo risultato vale anche se $0 \leq a_n \ll b_n$.

* *Dimostrazione.* Se S_n sono le somme parziali di $\sum a_n$ e R_n sono le somme parziali di $\sum b_n$ si ha $S_n \leq R_n$ e il risultato si riconduce al confronto tra successioni.

Nel caso in cui $a_n \ll b_n$ per definizione sappiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ e quindi dalla definizione di limite sappiamo che esiste N tale che per ogni $n > N$ si ha (avendo scelto $\varepsilon = 1$)

$$\frac{a_n}{b_n} < 1.$$

Dunque si ottiene $a_n \leq b_n$ per tutti gli n tranne al più un numero finito. Sapendo che il carattere della serie non cambia se si modifica la serie su un numero finito di termini ci si riconduce al caso precedente. □

*** ***Esempio 3.11.*** La serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \tag{1}$$

è convergente. Infatti osservando che si ha per ogni $n > 0$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

possiamo affermare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 2$$

in quanto ci siamo ricondotti alla serie telescopica di Mengoli che ha somma pari a 1.

Sappiamo quindi che la serie (1) è convergente senza sapere esattamente quale sia la sua somma. Possiamo però trovare numericamente delle approssimazioni della somma, facendo la somma dei primi termini e stimando l'errore tramite la serie di Mengoli, di cui sappiamo calcolare la somma. Infatti se S_N è la somma parziale dei primi N termini e $S = \lim S_N$ è la somma della serie, essendo $1/k^2 \leq 1/(k^2+k)$ si ha

$$S_N \leq S \leq S_N + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \leq S_N + \frac{1}{N+1}.$$

Per calcolare le prime 6 cifre decimali esatte basterà quindi sommare il primo milione di termini della serie. Lo si può fare, ad esempio, con il codice riportato a pagina 365, ottenendo $S = 1.644934\ldots$

*** **Definizione 3.12** (equivalenza asintotica)**.** *Due successioni a termini positivi a_n e b_n si dicono essere* asintoticamente equivalenti *e si scrive $a_n \sim b_n$ se, per $n \to +\infty$* *asintoticamente equivalenti*

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1.$$

criterio del confronto asintotico

Corollario 3.13 (criterio del confronto asintotico). *Se a_n e b_n sono successioni a termini positivi, asintoticamente equivalenti, allora le serie corrispondenti $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.* *

Dimostrazione. Le serie a termini positivi non possono essere indeterminate quindi è sufficiente verificare che se una serie converge, converge anche l'altra. Essendo a_n/b_n convergente tale rapporto deve anche essere limitato, quindi esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che *

$$a_n \leq C \cdot b_n.$$

Se la serie $\sum b_n$ converge anche $\sum C \cdot b_n$ converge e, per confronto, converge anche $\sum a_n$.

Viceversa, scambiando il ruolo di a_n e b_n si verifica che se a_n converge, converge anche b_n. □

***Esempio* 3.14.** La serie

$$\sum_n \frac{n^2+2n+3}{2n^4-n^3+n+1}$$

è convergente. Infatti si può facilmente verificare che

$$\frac{n^2+2n+3}{2n^4-n^3+n+1} \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Ma sappiamo che la serie $\sum 1/n^2$ è convergente, di conseguenza anche la serie $\sum 1/(2n^2)$ lo è (per linearità della somma) e quindi, per confronto asintotico, anche la serie data è convergente.

criterio della radice

Teorema 3.15 (criterio della radice). *Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi (cioè $a_n \geq 0$) tale che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \in [0, +\infty]$. Se $\ell < 1$ allora la serie converge. Se $\ell > 1$ allora la serie diverge.* ***

Più in generale il risultato è valido con

$$\ell = \limsup \sqrt[n]{a_n}$$

anche nel caso in cui il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ non dovesse esistere.

Dimostrazione. Nel caso $\ell < 1$ prendiamo q con $\ell < q < 1$ e poniamo $\varepsilon = q - \ell$. Per la definizione di limite $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ (ma basta che sia $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \ell$) sappiamo esistere N tale che per ogni $n > N$ si abbia ***

$$\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon = q$$

cioè

$$a_n < q^n.$$

Sapendo che $\sum q^n$ converge, sapendo anche che il carattere della serie non cambia modificando un numero finito di termini, per confronto possiamo concludere che anche la serie $\sum a_n$ converge.

Se $\ell > 1$ si ha che $\sqrt[n]{a_n} > 1$ e quindi $a_n > 1$ per infiniti valori di n. La successione a_n non è infinitesima e quindi la serie non può convergere.

□

***Esempio* 3.16.** La serie
$$\sum_k 2^{(\ln k)-k}$$
è convergente. Infatti si ha
$$\sqrt[k]{2^{\ln k - k}} = 2^{\frac{\ln k - k}{k}} = 2^{\frac{\ln k}{k}-1} \to 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

*** **Teorema 3.17** (criterio del rapporto)**.** *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi tale che $a_{n+1}/a_n \to \ell \in [0,+\infty]$. Se $\ell < 1$ allora la serie converge. Se $\ell > 1$ la serie diverge.* *criterio del rapporto*

* *Dimostrazione.* Non sarebbe difficile fare una dimostrazione diretta, simile alla dimostrazione fatta per il criterio della radice. Possiamo però osservare che per il criterio del rapporto alla Cesàro (teorema 2.87) si ha $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ quindi ci riconduciamo al criterio della radice senza dover fare ulteriori dimostrazioni. □

*** ***Esempio* 3.18.** Per ogni $x \geq 0$ la serie
$$\sum \frac{x^n}{n!}$$
converge.

Dimostrazione. Applichiamo il criterio del rapporto. Posto $a_n = x^n/n!$ si ha
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1.$$
Dunque la serie converge. □

3.2.1 *la serie armonica*

Osserviamo invece che il criterio del rapporto non si applica alla *serie armonica* serie armonica
$$\sum_k \frac{1}{k}$$
in quanto
$$\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \to 1.$$

Per capire se la serie armonica converge o diverge presentiamo il metodo di *condensazione* che verrà enunciato in generale nel prossimo teorema ma che può essere meglio compreso se applicato al caso particolare della serie armonica.

Mostreremo che la serie armonica diverge. L'idea è semplicemente quella di raggruppare gli addendi della serie armonica in gruppi di lunghezza potenze di due e stimare la somma di ogni gruppo dal basso con il termine più piccolo (cioè l'ultimo) di ogni gruppo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty.\end{aligned}$$

criterio di condensazione di Cauchy

Teorema 3.19 (criterio di condensazione di Cauchy). *Sia a_n una successione decrescente di numeri reali non negativi: $a_n \geq 0$. Allora la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie* **

$$\sum 2^k a_{2^k}.$$

Dimostrazione. Supponiamo per comodità che le somme partano da $k = 1$. Si tratta di raggruppare i termini a_k in gruppi di potenze di due: **

$$\begin{aligned}&a_1, \\ &a_2,\ a_3, \\ &a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7, \\ &a_8,\ a_9,\ a_{10},\ \dots,\ a_{15}, \\ &\vdots \\ &a_{2^n},\ a_{2^n+1},\ \dots, a_{2^{n+1}-1}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Posto $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, sommando i termini delle prime N righe si osserva quindi che:

$$S_{2^N-1} = \sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{2^n+j}$$

Visto che la successione a_k è decrescente i termini di ogni gruppo si possono stimare dall'alto e dal basso con il primo e l'ultimo termine:

$$a_{2^n} \geq a_{2^n+1} \geq \dots \geq a_{2^{n+1}-1} \geq a_{2^{n+1}}$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^{n+1}} \leq S_{2^N-1} \leq \sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^n}. \tag{2}$$

Dunque se la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ converge allora la sottosuccessione di somme parziali S_{2^N-1} è superiormente limitata: $S_{2^N-1} \leq C$. Essendo $a_k \geq 0$

la successione S_k è crescente. Ma allora l'intera successione S_k è limitata perché per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $k \leq 2^N - 1$ per cui $S_k \leq S_{2^N-1} \leq C$. Visto che S_k è crescente S_k ha limite e visto che abbiamo appena verificato che S_k è limitata allora il limite è finito e la serie è convergente.

Viceversa se la serie $\sum a_k$ converge significa che S_k converge e dunque anche la sottosuccessione S_{2^N-1} converge e di conseguenza esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $N \in \mathbb{N}$: $S_{2^N-1} \leq C$.

Ma allora, usando la prima disuguaglianza in (2), si ottiene che la serie $\sum 2^n a_{2^{n+1}}$ è limitata da C ma allora

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} 2^n a_{2^n} &= a_1 + \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2\sum_{n=1}^{N} 2^{n-1} a_{2^n} \\ &= a_1 + 2\sum_{n=0}^{N-1} 2^n a_{2^{n+1}} \leq a_1 + 2C\end{aligned}$$

e dunque anche la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ risulta essere limitata e di conseguenza (essendo una serie a termini positivi) è convergente. □

***Esercizio* 3.20.** Utilizzare il criterio di condensazione per dimostrare che la serie

$$\sum \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

diverge.

*** **Corollario 3.21** (serie armonica generalizzata). *La serie* *serie armonica generalizzata*

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$$

converge se $\alpha > 1$, *diverge se* $0 \leq \alpha \leq 1$.

*** *Dimostrazione.* Applichiamo il criterio di condensazione. Posto $a_n = 1/n^\alpha$ Si ha

$$\sum_n 2^n a_{2^n} = \sum_n 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_n 2^{n(1-\alpha)} = \sum_n \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n$$

che è una serie geometrica di ragione $q = 2^{1-\alpha}$. Se $\alpha > 1$ allora $q < 1$ e la serie armonica è convergente se invece $\alpha \leq 1$ allora $q \geq 1$ e la serie armonica è divergente. □

***Esercizio* 3.22.** Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum n^\alpha (\ln n)^\beta$$

converge?

3.3 convergenza assoluta

Per le serie a termini positivi abbiamo molti criteri di convergenza che invece, in generale, non si applicano alle serie di segno qualunque o alle serie di numeri complessi. La convergenza di queste ultime, però, può a volte ricondursi facilmente alla convergenza delle serie a termini positivi, passando al modulo ogni termine.

assolutamente convergente

Definizione 3.23 (convergenza assoluta)**.** *Diremo che una serie (a termini reali o complessi)* $\sum a_n$ *è* assolutamente convergente *se la serie* $\sum |a_n|$ *è convergente.* ***

Teorema 3.24 (convergenza assoluta)**.** *Se una serie* $\sum a_n$ *(reale o complessa) è assolutamente convergente allora è convergente e vale* ***

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.$$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che gli a_n siano numeri reali. Definiamo $a_n^+ = \max\{0, a_n\}$ e $a_n^- = -\min\{0, a_n\}$. Cioè se $a_n \ge 0$ si ha $a_n^+ = a_n$ e $a_n^- = 0$ se invece $a_n \le 0$ si ha $a_n^+ = 0$ e $a_n^- = -a_n$. Dunque $a_n^+ \ge 0$, $a_n^- \ge 0$, *

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \qquad \text{e} \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^-.$$

Allora se $\sum |a_n|$ converge, per confronto anche $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ convergono. Dunque, per il teorema sulla somma dei limiti, $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ e quindi anche $\sum a_n$ converge.

Se abbiamo una successione di complessi $a_n = x_n + iy_n$ e se $\sum |a_n|$ converge allora, per confronto, anche $\sum |x_n|$ e $\sum |y_n|$ convergono (si osservi infatti che $|x| \le |x + iy|$ e $|y| \le |x + iy|$). Dunque $\sum x_n$ e $\sum y_n$ convergono per quanto già dimostrato sulle serie a termini reali. Ma allora anche $\sum iy_n$ e $\sum a_n = \sum(x + iy_n)$ convergono.

Poniamo ora

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Per la subadditività del modulo sappiamo che per le somme finite si ha

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.$$

E per continuità del modulo, posto $S = \lim S_n$ si ha

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| = |S| = \lim_{n\to+\infty} |S_n| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.$$

□

* **Teorema 3.25** (convergenza incondizionata). *Se $\sum a_n$ è una serie assolutamente convergente e $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una qualunque funzione biettiva (permutazione dei numeri naturali) si ha*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Dimostrazione. Posto

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{e} \qquad R_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$$

consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il più grande numero $m_n \in \mathbb{N}$ tale per cui l'insieme di indici $A_n = \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ contiene l'insieme dei primi m_n naturali $\{0, 1, \dots, m_n - 1\}$. Formalmente si può definire

$$m_n = \min(\mathbb{N} \setminus A_n).$$

Osserviamo che $m_n \to +\infty$ perché altrimenti ci sarebbero dei numeri naturali che non vengono mai assunti dalla successione $\sigma(k)$.

Allora si osserva che ogni addendo nella somma che definisce S_{m_n} è presente anche nella somma che definisce R_n e quindi facendo la differenza $R_n - S_{m_n}$ si ottiene la somma di tutti gli $a_{\sigma(k)}$ per $k = 0, \dots, n$ tali che $\sigma(k) > m_n$. Dunque, stimando il valore assoluto della somma con la somma dei valori assoluti e aggiungendo alla somma anche tutti gli altri valori a_k con $k > m_n$, si ottiene:

$$|R_n - S_{m_n}| \leq \sum_{k=m_n}^{+\infty} |a_k|.$$

Ma, essendo la serie $\sum a_k$ assolutamente convergente, la coda della serie dei valori assoluti tende a zero e quindi anche la sottosuccessione delle code che partono dall'indice m_n tende a zero (cambio di variabile nel limite). Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} R_n - S_{m_n} = 0.$$

D'altra parte $S_n \to S$ dove S è la somma della serie convergente $\sum a_k$ e di conseguenza anche $S_{m_n} \to S$. Dunque si ottiene, come volevamo dimostrare:

$$R_n = (R_n - S_{m_n}) + S_{m_n} \to 0 + S = S.$$

□

Teorema 3.26 (associatività delle serie convergenti). *Se $\sum a_k$ è una serie, scelta comunque una successione crescente k_n con $k_0 = 0$ possiamo considerare la serie $\sum b_n$ i cui termini*

$$b_n = \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} a_k$$

si ottengono associando i termini di a_k a gruppi consecutivi delimitati dalla successione di indici k_n.

Se la serie $\sum a_k$ non è indeterminata allora neanche la serie $\sum b_n$ è indeterminata e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Inoltre se $\sum a_k$ è a termini positivi e se $\sum b_n$ è convergente, anche $\sum a_n$ è convergente.

Dimostrazione. Siano $S_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$ le somme parziali della serie $\sum a_j$. Allora le somme parziali della serie $\sum b_n$ non sono altro che la sottosuccessione S_{k_n}. Dunque se S_k converge anche ogni sua sottosuccessione converge allo stesso limite. Si ottiene dunque la prima parte del teorema.

Se inoltre $a_k \geq 0$, entrambe le serie sono a termini positivi e quindi entrambe ammettono limite. Ma visto che le somme parziali della seconda serie sono una sottosuccessione delle somme parziali della prima serie, anche in questo caso i due limiti devono coincidere e se una delle due serie è convergente anche l'altra lo è. □

3.4 SERIE A SEGNI ALTERNI

La serie $\sum \frac{(-1)^k}{k+1}$ la cui somma si può scrivere come

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

non è assolutamente convergente (in quanto la serie $\sum \frac{1}{k+1}$ è divergente) ma ha il termine generico infinitesimo. Non abbiamo quindi nessun criterio che ci permetta di determinarne il carattere. Possiamo però sfruttare il fatto che i segni sono *alterni* cioè che i termini di indice pari e i termini di indice dispari hanno tutti lo stesso segno. Si nota infatti che posto

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

si ha

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_{2n+1} + \frac{1}{2n+3} = S_{2n} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < S_{2n} \\ S_{2n+3} &= S_{2n+2} - \frac{1}{2n+4} = S_{2n+1} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} > S_{2n+1} \end{aligned}$$

Dunque la successione delle somme parziali di indice pari è decrescente mentre sui termini di indice dispari è crescente. Avremo quindi che entrambe le sottosuccessioni convergono: $S_{2n} \to S$, $S_{2n+1} \to R$.

Ma

$$S - R = \lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+2} = 0.$$

Dunque $S = R$ e l'intera successione ha limite S. D'altra parte $S \le S_0$ in quanto S_{2n} è decrescente e $S \ge S_1$ in quanto S_{2n+1} è crescente. Concludiamo che S è finito e dunque la serie è convergente.

Questa dimostrazione può essere resa più in generale nel seguente.

*** **Teorema 3.27** (serie a segni alterni: criterio di Leibniz)**.** *Sia b_n una successione monotòna e infinitesima. Allora la serie* *criterio di Leibniz*

$$\sum(-1)^n b_n$$

è convergente.

Più precisamente se $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k$ sono le somme parziali, si osserva che la somma della serie $S = \lim S_n$ è sempre compresa tra due termini consecutivi della successione S_n:

$$S \in [S_n, S_{n+1}] \cup [S_{n+1}, S_n].$$

*** *Dimostrazione.* Senza perdere di generalità possiamo supporre che la successione b_n sia decrescente e quindi $b_n \ge 0$ (visto che il limite è zero). Posto

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k$$

si ha

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} \\ S_{2n+3} &= S_{2n+1} + b_{2n+2} - b_{2n+3}. \end{aligned}$$

Essendo b_n decrescente si ha $b_{2n+2} < b_{2n+1}$ e $b_{2n+3} < b_{2n+2}$ da cui

$$S_{2n+2} < S_{2n}, \qquad S_{2n+3} > S_{2n+1}.$$

Dunque le successioni S_{2n} e S_{2n+1} sono monotone e di conseguenza hanno limite:

$$S_{2n} \to S, \qquad S_{2n+1} \to R$$

con $S, R \in [-\infty, +\infty]$. D'altronde, essendo b_n infinitesima

$$S - R = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} b_{2n+1} = 0.$$

Dunque $S = R$. Inoltre essendo S_{2n} decrescente si ha $S \le S_0$ ed essendo S_{2n+1} crescente si ha $S \ge S_1$. Dunque S è finito e la serie converge.

Abbiamo anche ottenuto che $S_{2n-1} \le S \le S_{2n}$ e $S_{2n+1} \le S \le S_{2n}$ dunque è verificata anche la seconda parte dell'enunciato. □

Abbiamo dunque un esempio, la serie $\sum(-1)^k/k$ di una serie convergente ma non assolutamente convergente. Il seguente teorema ci dice che per le serie di questo tipo non è garantito che riordinando i termini la somma si conservi.

convergenza condizionata

Teorema 3.28 (convergenza condizionata)**.** *Sia $\sum a_k$ una serie convergente ma non assolutamente convergente. Allora fissato qualunque $x \in [-\infty, +\infty]$ esiste un riordinamento $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biettivo tale che*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{\sigma(k)} = x.$$

Dimostrazione. Dividiamo i termini della successione a_k in termini maggiori o uguali a zero e in termini negativi. Sia a_k^+ la sottosuccessione dei termini non negativi e $-a_k^-$ la sottosuccessione degli opposti dei termini negativi (quindi $a_k^+ \geq 0$ e $a_k^- > 0$). Si avrà

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n^+} a_k^+ - \sum_{k=0}^{n^-} a_k^-$$
$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{n^+} a_k^+ + \sum_{k=0}^{n^-} a_k^-$$

dove $n^+ + 1$ e $n^- + 1$ sono rispettivamente il numero di termini nonnegativi e negativi tra i primi $n + 1$ termini della successione a_k.

Osserviamo ora che dovrà essere

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^+ = +\infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^- = +\infty.$$

Innanzitutto le somme esistono perché le serie sono a termini non negativi. Se entrambe queste somme fossero finite allora la serie $\sum |a_k|$ sarebbe convergente, ma per ipotesi abbiamo assunto che $\sum a_k$ non fosse assolutamente convergente. Quindi almeno una delle due somme è infinita. Se la somma dei termini positivi fosse infinita e quella dei termini negativi fosse finita potremmo però concludere che anche la somma della serie $\sum a_k$ sarebbe infinita. Viceversa se la somma dei termini positivi fosse finita e quella dei termini negativi fosse infinita la somma $\sum a_k$ sarebbe $-\infty$. Ma per ipotesi abbiamo richiesto che la serie $\sum a_k$ fosse convergente.

Fissato $x \in \mathbb{R}$ possiamo quindi cominciare a sommare i termini positivi a_k^+ finché non si raggiunge o si supera il valore x. A quel punto cominciamo a sommare i termini negativi finché non torniamo sotto al valore x. Poi continuiamo a sommare i termini positivi finché non si torna a superare x e di nuovo poi continuiamo con i termini negativi finché non si torna a scendere sotto x. Intermezzando opportunamente termini positivi e termini negativi riusciamo quindi ad ottenere delle somme parziali che oscillano intorno al valore di x e si avvicinano sempre di più a x in quanto ad ogni cambio di "rotta" la distanza da x è inferiore all'ultimo termine sommato e la successione dei termini a_k è infinitesima in quanto la serie $\sum a_k$ è convergente.

Stessa cosa si può fare per ottenere una somma $x = +\infty$. Fissata una qualunque successione $x_n \to +\infty$ comincio a sommare i termini positivi finché non supero il valore $x_1 + a_1^-$. Poi sommo un solo termine negativo, $-a_1^-$ e ottengo una somma maggiore di x_1. Poi sommo tanti positivi finché non supero $x_2 + a_2^-$. Poi sommo un altro unico termine negativo e così via. Chiaramente le somme tenderanno a $+\infty$.

Il caso $x = -\infty$ si tratta in maniera analoga. □

Teorema 3.29 (somma per parti). *Siano a_k e B_k successioni. Posto*

somma per parti

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

si ha

$$\sum_{k=m}^{n} a_k B_k = A_{n+1}B_{n+1} - A_m B_m + \sum_{k=m}^{n} A_{k+1}(B_k - B_{k+1}). \tag{3}$$

* *Dimostrazione.* Osserviamo che

$$A_{k+1} - A_k = \sum_{j=0}^{k} a_j - \sum_{j=0}^{k-1} a_j = a_k$$

dunque

$$\begin{aligned} A_{k+1}B_{k+1} - A_k B_k &= A_{k+1}B_{k+1} - A_{k+1}B_k + A_{k+1}B_k - A_k B_k \\ &= A_{k+1}(B_{k+1} - B_k) + a_k B_k \end{aligned}$$

da cui

$$a_k B_k = A_{k+1}B_{k+1} - A_k B_k + A_{k+1}(B_k - B_{k+1}).$$

Sommando si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=m}^{n} A_{k+1}B_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} A_k B_k + \sum_{k=m}^{n} A_{k+1}(B_k - B_{k+1}) \\ &= A_{n+1}B_{n+1} - A_m B_m + \sum_{k=m}^{n} A_{k+1}(B_k - B_{k+1}). \end{aligned}$$

□

Se prendiamo $a_k = (-1)^k$ si può osservare che $A_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k$ è una successione limitata in quanto $A_n = 1$ se n è dispari mentre $A_n = 0$ se n è pari. Se invece scegliamo una successione B_n è positiva, decrescente e infinitesima si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |B_k - B_{k+1}| = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(B_k - B_{k+1}) = \lim_{n\to+\infty}(B_0 - B_{n+1}) = B_0 < +\infty.$$

Dunque il seguente teorema è una estensione del criterio di Leibniz per le serie a segni alterni.

Teorema 3.30 (criterio di Dirichlet). *Siano a_k e B_k successioni (reali o complesse) tali che*

1. $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ *è una successione limitata;*
2. $\sum |B_{k+1} - B_k|$ *è finito (si dirà che B_n è a variazione totale limitata).*

Allora la serie $\sum a_k B_k$ è convergente.

Dimostrazione. Per la formula di somma per parti si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_{n+1} B_{n+1} - A_0 B_0 + \sum_{k=0}^{n} A_{k+1}(B_k - B_{k+1}). \tag{4}$$

Il primo addendo $A_{n+1}B_{n+1}$ tende a zero per $n \to +\infty$ in quanto prodotto di una successione limitata per una infinitesima. Il secondo addendo è costante. La serie $\sum A_{k+1}(B_k - B_{k+1})$ è assolutamente convergente in quanto

$$\sum |A_{k+1}| \cdot |B_k - B_{k+1}| \leq L \sum |B_k - B_{k+1}| < +\infty$$

essendo $|A_n| \leq L$ con $L \in \mathbb{R}$ per l'ipotesi su a_n ed essendo $\sum |B_k - B_{k+1}| < +\infty$ per l'ipotesi su B_n.

Dunque il limite della somma sul lato destro converge e quindi la somma sul lato sinistro dell'equazione (4) è convergente per $n \to +\infty$. □

***Esercizio* 3.31.** Fissato $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$$

è convergente.

Dimostrazione. Si noti che per $|z| < 1$ si può facilmente applicare il criterio del rapporto o della radice. Ma per $|z| = 1$ quei criteri non si applicano e bisogna invece utilizzare il teorema 3.30.

Posto $a_k = z^k$ si osserva che $\sum a_k$ è una serie geometrica e (essendo $z \neq 1$) si ha

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$$

che è limitata, infatti:

$$|A_n| = \frac{|1-z^n|}{|1-z|} \leq \frac{1+|z^n|}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}.$$

Mentre posto $B_n = 1/n$ è chiaro che, essendo B_n reale, decrescente si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} |B_{k+1} - B_k| &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (B_k - B_{k+1}) = \lim_{n\to+\infty} (B_1 - B_{n+1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 < +\infty.\end{aligned}$$

Si applica quindi il teorema 3.30 per ottenere la convergenza della serie data.

Si osservi che se $|z| > 1$ la serie in questione non converge perché il termine generico z^k/k non è infinitesimo. Per $z = 1$ si ottiene la serie armonica, che pure non converge. □

* **Teorema 3.32** (convergenza alla Cesàro). *Se $a_n \to \ell \in [-\infty, +\infty]$ allora* *convergenza alla Cesàro*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \ell.$$

* *Dimostrazione.* Definiamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad b_n = e^{S_n}.$$

Si ha allora

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = e^{S_{n+1}-S_n} = e^{a_{k+1}} \to e^{\ell}.$$

Dunque per il criterio del rapporto alla Cesàro si ha $\sqrt[n]{b_n} \to e^{\ell}$ ma

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{S_n}{n} = \frac{\ln b_n}{n} = \ln \sqrt[n]{b_n} \to \ln e^{\ell} = \ell.$$

□

3.5 prodotti infiniti

Così come abbiamo fatto la teoria per le somme infinite si potrebbe fare la teoria dei prodotti infiniti ponendo

$$\prod_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} a_0 \cdot a_1 \cdots a_n.$$

Supporremo sempre $a_k > 0$ altrimenti il segno del prodotto difficilmente sarebbe definito. Allora, utilizzando il logaritmo (che trasforma prodotti in somme) possiamo ricondurre i prodotti infiniti alle serie:

$$\prod_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} e^{\sum_{k=0}^{n} \ln a_k}.$$

Osserviamo che se la serie dei logaritmi diverge a $-\infty$ il prodotto infinito ha limite 0. Avendo richiesto che i termini a_k siano tutti positivi il prodotto non potrà mai essere minore di zero. Per mantenere l'analogia con le serie diremo che il prodotto infinito converge se il limite dei prodotti parziali è finito e positivo. Diremo che diverge se il limite è $+\infty$ oppure 0.

Dunque potremo dire che il prodotto infinito converge se e solo se la serie dei logaritmi converge.

Osserviamo quindi che condizione necessaria affinché un prodotto infinito $\prod a_k$ sia convergente dovrà essere $\ln a_k \to 0$ ovvero $a_k \to 1$. In tal caso visto che

$$\ln a_k = \ln(1 + (a_k - 1)) \sim a_k - 1$$

si osserva che se $a_k \to 1$ il prodotto infinito $\prod a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum(a_k - 1)$.

***Esempio* 3.33** *(somma dei reciproci dei primi)*. Possiamo utilizzare i prodotti infiniti per dimostrare che la somma dei reciproci dei numeri primi è divergente. Sia p_k la successione dei numeri primi ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$ stiamo dando per scontato che i numeri primi sono infiniti). Allora vogliamo dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \tag{5}$$

Questo risultato ha una certa rilevanza nell'ambito della teoria dei numeri in quanto ci dice che p_k non può andare all'infinito come una potenza k^α con $\alpha > 1$ in quanto la serie $\sum 1/k^\alpha$ è convergente.

Mostriamo quindi che vale (5). Si noti che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il termine $\frac{1}{n}$ può essere decomposto come il prodotto di potenze dei reciproci dei numeri primi. Dunque:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots) \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots) \cdots \\ &= \prod_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p_k}\right)^j = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.\end{aligned} \tag{6}$$

Nei passaggi precedenti abbiamo sfruttato il fatto che nelle serie a termini positivi possiamo riordinare e associare i termini in qualunque modo. Una serie a termini positivi è convergente oppure divergente e la convergenza assoluta coincide con la convergenza semplice. Visto che riordinando i termini di una serie assolutamente convergente non si può ottenere una serie divergente, significa che riordinando i termini di una serie divergente (a termini positivi) si ottiene sempre una serie divergente.

Ora possiamo utilizzare il fatto che il prodotto infinito ottenuto in (6) ha lo stesso carattere della seguente serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{p_k}}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

ma visto che $1/p_k \to 0$ si ha

$$\frac{\frac{1}{p_k}}{1-\frac{1}{p_k}} \sim \frac{1}{p_k}$$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico, la serie precedente ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$$

che quindi è divergente.

3.6 LE SERIE DI POTENZE

Se a_k è una successione di numeri complessi, la serie

$$\sum a_k z^k$$

dipendente dal parametro $z \in \mathbb{C}$ si chiama *serie di potenze* di coefficienti a_k. Se chiamiamo $A \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi z per i quali la serie di potenze converge serie di potenze

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon \sum a_k z^k \text{ è convergente}\}$$

la somma della serie risulta essere una funzione $f \colon A \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

L'insieme A si chiama *insieme di convergenza* (o *dominio di convergenza*) della serie di potenze $\sum a_k z^k$. insieme di convergenza

Come al solito ci potrà capitare di considerare serie di potenze con l'indice k che parte da 1 invece che da 0 (o da qualunque altro numero naturale). Ciò non è rilevante, potremo sempre considerare $a_k = 0$ per i termini che non partecipano alla sommatoria.

Osserviamo anche che per $k = 0$ il termine corrispondente della serie è $a_0 \cdot 0^0 = a_0$ in quanto abbiamo definito $0^0 = 1$. Dunque potremo anche scrivere:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \ldots.$$

Le serie di potenze assomigliano quindi a dei polinomi, ma con infiniti termini.

***Esempio* 3.34** *(la serie geometrica)*. La serie di potenze di coefficienti $a_k = 1$ è la serie geometrica $\sum z^k$. L'insieme di convergenza è il cerchio $A = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Per $z \in A$ si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Se $|z| \geq 1$ la serie non può convergere perché il termine z^k non è infinitesimo: $\left|z^k\right| = |z|^k \geq 1$.

***Esempio* 3.35.** La serie di potenze $\sum \frac{z^n}{n^n}$ (ottenuta ponendo $a_n = 1/n^n$) ha come insieme di convergenza $A = \mathbb{C}$ in quanto

$$\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n^n}\right|} = \frac{|z|}{n} \to 0 < 1$$

e quindi per il criterio della radice la serie in questione converge assolutamente qualunque sia $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 3.36 (convergenza delle serie di potenze). *Se la serie di potenze $\sum a_k z^k$ converge in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ (anzi, basta che la successione $a_k z^k$ sia infinitesima) allora la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < |z_0|$. Viceversa, se la serie non converge in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ allora non converge in nessuno z tale che $|z| > |z_0|$ (anzi la successione $a_n z^n$ non è nemmeno infinitesima).* ***

Dimostrazione. Se la serie $\sum a_k z_0^k$ converge significa che la successione $a_k z_0^k$ è infinitesima e in particolare è limitata. Esiste dunque M tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ *

$$\left|a_k z_0^k\right| \leq M.$$

Se $z_0 = 0$ non c'è niente da dimostrare (perché non esiste z tale che $|z| < 0$). Se $z_0 \neq 0$ si ha

$$|a_k| \leq \frac{M}{|z_0|^k}.$$

Scelto ora qualunque $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |z_0|$ si ha

$$\left|a_k z^k\right| = |a_k| \cdot |z|^k \leq M \frac{|z|^k}{|z_0|^k} \leq M q^k$$

avendo posto $q = \frac{|z|}{|z_0|}$. Essendo $q < 1$ la serie geometrica $\sum q^k$ converge e, per confronto, anche la serie $\sum \left|a_k z^k\right|$ converge. Dunque la serie $\sum a_k z^k$ converge assolutamente.

Viceversa supponiamo che $\sum a_k z_0^k$ non converga e prendiamo z con $|z| > |z_0|$. Allora $\sum a_k z^k$ non può convergere, $a_k z^k$ non può neanche essere infinitesima perché se lo fosse allora, scambiando i ruoli di z_0 e z, per il punto precedente la serie $\sum a_k z_0^k$ dovrebbe convergere. □

Corollario 3.37 (l'insieme di convergenza è circolare). *Sia $\sum a_k z^k$ una serie di potenze e sia A il suo insieme di convergenza. Allora A non è vuoto e posto* **

$$R = \sup\{|z| : z \in A\}.$$

risulta che $R \in [0, +\infty]$ e A coincide con il cerchio centrato in 0 e di raggio R a meno dei punti di bordo, nel senso che:

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\} \subseteq A \subseteq \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq R\}. \tag{7}$$

Inoltre la serie converge assolutamente in ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < R$ mentre il termine generico $a_k z^k$ non è nemmeno infinitesimo (e quindi la serie non converge) quando $|z| > R$.

Dimostrazione. Se $|z| < R$ significa che esiste $z_0 \in A$ tale che $|z_0| > |z|$. Ma visto che la serie converge in z_0 (per definizione di A) grazie al teorema precedente possiamo affermare che la serie converge, anzi, converge assolutamente in z. Dunque si ottiene la prima inclusione in (7).

Se invece prendiamo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > R$ scegliamo un numero complesso z_0 tale che $r < |z_0| < |z|$ (ad esempio) potremmo prendere $z_0 = \frac{|z_0|+R}{2} \in \mathbb{R}$. Se fosse $|z_0| \in A$ per la definizione di R si dovrebbe avere $R \geq |z_0|$ cosa che non è. Dunque la serie non converge in z_0 e quindi, sempre per il teorema precedente, essendo $|z| > |z_0|$ la serie di potenze non può convergere neanche in z (e anzi la successione $a_k z^k$ non è nemmeno infinitesima).

Abbiamo quindi mostrato l'esistenza di $R \in \bar{\mathbb{R}}$ che soddisfa (7). Chiaramente deve essere $R \geq 0$ perché A è un insieme non vuoto di numeri positivi (per ogni serie di potenze si ha $0 \in A$).

□

** **Definizione 3.38** (raggio di convergenza). *Il* raggio di convergenza *di una serie di potenze $\sum a_k z^k$ è il valore $R \in [0, +\infty]$ dato dal corollario 3.37:* *raggio di convergenza*

$$R = \sup\{|z| \colon z \in \mathbb{C},\ \sum a_k z^k \text{ è convergente}\}.$$

*** **Teorema 3.39** (calcolo del raggio di convergenza). *Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenze. Se esiste il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \tag{8}$$

allora $R = 1/\ell$ è il raggio di convergenza della serie (dove si intende $R = +\infty$ se $\ell = 0$ e $R = 0$ se $\ell = +\infty$).

Lo stesso accade se esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell.$$

Più in generale risulta $R = 1/\ell$ se poniamo

$$\ell = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

anche nel caso in cui il limite in (8) *non dovesse esistere.*

Dimostrazione. Prendiamo $r \geq 0$. Applicando il criterio della radice alla serie $\sum |a_n| r^n$ si ha ***

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \sqrt[n]{|a_n|} \to r\ell.$$

Dunque se scegliamo un $r < 1/\ell$ si ha $r\ell < 1$ e la serie $\sum a_n z^n$ converge assolutamente per $z = r$. Dunque per ogni $r < 1/\ell$ troviamo che $r \in A$: ne consegue che $R \geq 1/\ell$. Se invece scegliamo $r > 1/\ell$ si ha $r\ell > 1$ e dunque $|a_n| r^n \to +\infty$ e la serie non può essere convergente in $z = r$. Significa che $R \leq 1/\ell$.

Il criterio della radice si applica anche nel caso in cui ℓ è definito tramite lim sup.

Nel caso esista il limite del rapporto $|a_{n+1}|/|a_n|$ sappiamo (grazie al criterio del rapporto alla Cesàro) che il limite della radice coincide con il limite del rapporto e quindi ci si riconduce al caso precedente (oppure si può ripetere la dimostrazione utilizzando il criterio del rapporto invece del criterio della radice). □

***Esempio* 3.40.** Nell'esempio 3.35 abbiamo visto che l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$$

è

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1, z \neq 1\}.$$

Il raggio di convergenza dovrà quindi essere $R = 1$ e questo può essere facilmente verificato con uno dei criteri precedenti. Ad esempio:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

da cui $R = 1/1 = 1$. Si osservi dunque che nessuna delle due inclusioni in (7) è, in questo caso, una uguaglianza.

Teorema 3.41 (stabilità del raggio di convergenza)**.** *Le serie di potenze $\sum a_k z^k$ e $\sum k a_k z^k$ hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Dimostrazione. Supponiamo che R sia il raggio di convergenza della serie $\sum a_k z^k$. Consideriamo allora un qualunque $x \in [0, +\infty)$ e verifichiamo se $\sum k a_k x^k$ converge o meno. Se $x < R$ esisterà un ρ tale che $x < \rho < R$ e allora si osserva che $k|a_k| x^k \ll |a_k| \rho^k$ essendo $k \ll (\rho/x)^k$. Visto che $\rho < R$ sappiamo (per il teorema precedente) che la serie $\sum a_k \rho^k$ converge assolutamente in $z = \rho$. Per confronto anche la serie $\sum k|a_k| x^k$ è convergente. Dunque se $x < R$ la serie $\sum k a_k x^k$ è convergente. Viceversa se la serie $\sum k a_k x^k$ fosse convergente per qualche $x > R$ allora sarebbe assolutamente convergente per ogni ρ con $R < \rho < x$. Ma $|a_k| \rho^k \leq k|a_k| \rho^k$ (almeno per $k \geq 1$) e dunque anche la serie $\sum a_k \rho^k$ dovrebbe essere assolutamente convergente, assurdo visto che $\rho > R$. □

Dimostrazione alternativa. Visto che $\sqrt[k]{k} \to 1$ si ha

$$\limsup \sqrt[k]{ka_k} = \limsup \sqrt[k]{a_k}.$$

Per il teorema 3.39 si ottiene che le due corrispondenti serie di potenze hanno lo stesso raggio di convergenza. □

continuità delle serie di potenze

Teorema 3.42. *(continuità delle serie di potenze) Sia $\sum a_k z^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza R. Allora posto $B = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$ la funzione $f \colon B \to \mathbb{C}$ definita da*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

è continua (su B).

Dimostrazione. Preso $z \in B$ vogliamo dimostrare che f è continua nel punto z, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \delta > 0 \colon \forall w \in B \colon |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon. \tag{9}$$

Si scelga un $\rho > 0$ tale che $|z| < \rho < R$. Dovendo scegliere δ imponiamo che sia $\delta < \rho - |z|$ cosicché si avrà $|w| < |z| + \delta = \rho$ quando $|z - w| < \delta$. Di conseguenza si osserva che

$$\begin{aligned}\left|z^k - w^k\right| &= \left|(z-w)\cdot(z^{k-1} + z^{k-2}w + \cdots + zw^{k-2} + w^{k-1})\right| \\ &\le |z-w| \cdot \left(|z|^{k-1} + |z|^{k-2}|w| + \cdots + |z||w|^{k-2} + |w|^{k-1}\right) \\ &\le |z-w| \cdot k \cdot \rho^{k-1}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}|f(z) - f(w)| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k w^k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z^k - w^k)\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \cdot \left|z^k - w^k\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \cdot |z-w| k \rho^{k-1} \\ &= |z-w| \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k|\rho^{k-1}.\end{aligned}$$

Ora osserviamo che la somma

$$C = \sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k|\rho^{k-1} = \frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{+\infty} k|a_k|\rho^k$$

è finita in quanto la serie $\sum k|a_k|z^k$ ha raggio di convergenza $R > \rho$ grazie al teorema 3.41. Dunque si ha

$$|f(z) - f(w)| \le C \cdot |z - w| < C \cdot \delta.$$

Scegliendo $\delta \le \frac{\varepsilon}{C}$ si ottiene dunque la validità di (9). □

Il teorema precedente ci garantisce che la somma di una serie di potenze è una funzione continua all'interno del raggio di convergenza. Nei punti che si trovano esattamente sulla frontiera del raggio di convergenza la funzione f potrebbe non essere continua. Ma se la serie converge in un punto di frontiera, la somma della serie è continua se mi avvicino al punto di convergenza lungo il raggio del disco di convergenza, come enunciato nel seguente teorema.

Teorema 3.43 (lemma di Abel). *Sia* *

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

la somma di una serie di potenze. Se la serie converge in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, *allora la serie converge per ogni* $z = tz_0$ *con* $t \in [0,1]$ *inoltre la funzione*

$$t \mapsto f(tz)$$

è continua nel punto $t = 1$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo supporre che sia $f(z_0) = 0$ infatti basterà sostituire il primo termine della serie, a_0, con $a_0' = a_0 - f(z_0)$ e dimostrare il teorema per la serie modificata. Dunque posto

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_0^k$$

si ha che $A_n \to f(z_0) = 0$ e, per definizione, $A_0 = 0$. Utilizzando la formula (3) di somma per parti, preso $t \in [0,1)$ si avrà

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (tz_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k \cdot t^k = A_{n+1} \cdot t^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} A_{k+1} \cdot (t^k - t^{k+1})$$

e per $n \to +\infty$ si ottiene

$$f(t \cdot z_0) = f(z_0) \cdot 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} A_{k+1}(t^k - t^{k+1}) = (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} A_{k+1} t^k.$$

Visto che $A_n \to 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che per ogni $k \geq m$ si ha $|A_k| \leq \varepsilon$. Dunque

$$\begin{aligned} |f(t \cdot z_0)| &\leq (1-t) \sum_{k=0}^{m-1} |A_k| t^k + (1-t) \sum_{k=m}^{+\infty} |A_k| t^k \\ &\leq (1-t) \cdot \sum_{k=0}^{m-1} |A_k| + (1-t) \cdot \varepsilon \cdot \frac{t^m}{1-t} \\ &\leq (1-t) \sum_{k=0}^{m-1} |A_k| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Scelto $\delta \le \varepsilon / \sum_{k=0}^{m-1} |A_k|$ se $|1-t| < \delta$ si avrà dunque

$$|f(t \cdot z_0) - f(z_0)| = |f(t \cdot z_0)| < 2\varepsilon$$

che significa che $t \mapsto f(t \cdot z_0)$ è continua nel punto $t = 1$. □

3.7 LA SERIE ESPONENZIALE

Definiamo la funzione $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tramite la serie di potenze exp z

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

La funzione è definita su tutto $\mathbb{C}$ in quanto (grazie al criterio del rapporto) è facile verificare che il raggio di convergenza di questa serie è $R = +\infty$ e dunque l'insieme di convergenza è tutto $\mathbb{C}$.

I teoremi seguenti ci permetteranno di affermare che la funzione $\exp(z)$, definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ è una estensione della funzione e^x definita per $x \in \mathbb{R}$.

*** **Teorema 3.44** (collegamento tra due definizioni di esponenziale). *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ la successione $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ è convergente e si ha* *collegamento tra due definizioni di esponenziale*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

In particolare se $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\exp(x) = e^x.$$

* *Dimostrazione.* Utilizzando lo sviluppo del binomio osserviamo che si ha

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{n!}{n^k \cdot (n-k)!}.$$

Posto per ogni $k \le n$

$$\begin{aligned} c(n,k) &= \frac{n!}{n^k \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \end{aligned}$$

osserviamo che $0 \le c(n,k) \le 1$ in quanto prodotto di numeri non negativi minori o uguali ad 1. Inoltre, fissato k, si ha $c(n,k) \to 1$ per $n \to +\infty$ in quanto ogni fattore $\frac{n-j}{n}$ tende a 1 per $n \to +\infty$ (si noti che a k fissato il numero di fattori k è fissato).

Sia $z \in \mathbb{C}$ fissato e sia

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}.$$

Sappiamo che la serie esponenziale è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ (in quanto il raggio di convergenza è $+\infty$) quindi S è un numero reale (finito). Dunque per il teorema 3.7 (della coda) sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste M tale che

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \varepsilon.$$

Fissato $k \leq M$ visto che $c(n,k) \to 1$ esiste $N_k > M$ tale che per ogni $n > N_k$ si abbia $1 - c(n,k) < \varepsilon$ (ricordiamo che $c(n,k) \leq 1$). Prendiamo allora

$$N = \max\{N_k : k \leq N\}$$

cosicchè per ogni $n > N$ e per ogni $k \leq M$ si avrà $0 \leq 1 - c(n,k) < \varepsilon$. Allora, per ogni $n > N$, possiamo spezzare la somma da 0 a n nelle due somme da 0 a M e da $M+1$ a n:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z^k}{k!} - c(n,k)\frac{z^k}{k!}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}(1-c(n,k))\frac{z^k}{k!}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}(1-c(n,k))\frac{|z|^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{M}(1-c(n,k))\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=M+1}^{n}(1-c(n,k))\frac{|z|^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{M}\varepsilon\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=M+1}^{n}\frac{|z|^k}{k!} \\
&\leq \varepsilon\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|z|^k}{k!} + \varepsilon \\
&\leq \varepsilon S + \varepsilon = \varepsilon(S+1).
\end{aligned}$$

Visto che $\varepsilon > 0$ era arbitrario abbiamo verificato tramite la definizione che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to 0$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

Se $x \in \mathbb{R}$ abbiamo già visto che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

e quindi il teorema precedente ci assicura che

$$\exp(x) = e^x.$$

$\square$

Aver distinto le due definizioni di e^z (tramite limite) e di $\exp(z)$ (tramite somma della serie) è puramente strumentale. C'è una unica funzione esponenziale che può essere definita in un modo o nell'altro. Non ci si fissi quindi con l'identificare le due diverse notazioni e^z ed $\exp(z)$ con le due diverse definizioni. Ogni testo avrà una sua definizione di funzione esponenziale che può essere per certi versi arbitraria salvo poi ritrovare le proprietà caratterizzanti di tale funzione.

Teorema 3.45 (proprietà dell'esponenziale complesso)**.** *Si ha:*

1. $\exp(0) = 1$;
2. $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$;
3. *per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$
$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w);$$
4. *per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *si ha* $\exp(z) \neq 0$ *e*
$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)};$$
5. *la funzione* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *è continua.*
6. *Se* $z_n \to 0$ *allora*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(z_n) - 1}{z_n} = 1. \tag{10}$$

* *Dimostrazione.*

1. La proprietà $\exp(0) = 1$ segue per verifica diretta (ricordiamo che $0^0 = 1$ e $0! = 1$).
2. La proprietà $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$ si ottiene passando al limite nelle somme parziali la seguente uguaglianza che sfrutta le proprietà del coniugio di somma e prodotto:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{} \frac{z^k}{k!}}.$$
3. Consideriamo la matrice infinita
$$m_{k,j} = \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^j}{j!}.$$
Allora da un lato
$$\begin{aligned}\exp(z + w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + w)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k \cdot w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} m_{k,n-k}\end{aligned}$$

e dall'altro

$$\begin{aligned}\exp(z)\cdot\exp(w) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{w^j}{j!}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\sum_{j=0}^{n}\frac{w^j}{j!}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}m_{k,j}.\end{aligned}$$

In entrambi i casi stiamo dunque sommando tutti i termini della matrice $m_{k,j}$ in un ordine diverso: nel primo caso stiamo associando i termini lungo le diagonali, nel secondo caso stiamo associando i termini lungo le cornici quadrate.

Ma la serie $\sum m_{k,j}$ è assolutamente convergente e quindi la sua somma non dipende dall'ordine in cui prendiamo gli addendi.

4. Visto che

$$1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\cdot\exp(-z)$$

ricaviamo che $\exp(z)\neq 0$ e $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.

5. La continuità discende dal risultato generale sulla continuità della somma di una serie di potenze: teorema 3.42.

6. Da

$$\exp(z) = 1 + \sum_{k=1} +\infty\frac{z^k}{k!}$$

si ottiene

$$\exp(z) - 1 \le \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = z\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}.$$

Osserviamo ora che la serie $\sum\frac{z^k}{(k+1)!}$ ha raggio di convergenza infinito e quindi è assolutamente convergente per ogni $z\in\mathbb{C}$. In particolare la somma di tale serie è continua e quindi se $z_n\to 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\exp(z_n)-1}{z_n} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z_n^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{0^k}{(k+1)!} = 1.$$

□

Come già detto d'ora in poi scriveremo

$$e^z = \exp z.$$

considerando quindi $\exp z$ l'estensione a tutto il piano complesso della funzione esponenziale già definita sulla retta reale.

2.7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995
9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274
2746639193 2003059921 8174135966 2904357290 0334295260
5956307381 3232862794 3490763233 8298807531 9525101901
1573834187 9307021540 8914993488 4167509244 7614606680
8226480016 8477411853 7423454424 3710753907 7744992069
5517027618 3860626133 1384583000 7520449338 2656029760
6737113200 7093287091 2744374704 7230696977 2093101416
9283681902 5515108657 4637721112 5238978442 5056953696
7707854499 6996794686 4454905987 9316368892 3009879312
7736178215 4249992295 7635148220 8269895193 6680331825
2886939849 6465105820 9392398294 8879332036 2509443117
3012381970 6841614039 7019837679 3206832823 7646480429
5311802328 7825098194 5581530175 6717361332 0698112509
9618188159 3041690351 5988885193 4580727386 6738589422
8792284998 9208680582 5749279610 4841984443 6346324496
8487560233 6248270419 7862320900 2160990235 3043699418
4914631409 3431738143 6405462531 5209618369 0888707016
7683964243 7814059271 4563549061 3031072085 1038375051
0115747704 1718986106 8739696552 1267154688 9570350354

Tabella 1: Le prime 1000 cifre decimali del numero e calcolate con il metodo utilizzato nella dimostrazione del teorema 3.46. Si veda il codice a pagina 366.

Teorema 3.46 (approssimazione di e). *Risulta*

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n \cdot n!}.$$

In particolare per $n = 5$ si ottiene

$$2.716 < e < 2.719$$

Dimostrazione. Posto

$$R_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

risulta

$$n! R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$$

e osservando che per $k > n$ si ha

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\ldots(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} n! R_n &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = (n+1) \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^j \\ &= (n+1) \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Per $n = 5$ si ha

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{326}{120}$$

Dunque da un lato

$$e \geq \frac{326}{120} \geq 2.716$$

e dall'altro

$$e \leq \frac{326}{120} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \leq 2.717 + 0.002 = 2.719$$

□

***Esercizio* 3.47.** Utilizzando il teorema precedente dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin(2\pi e\, n!) = 2\pi.$$

$e \notin \mathbb{Q}$ **Teorema 3.48** (irrazionalità di e). *Il numero e è irrazionale.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che sia $e = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Possiamo supporre $q > 1$ (non importa che la frazione sia ridotta ai minimi termini).

Allora si ha

$$q!e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + q! \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Il primo addendo nella somma precedente è intero in quanto se $k \le q$ il rapporto $q!/k! \in$ è intero. D'altra parte per il teorema 3.46 per il secondo addendo abbiamo

$$0 < q! \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \le \frac{1}{q} < 1$$

e dunque risulterebbe che $q!e$ non è intero in quanto strettamente compreso tra due interi consecutivi ma per ipotesi di assurdo $e = p/q$ e quindi $q!e = p(q-1)!$ dovrebbe essere intero. □

3.8 LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Definizione 3.49 (funzioni trigonometriche)**.** *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si potrà definire*

$$\cos x = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right), \qquad \sin x = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)$$

cosicché valga la formula di Eulero

formula di Eulero

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Teorema 3.50 (proprietà delle funzioni seno e coseno)**.** *Le funzioni* sin *e* cos *soddisfano le seguenti proprietà.*

1. $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$;
2. $\sin(-x) = -\sin x$ *(la funzione* sin *è dispari),* $\cos(-x) = \cos x$ *(la funzione* cos *è pari);*
3. *identità fondamentale della trigonometria:*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

4. *formule di addizione:*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\beta \sin\alpha;$$

5. *le funzioni* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sono continue;*

6. *si ha*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{11}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{12}$$

7. *se $a_n \to 0$ ($a_n \in \mathbb{R}$) per $n \to +\infty$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \qquad e \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Dimostrazione. *

1. Essendo $\overline{e^{ix}} = e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$ discende dalla formula (3) per il calcolo di parte reale ed immaginaria.
2. Si verifica direttamente con le formule precedenti.
3. Per $x \in \mathbb{R}$ si ha da un lato

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(0) = 1$$

e dall'altro

$$|\exp(ix)|^2 = |\cos x + i \sin x|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

4. Grazie alla formula che esprime l'esponenziale della somma:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= \exp(i(\alpha+\beta)) = \exp(i\alpha)\cdot\exp(i\beta) \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &\quad + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

e uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottengono le formule di addizione.

5. Visto che la funzione $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è continua anche la sua restrizione all'asse immaginario lo è. E dunque anche parte reale (coseno) e parte immaginaria (seno) lo sono.
6. Sia $x \in \mathbb{R}$. Osservando che $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ e $i^{2k+1} = i \cdot i^{2k} = i \cdot (-1)^k$ suddividendo i termini pari e dispari della serie che definisce l'esponenziale si ha:

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che le due serie che compaiono a destra dell'uguaglianza sono a termini reali e quindi la loro somma è reale. Dunque queste due serie coincidono con la parte reale e la parte immaginaria di $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$.

7. Per la corrispondente proprietà dell'esponenziale sappiamo che per $a_n \to 0$ si ha
$$\frac{e^{ia_n} - 1}{ia_n} \to 1.$$
Ma
$$\frac{e^{ia_n} - 1}{ia_n} = \frac{\cos a_n - 1 + i \sin a_n}{ia_n} = \frac{\sin a_n}{a_n} + i\frac{1 - \cos a_n}{a_n}.$$
Scopriamo dunque che
$$\frac{1 - \cos a_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1.$$
D'altra parte si ha
$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} &= \frac{(1 - \cos a_n) \cdot (1 + \cos a_n)}{a_n^2(1 + \cos a_n)} = \frac{1 - \cos^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos a_n} \\ &= \left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{1 + \cos a_n} \to 1 \cdot \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.51 (definizione di π). *Le funzioni e^{ix}, $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche tutte con lo stesso periodo τ. Definiamo $\pi = \tau/2$ cosicché per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta:* τ π

$$e^{ix+2\pi} = e^{ix}, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Il numero π è il più piccolo reale positivo con tali proprietà. Risulta $\pi \in [2.8, 3.2]$.

La funzione $\sin x$ è crescente nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ mentre la funzione $\cos x$ è decrescente nell'intervallo $[0, \pi]$. Risulta $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Vale inoltre la celeberrima formula di Eulero:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Dimostrazione.

Le serie di potenze che definiscono le funzioni seno e coseno sono serie a segni alterni. Nel criterio di Leibniz (teorema 3.27) per la convergenza delle serie a segni alterni abbiamo osservato che se i termini della serie a segni alterni sono decrescenti in valore assoluto, allora le somme parziali della serie risultano alternativamente stime per eccesso e per difetto della serie intera. Vogliamo applicare questa osservazione alla serie che definisce il coseno. Si noti che

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Siamo quindi interessati a capire per quali $x \geq 0$ possiamo affermare che la successione $x^{2k}/(2k)!$ è decrescente. Osserviamo che la relazione $x^{2(k+1)}/(2(k+1))! \leq x^{2k}/(2k)!$ è equivalente a $x^2 \leq (2k+2)(2k+1)$ che è certamente vera se $x^2 \leq 2$ ovvero quando $x \leq \sqrt{2}$. Dunque, per $x \leq \sqrt{2}$ si ha

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1.$$

La relazione $x^2 \leq (2k+2)(2k+1)$ è vera anche quando $x^2 \leq 4k^2$. Se $k \geq 2$ questo risulta vero per ogni $x \in [0,4]$. Dunque fermando la serie al termine $k = 2$ per ogni $x \in [0,4]$ risulta valida la seguente stima

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Risolvendo la disequazione biquadratica $1 - x^2/2 + x^4/24 < 0$ si trova che $\cos(x) < 0$ per ogni $x \in [\sqrt{6-2\sqrt{3}}, 3]$. Per il teorema degli zeri deve dunque esistere almeno un $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{6-2\sqrt{3}}] \subseteq [1.4, 1.6]$ tale per cui $\cos(x) = 0$. Sia

$$x_0 = \inf\{x > 0\colon\ \cos(x) = 0\}.$$

Per quanto detto prima dovrà essere $x_0 \in [1.4, 1.6]$. Dovrà essere $\cos x_0 = 0$ in quanto il limite di una successione su cui una funzione continua si annulla è anch'esso un punto in cui la funzione si annulla. Si definisce $\pi = 2x_0$ cosicché scopriamo che $2.8 \leq \pi \leq 3.2$. Chiaramente $\cos x \geq 0$ per $x \in [0, \pi/2]$. In maniera simile a quanto fatto per il coseno possiamo osservare che per $x \in [0, \sqrt{6}]$ la successione $x^{2k+1}/(2k+1)!$ risulta essere decrescente e vale quindi la stima

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$$

da cui si deduce che $\sin(x) \geq 0$ se $x \in [0, \sqrt{6}]$. Essendo $\pi/2 = x_0 < \sqrt{6}$ otteniamo in particolare $\sin(x) \geq 0$ per $x \in [0, \pi/2]$. Sapendo che $\cos^2(\pi/2) + \sin^2(\pi/2) = 1$ otteniamo dunque $\sin(\pi/2) = 1$. Abbiamo quindi

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(x_0) + i\sin(x_0) = i$$

da cui

$$e^{2\pi i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4 = i^4 = 1.$$

Risulta quindi che la funzione $\exp(ix)$ è 2π-periodica in quanto

$$e^{ix+2ik\pi} = e^{ix} \cdot \left(e^{2\pi i}\right)^k = e^{ix}.$$

Se prendiamo $x, y \in [0, \pi/2]$ con $y > x$ e poniamo $h = y - x$ si ha $h \in [0, \pi/2]$. Dunque $\sin h \geq 0$, $\sin x \geq 0$ e $\cos h \leq 1$ da cui

$$\cos(y) = \cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h \leq \cos x.$$

Risulta quindi che la funzione coseno è decrescente su $[0, \pi/2]$. Ma dalle formule di addizione si verifica facilmente che

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

e quindi se la funzione è decrescente in $[0, \pi/2]$ lo è anche in $[\pi/2, \pi]$.

Visto che in $[0, \pi/2]$ il coseno è positivo e decrescente, il seno è positivo e vale $\cos^2 + \sin^2 = 1$ risulta che su tale intervallo il seno è crescente. Anche su $[-\pi/2, 0]$ il seno è crescente in quanto $\sin(-x) = -\sin x$.

$\square$

Nel teorema precedente abbiamo definito π in maniera analitica. L'usuale definizione geometrica (π è il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro) verrà recuperata nella sezione 4.2.

3.9 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

La funzione $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ risulta essere strettamente crescente. Inoltre essendo una funzione continua e visto che $\sin(-\pi/2) = -1$ e $\sin(\pi/2) = 1$ per il teorema dei valori intermedi la funzione assume tutti i valori in $[-1, 1]$. Dunque su tali intervalli la funzione è invertibile. La funzione inversa

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

si chiama *arco seno*. Per definizione di funzione inversa si ha

$$\arcsin(\sin x) = x, \qquad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

e

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \forall x \in [-1, 1].$$

La funzione $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ risulta essere strettamente decrescente e, analogamente a quanto visto per la funzione sin possiamo verificare che ristretta a tali intervalli è una funzione invertibile. La funzione inversa

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

si chiama *arco coseno*. Per definizione si ha

$$\arccos(\cos x) = x, \qquad \forall x \in [0, \pi]$$

e

$$\cos(\arccos x) = x, \qquad \forall x \in [-1, 1].$$

tg x La funzione

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

è definita quando $\cos x \neq 0$ ovvero:

$$\operatorname{tg}\colon \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}.$$

Se restringiamo la funzione all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ possiamo facilmente osservare che la funzione $\operatorname{tg}\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente. Inoltre se $a_n \to \pi/2$, $a_n < \pi/2$ si ha $\cos(a_n) \to 0$ (per continuità del coseno) e $\sin(a_n) \to 1$ dunque $\operatorname{tg}(a_n) \to +\infty$. Analogamente per $a_n \to -\pi/2$ si trova $tga_n \to -\infty$. Dunque per il teorema dei valori intermedi possiamo affermare che la funzione $\operatorname{tg}\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ è suriettiva. E' quindi invertibile e la funzione inversa

$$\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

si chiama *arco tangente*. Per definizione si ha

$$\operatorname{arctg} \operatorname{tg} x = x, \qquad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

e

$$\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Grazie al teorema sulla continuità della funzione inversa possiamo affermare che le funzioni inverse arcsin, arccos e arctg sono funzioni continue.

***Esercizio* 3.52.** Dimostrare che per ogni $x > 0$ si ha

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

***Esercizio* 3.53.** La serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k}$$

è convergente.

Dimostrazione. Applichiamo il teorema 3.30. Posto $a_k = \sin k$ e $B_k = 1/k$ si ha

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin k = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik}.$$

Osserviamo allora che $e^{ik} = (e^i)^k$ e dunque A_n è la parte immaginaria di una somma di una serie geometria. Si può quindi calcolare esplicitamente

$$A_n = \operatorname{Im} \frac{1 - (e^i)^n}{1 - e^i}$$

da cui

$$|A_n| \le \left|\frac{1-e^{in}}{1-e^i}\right| \le \frac{1+|e^{in}|}{|1-e^i|} = \frac{2}{|1-e^i|}$$

e dunque A_n è limitata.

D'altro canto posto $B_k = 1/k$ è chiaro che B_k è decrescente e infinitesima. □

***Esercizio* 3.54.** Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_n \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right), \qquad \sum_n \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right)$$

3.10 FUNZIONI IPERBOLICHE

Definizione 3.55 (funzioni iperboliche)**.** *Le funzioni* seno iperbolico, coseno iperbolico *sono definite, per ogni $x \in \mathbb{R}$, come segue:* sinh, cosh

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{13}$$

Teorema 3.56 (proprietà delle funzioni iperboliche)**.** *Valgono le seguenti proprietà.*

1. *la funzione* sinh *è dispari,* cosh *è pari:*

$$\sinh(-x) = -\sinh(x), \qquad \cosh(-x) = \cosh(x);$$

2. *i punti del piano di coordinate* $(\cosh x, \sinh x)$ *sono disposti su un ramo di iperbole in quanto vale:*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

3. *formule di addizione:*

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta,$$
$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta;$$

4. *si ha*

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$\sinh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

5. *la funzione* sinh *è strettamente crescente su tutto* $\mathbb{R}$, *la funzione* cosh *è strettamente crescente sull'intervallo* $[0, +\infty)$ *e strettamente decrescente nell'intervallo* $(-\infty, 0]$;

6. *se* $a_n \to +\infty$ *allora* $\sinh a_n \to +\infty$ *e* $\cosh a_n \to +\infty$*, se* $a_n \to -\infty$ *allora* $\sinh a_n \to -\infty$ *e* $\cosh a_n \to +\infty$*.*

Dimostrazione. I primi tre punti si dimostrano facilmente per verifica diretta, utilizzando la definizione (13). Per il punto 2 osserviamo che se $x > 0$

Gli sviluppi in serie si ottengono anch'essi sostituendo gli sviluppi dell'esponenziale nella definizione. Nel cosh i termini di grado dispari si cancellano, nel sinh si cancellano i termini di grado pari.

Per quanto riguarda la monotonia si osserva che se $x \geq 0$ ogni addendo delle serie esposte nel punto 4 è strettamente crescente (in quanto i coefficienti sono tutti positivi) e dunque la somma della serie, cioè la funzione cosh e la funzione sinh è strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty)$. La funzione sinh, essendo dispari, risulta inoltre crescente anche sull'intervallo $(-\infty, 0]$ e quindi è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Per l'ultima proprietà basterà usare la definizione (13) e ricordare che (teorema 2.71) se $a_n \to +\infty$ allora $e^{a_n} \to +\infty$ ed $e^{-a_n} = \frac{1}{e^{a_n}} \to 0$. □

Osserviamo che $\cosh 0 = 1$ e, per le proprietà di monotonia viste nel teorema precedente si ha $\cosh x \geq \cosh 0 = 1 > 0$. Dunque $\cosh x$ non si annulla mai e si può definire per ogni $x \in \mathbb{R}$ la *tangente iperbolica*

tanh

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

La funzione $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva in quanto strettamente crescente ed è surgettiva in quanto è continua e quindi assume tutti i valori compresi tra $\sup \sinh = +\infty$, $\inf \sinh = -\infty$. Dunque $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile e la funzione inversa si chiama *settore di seno iperbolico* e si denota con

settsinh

$$\operatorname{settsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Analogamente la funzione $\cosh\colon [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ è iniettiva in quanto strettamente crescente ed è surgettiva in quanto è continua e assume su $[0, +\infty)$ tutti i valori compresi tra $\cosh(0) = 1$ e $\sup \cosh x = +\infty$. Dunque la funzione $\cosh x$ ristretta a $[0, +\infty) \to [1, +\infty)$ è invertibile e la funzione inversa si chiama *settore di coseno iperbolico*

settcosh

$$\operatorname{settcosh}\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty).$$

***Esercizio* 3.57.** Fissato $y \in \mathbb{R}$ si risolva l'equazione

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

riconducendola ad una equazione di secondo grado nella variabile $t = e^x$. Si dimostri quindi che vale

$$\operatorname{settsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

In modo analogo si dimostri che vale

$$\operatorname{settcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

3.11 esercizi

***Esercizio* 3.58.** Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_n \frac{n^2 - n^3}{3^n}, \qquad \sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\ln|n^7 - 10n^5 + 3|}, \qquad \sum_n \frac{n - 10}{n^2 + 10}$$

4 I NUMERI COMPLESSI

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto l'esponenziale complesso ed abbiamo osservato che la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da $f(t) = e^{it}$ ha valori sulla circonferenza unitaria in quanto $\left|e^{it}\right| = 1$. Tramite la definizione 3.49 abbiamo introdotto le funzioni seno e coseno in modo che risulti $f(t) = \cos t + i \sin t$. Sappiamo che $f(0) = e^0 = 1$ e, per come abbiamo definito π, sappiamo che $f(\pi/2) = i$.

4.1 rappresentazione polare dei numeri complessi

I numeri complessi di modulo uno vengono chiamati *unitari*. Geometricamente i numeri complessi unitari sono i punti della circonferenza unitaria centrata nell'origine del piano complesso. Se $z = x + iy$ è unitario si ha $x^2 + y^2 = 1$. I prodotti e i reciproci dei numeri complessi unitari sono anch'essi unitari, risulta quindi che tali numeri formano un *sottogruppo moltiplicativo*[1] del gruppo dei numeri complessi.

complessi unitari

Ogni numero complesso z potrà essere scritto nella forma

$$z = \rho \cdot u$$

con $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ e $u \in \mathbb{C}$ unitario. Basta infatti definire $\rho = |z|$ e $u = z/|z|$ (se $z \neq 0$, altrimenti si potrà scegliere arbitrariamente $u = 1$).

Teorema 4.1 (argomento). *Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso non nullo. Allora esiste un unico $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che*

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

*Denoteremo tale valore di θ come l'*argomento *di z e scriveremo*

argomento

$$\theta = \arg z.$$

Se $z = 0$ porremo per convenzione $\arg z = 0$.

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ e poniamo $u = z/|z|$. Posto $u = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|u|^2 = x^2 + y^2 = 1$.

1 Un *gruppo* è un insieme su cui è definita una operazione (spesso denotata con il simbolo della moltiplicazione) che sia associativa, che abbia elemento neutro e tale che ogni elemento abbia un inverso.

Se $y \geq 0$ se vogliamo che $y = \sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ dovrà necessariamente essere $\theta \in [0, \pi]$ (altrimenti si avrebbe $\sin\theta < 0$). E se vogliamo che sia $x = \cos\theta$ basterà (e si dovrà) scegliere $\theta = \arccos x$. Visto che $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 = x^2 + y^2$ sapendo che $\cos\theta = x$ si avrà $\sin^2\theta = y^2$ cioè $|\sin\theta| = |y|$. Ma visto che $y \geq 0$ e $\sin\theta \geq 0$ avremo, come voluto, $\sin\theta = y$. Se $y < 0$ poniamo $\theta = 2\pi - \arccos x$ cosicché si avrà $\theta \in (\pi, 2\pi)$ e, come prima (verificare!), $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$.

In ogni caso per ogni $z \neq 0$ abbiamo quindi trovato l'unico $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$u = x + iy = \cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}.$$

da cui

$$z = |z| \cdot e^{i\theta}.$$

□

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ posto

$$\rho = |z|, \qquad \theta = \arg z$$

si avrà quindi la *rappresentazione esponenziale* o *polare*

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta).$$

Se $z = x + iy$ è la *rappresentazione cartesiana*, si avranno le seguenti formule di conversione:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arg z \end{cases}$$

con

$$\arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & \text{se } y > 0, \\ \frac{3}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & \text{se } y < 0, \\ \pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0, \\ 0 & \text{se } y = 0 \text{ e } x \geq 0. \end{cases}$$

4.2 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Vogliamo ora interpretare geometricamente $\theta = \arg z$ come la misura di un angolo. Per fare ciò dobbiamo però capire cosa si intende per angolo e come si misura un angolo. In questa sezione ragioneremo in maniera intuitiva in quanto le proprietà formali analitiche delle operazioni sui numeri complessi sono già state determinate e quello che vogliamo fare è darne una interpretazione geometrica. Daremo quindi per scontate le proprietà geometriche del piano euclideo.

Un *angolo*, geometricamente, è la regione piana delimitata da due semirette uscenti da uno stesso punto. Le due semirette si chiamano *lati* dell'angolo e il punto in comune si chiama *vertice*.

Due angoli α, β si dicono congruenti se è possibile traslare e ruotare uno dei due angoli (diciamo α) in modo che si sovrapponga all'altro. In particolare sarà sempre possibile trovare una traslazione che manda il vertice dell'angolo α sul vertice dell'angolo β e sarà possibile trovare una rotazione che fa coincidere uno dei due lati in modo che uno dei due angoli copra interamente l'altro. Sia α' la roto-traslazione di α così individuata. Se $\alpha' = \beta$ diremo che i due angoli sono congruenti, altrimenti se $\alpha' \supseteq \beta$ diremo che α è maggiore di β e se invece $\alpha' \subseteq \beta$ diremo che α è minore di β. Con un procedimento simile è in genere possibile sommare due angoli: si sposta uno dei due tramite una roto-traslazione in modo da far coincidere il vertice e un lato dei due angoli e in modo che i due angoli non si sovrappongano (questo non è sempre possibile perché se gli angoli sono troppo grandi si sovrapporranno sempre). La loro unione sarà un angolo che chiamiamo somma degli angoli dati.

Misurare un angolo significa associare ad ogni angolo un numero (reale positivo) in modo che si abbiano le seguenti proprietà: angoli congruenti hanno la stessa misura, angoli maggiori hanno misure maggiori (proprietà di monotonia) e la misura della somma di due angoli è la somma delle misure (additività). Si può intuire che una volta scelto quale angolo ha misura 1 (l'unità di misura) la misura di ogni altro angolo sarà univocamente determinata da queste proprietà. Infatti la misura dei multipli e dei sottomultipli dell'unità è determinata dalla additività della misura e la misura degli angoli incommensurabili si potrà ottenere per approssimazione sfruttando la monotonia.

Se ora identifichiamo il piano euclideo con il piano complesso ogni angolo potrà essere traslato e ruotato in modo che uno dei due lati vada a coincidere con la semiretta dei reali positivi e in modo che l'angolo si estenda al di sopra di tale semiretta e sia delimitato da una seconda semiretta passante per un punto u a distanza 1 dall'origine ovvero con $|u| = 1$. Vogliamo giustificare il fatto che $\theta = \arg u$ può essere scelto come misura dell'angolo. Studiando la monotonia delle funzioni cos e sin si può verificare facilmente che θ è crescente con l'angolo. Più rilevante è chiedersi se θ è additivo. Siano $u, v \in \mathbb{C}$ due numeri complessi unitari che rappresentino due diversi angoli. Sia $\theta = \arg u$ e $\varphi = \arg v$ da cui $u = e^{i\theta}$ e $v = e^{i\varphi}$. Consideriamo la trasformazione $R_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot z$. Si nota che R_θ è una trasformazione rigida del piano ovvero una trasformazione che mantiene la distanza tra i punti (una *isometria*) in quanto essendo $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ si ha

$$|R_\theta(z) - R_\theta(w)| = \left|e^{i\theta}z - e^{i\theta}w\right| = \left|e^{i\theta}\right| \cdot |z - w| = |z - w|.$$

Inoltre $R_\theta(0) = 0$ e $R_\theta(1) = u$ significa che R_θ non è altro che una rotazione che tiene fissa l'origine e manda la semiretta dei reali positivi nella semiretta uscente da 0 e passante per $u = e^{i\theta}$. Dunque R_θ è la trasformazione che rende l'angolo identificato dal numero complesso unitario v in un angolo adiacente a quello identificato da u. Quindi la somma (geometrica) degli angoli u e v è identificata dal numero complesso unitario $R_\theta(v) = u \cdot v$. Ma, per la proprietà additiva dell'esponenziale complesso,

$$u \cdot v = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

e dunque se $\theta + \varphi < 2\pi$ si ha

$$\arg(u \cdot v) = \theta + \varphi = \arg(u) + \arg(v)$$

che corrisponde alla proprietà additiva della misura degli angoli.

radiante

L'angolo unitario identificato dal numero complesso e^i si chiama *radiante* ed è l'unità di misura che abbiamo scelto per gli angoli. L'angolo retto sarà identificato dal numero complesso $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ e avrà una misura pari a $\frac{\pi}{2}$ radianti. L'angolo piatto sarà identificato dal numero complesso $-1 = e^{i\pi}$ e avrà una misura di π radianti. Geometricamente la misura degli angoli può essere data dalla lunghezza dell'arco di raggio unitario identificato dall'angolo. Dunque la definizione geometrica di π (rapporto tra lunghezza della circonferenza e diametro) corrisponde a richiedere che la semicirconferenza unitaria abbia misura π radianti. Questo significa che la definizione analitica di π che abbiamo dato (teorema 3.51) si riconcilia con la definizione geometrica.

Possiamo riconciliare definizione analitica e geometrica di π anche con delle osservazioni dirette.

***Osservazione* 4.2** *(lunghezza della circonferenza tramite moto circolare uniforme).* Si considera la curva $t \mapsto e^{it}$ come l'equazione oraria del moto di un punto che si muove nel piano complesso. Visto che $\left|e^{it}\right| = 1$ tale punto si muove sulla circonferenza unitaria. Possiamo determinare la velocità istantanea del punto considerando la variazione della posizione:

$$\frac{e^{i(t+\Delta t)} - e^{it}}{\Delta t} = e^{it} \cdot \frac{e^{i\Delta t} - 1}{\Delta t}.$$

Prendendo un incremento temporale $\Delta t = \varepsilon/n$ con $n \to +\infty$ si osserva che il modulo della velocità è dato da

$$v = \lim_{n\to+\infty} \left|e^{it}\right| \cdot \left|\frac{e^{i\frac{\varepsilon}{n}} - 1}{\frac{\varepsilon}{n}}\right|$$

e visto che $\left|e^{it}\right| = 1$ ricordando il limite notevole (10) (teorema 3.45) si ottiene che la velocità è pari ad 1. Significa che il punto e^{it} si muove sulla circonferenza unitaria con velocità unitaria e quindi la lunghezza della curva percorsa risulta numericamente uguale al tempo trascorso. Visto che per t che varia da 0 a 2π il punto compie un giro completo attorno alla circonferenza unitaria significa che la lunghezza della circonferenza unitaria è 2π.

***Osservazione* 4.3** *(lunghezza della circonferenza tramite approssimazione con poligonali).* Possiamo calcolare la lunghezza della circonferenza unitaria come il limite dei perimetri dei poligoni di N lati iscritti nella circonferenza. Fissato N consideriamo per $k = 0, \dots, N$ i punti

$$u_k = e^{i\frac{2\pi k}{N}}.$$

Osserviamo che

$$|u_{k+1} - u_k| = \left| e^{i\frac{2\pi(k+1)}{N}} - e^{i\frac{2\pi k}{N}} \right| = \left| e^{i\frac{2\pi k}{N}} \right| \cdot \left| e^{i\frac{2\pi}{N}} - 1 \right| = \left| e^{i\frac{2\pi}{N}} - 1 \right|$$

cioè i punti u_k sono equidistanti tra loro. Si noti che $u_0 = u_N = 1$ e quindi i punti $u_1, \dots, u_N$ sono gli N vertici di un poligono regolare di N lati iscritto nella circonferenza unitaria. Il perimetro del poligono è quindi dato da

$$P_N = N \cdot \left| e^{i\frac{2\pi}{N}} - 1 \right|$$

e per $N \to +\infty$ si ha, sempre utilizzando il limite notevole (10)

$$P_N = 2\pi \cdot \left| \frac{e^{i\frac{2\pi}{N}} - 1}{\frac{2\pi}{N}} \right| \to 2\pi.$$

Osservazione* 4.4** *(matrici di rotazione).** Fissato $\theta \in \mathbb{R}$ consideriamo, come prima, la funzione $R_\theta \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $R_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot z$. Un altro modo per convincerci che R_θ rappresenta una rotazione di θ radianti è quello di guardare la matrice associata. Se identifichiamo il piano complesso $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ la trasformazione R_θ può essere rappresentata da una matrice M_α che ha come colonne le coordinate di $R_\theta(1) = \theta = \cos\alpha + i \sin\alpha$ e le coordinate di $R_\theta(i) = i\theta = -\sin\alpha + i\cos\alpha$:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Osservazione* 4.5** *(interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi).** Possiamo ora dare una interpretazione geometrica del prodotto tra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$. Se $z \neq 0$ possiamo scrivere $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ con $\theta = \arg z$, cosicché:

$$z \cdot w = |z| \cdot R_\theta(w).$$

Si capisce quindi che il numero complesso $z \cdot w$ si ottiene ruotando w dell'angolo identificato da z con l'asse dei reali positivi, e quindi riscalando il punto ottenuto di un fattore $|z|$. Se poniamo $\psi = \arg w$ possiamo interpretare la moltiplicazione complessa in coordinate polari:

$$z \cdot w = |z|e^{i\theta} \cdot |w|e^{i\psi} = |z||w| \cdot e^{i(\theta+\varphi)}.$$

Dunque il prodotto di due numeri complessi è quel numero complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma (a meno di multipli di 2π) degli argomenti.

***Osservazione* 4.6** *(interpretazione geometrica dell'esponenziale complesso).* Ricordiamo che (teorema 3.44)

$$e^{iy} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{iy}{n}\right)^n.$$

Possiamo osservare che se $y \in \mathbb{R}$ i punti $(1 + iy/n)^k$ per $k = 1 \dots n$ sono i vertici di una spezzata formata da n segmenti di lunghezza

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{iy}{n}\right)^{k+1} - \left(1+\frac{iy}{n}\right)^k\right| &= \left|\left(1+\frac{iy}{n}\right)^k \cdot \left(1+\frac{iy}{n}-1\right)\right| \\ &= \left(\sqrt{1+\frac{y^2}{n^2}}\right)^k \cdot \frac{|y|}{n} \le \left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{|y|}{n}.\end{aligned}$$

In particolare la lunghezza totale della spezzata ℓ_n può essere stimata come segue

$$|y| \le \ell_n \le \left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot |y|$$

da cui osservando che

$$\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \to 1$$

e utilizzando il criterio del confronto si ottiene $\ell_n \to |y|$.

Si osserva anche che i punti di tale spezzata si avvicinano sempre di più alla circonferenza unitaria, infatti:

$$1 \le \left|\left(1+\frac{i}{n}\right)^k\right| \le \left|1+\frac{i}{n}\right|^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \to 1.$$

E' dunque sensato pensare che il punto e^{iy} sia il punto della circonferenza unitaria che identifica un arco di lunghezza $|y|$ a partire dal punto 1 sull'asse reale. Se $y > 0$ l'arco è misurato in senso antiorario, altrimenti in senso orario. Avremo dunque $\arg\left(e^{iy}\right) = y$ essendo y la lunghezza dell'arco ovvero la misura in radianti dell'angolo corrispondente.

4.3 RADICI COMPLESSE n-ESIME

Sia $c \in \mathbb{C}$ un numero complesso $c \neq 0$. Ci poniamo il problema di determinare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^n = c.$$

radici n-esime

Tali soluzioni saranno chiamate *radici n-esime* di c.

Scriviamo c e z in forma esponenziale:

$$c = re^{i\alpha}, \qquad z = \rho e^{i\theta}.$$

Si avrà allora
$$z^n = \rho^n (e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}.$$
Affinche sia $z^n = c$ si dovrà avere l'uguaglianza dei moduli, cioè $\rho^n = r$ e l'uguaglianza a meno di multipli interi di 2π degli argomenti: $n\theta = \alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque si trova
$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
Osserviamo ora che per $k = 0, \dots, n-1$ il secondo addendo $k2\pi/n$ assume n valori distinti compresi in $[0, 2\pi)$. Per gli altri valori di k si ottengono degli angoli che differiscono da questi di un multiplo di 2π e quindi non si trovano altre soluzioni.

Dunque l'equazione $z^n = c$ per $c \neq 0$ ha n soluzioni distinte date da
$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\alpha/n + 2k\pi i/n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$
dove $\alpha = \arg(c)$ e $r = |c|$. Dal punto di vista geometrico si osserva che z_0 è il numero complesso con modulo la radice n-esima del numero dato c e argomento pari ad un n-esimo dell'argomento di c. Tutte le altre soluzioni si trovano sulla circonferenza centrata in 0 e passante per z_0 e risultano essere, insieme ad z_0, i vertici di un n-agono regolare.

In particolare nel caso $c = 1$ si osserva che le radici n-esime dell'unità si rappresentano geometricamente come i vertici dell'n-agono regolare iscritto nella circonferenza unitaria e con un vertice in $z_0 = 1$.

***Esercizio* 4.7.** Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ delle seguenti equazioni. Scrivere le soluzioni in forma polare e cartesiana.
$$z^4 = -4$$
$$z^6 = i$$
$$z^3 = -8i$$
$$z^4 = z$$
$$z^2 + 1 = i\sqrt{3}$$
$$(z - i)^4 = 1$$
$$1 + z + z^2 + z^3 = 0$$
$$z^{14} - z^6 - z^8 + 1 = 0$$

4.4 POLINOMI

Definizione 4.8 (funzione polinomiale)**.** *Diremo che una funzione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una* funzione polinomiale *a coefficienti complessi se esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono dei numeri complessi $a_0, a_1, \dots, a_N$ tali che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si abbia* *funzione polinomiale*
$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k.$$

Usualmente si denota con $\mathbb{C}[z]$ *l'insieme di tutte le funzioni polinomiali a coefficienti in* $\mathbb{C}$.

Nel seguito chiameremo più semplicemente *polinomi* le funzioni polinomiali. Dobbiamo però avvertire che a rigore il polinomio non è la funzione $f(z)$ definita più sopra ma è l'operazione astratta di applicare ad un oggetto qualunque z (non necessariamente un numero) le opportune operazioni di moltiplicazione e di addizione. Ad esempio se M è una matrice e p è il polinomio $p(z) = 3z^2 + 2$ ha senso considerare la matrice $f(M) = 3M^2 + 2M^0$ dove $M^2 = M \cdot M$ e $M^0 = Id$.

anello commutativo

Più in generale possiamo considerare polinomi a coefficienti in un qualunque *anello commutativo* cioè su un insieme in cui sono definite la somma e il prodotto e su cui valgono le proprietà associativa (per somma e prodotto), commutativa (per somma e prodotto), esistenza dell'opposto (per la somma) e la proprietà distributiva. Ogni campo è un anello commutativo, ma negli anelli non è necessario esista sempre l'inverso moltiplicativo. Esempi di anelli commutativi sono: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$. Tratteremo in questa sezione solamente i polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ e li considereremo come funzioni $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. E' chiaro che i risultati ottenuti potranno essere utilizzati anche per i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ che, usualmente, vengono considerati come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma potrebbero anche essere considerati un sottospazio dei polinomi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

L'insieme $V = \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ di tutte le funzioni $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale complesso in quanto se $f, g \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ si può definire la combinazione lineare di f e g come

$$(\lambda f + \mu g)(z) = \lambda f(z) + \mu g(z)$$

e risulta quindi che $\lambda f + \mu g$ è ancora un elemento di V.

Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo le particolari funzioni $e_n \in V$ definite da

$$e_n(z) = z^n$$

ci accorgiamo che l'insieme dei polinomi $\mathbb{C}[z]$ non è altro che l'insieme delle funzioni che si ottengono facendo una combinazione lineare finita di queste funzioni. Cioè $\mathbb{C}[z]$ è lo spazio generato dalle funzioni (vettori di $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$): $1, z, z^2, \dots, z^n, \dots$

Osserviamo che gli spazi $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{C}[z]$ hanno una struttura di anello (è possibile fare il prodotto di funzioni, ma solo le funzioni che non si annullano mai hanno inverso moltiplicativo).

Teorema 4.9 (principio di annullamento dei polinomi)**.** *Sia* $N \in \mathbb{N}$ *e siano* $a_0, \dots, a_N$ *numeri complessi tali che*

$$\forall z \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=0}^{N} a_k z^k = 0.$$

Allora $a_k = 0$ *per ogni* $k = 0, \dots, N$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ci sia almeno un coefficiente a_k non nullo. Senza perdita di generalità possiamo supporre che sia l'ultimo cioè $a_N \neq 0$ in quanto se fosse $a_N = 0$ potrei trascurare l'ultimo addendo e decrementare N. Se $a_N \neq 0$ possiamo allora scrivere

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^k = a_N z^N \left(1 + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} \frac{1}{z^{N-k}}\right).$$

Per ipotesi il lato sinistro si annulla per ogni $z \in \mathbb{N}$ e quindi si deve annullare il limite per $z \to +\infty$, $z \in \mathbb{N}$ di ambo i lati dell'uguaglianza. Ma nel lato destro ogni termine della sommatoria tende a zero se $z \to +\infty$ e quindi la parentesi tende a 1. Affinché il prodotto tenda a zero è quindi necessario che sia $a_N = 0$ in quanto $z^N \to +\infty$. Assurdo. $\square$

In particolare il teorema precedente ci dice che il polinomio con tutti i coefficienti nulli è l'unico polinomio che si annulla su tutto $\mathbb{C}$.

Dal punto di vista dell'algebra lineare questo significa che i vettori $1, z, z^2, \dots$ dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ sono vettori indipendenti. Per definizione essi generano $\mathbb{C}[z]$ e dunque sono in effetti una base di $\mathbb{C}[z]$. Risulta quindi che $\mathbb{C}[z]$ e $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ siano spazi vettoriali di dimensione infinita.

L'enunciato è però più generale (basta che il polinomio si annulli sui numeri naturali) e questo ci garantisce che tale risultato può essere applicato anche ai polinomi visti come funzioni definite solamente su $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$ o anche solo su $\mathbb{Z}$. Dunque il risultato si applica anche a $\mathbb{R}[x]$: i polinomi a coefficienti reali visti come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In effetti questo sarà il caso più importante per quanto riguarda il prosieguo del corso.

Teorema 4.10 (principio di identità dei polinomi)**.** *Dati due polinomi*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^k$$

si ha che $f = g$ se e solo se $a_k = b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (intendendo che $a_k = 0$ se $k > N$ e $b_k = 0$ se $k > M$).

Il risultato è valido anche se consideriamo i polinomi come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Possiamo innanzitutto supporre $N = M$ semplicemente aggiungendo coefficienti nulli al polinomio con meno termini. Si potrà considerare allora la differenza tra i due polinomi:

$$f(z) - g(z) = \sum_{k=0}^{N} (a_k - b_k) z^k.$$

Chiaramente se $a_k = b_k$ per ogni $k = 0, \dots, N$ il termine sul lato destro si annulla per ogni $z \in \mathbb{C}$ e quindi si ottiene $f = g$. Viceversa se $f = g$ (anche solo su $\mathbb{N}$) il lato sinistro è zero e per il teorema di annullamento dei polinomi possiamo quindi concludere che tutti i coefficienti $a_k - b_k$ sono nulli. Dunque $a_k = b_k$ per ogni k. $\square$

grado di un polinomio

Definizione 4.11 (grado). *In base al teorema precedente se f è un polinomio non nullo esiste una unica sequenza di coefficienti $a_k \in \mathbb{C}$ e un unico $N \in \mathbb{N}$ tali che $a_k = 0$ per ogni $k > N$ e $a_N \neq 0$, per cui si ha*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k.$$

grado del polinomio f

Il numero naturale N si chiama grado del polinomio f *e si denota con* $\deg f$.

Il polinomio nullo $f(z) = 0$ si può rappresentare come una somma vuota *e non ha nessun coefficiente diverso da zero. Per convenzione il suo grado si pone uguale a $-\infty$:* $\deg f = -\infty$.

Si osservi che se il polinomio f ha coefficienti a_k potremmo definire

$$\deg f = \sup\{k \in \mathbb{N} \colon a_k \neq 0\}.$$

Se f è il polinomio nullo l'insieme di cui si vuole prende l'estremo superiore è vuoto e, coerentemente con la definizione di sup, il grado di f risulta quindi $-\infty$.

Teorema 4.12 (grado della somma e del prodotto). *Se f e g sono polinomi anche $f + g$ e $f \cdot g$ sono polinomi. Si ha sempre*

$$\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$$

e se $\deg f \neq \deg g$ *si ha*

$$\deg(f + g) = \max\{\deg f, \deg g\}.$$

Inoltre

$$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g.$$

Dimostrazione. Sia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\deg f} a_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\deg g} b_k z^k.$$

Possiamo considerare $N = \max\{\deg f, \deg g\}$ e definire $a_k = 0$ e $b_k = 0$ per ogni k maggiore del grado del polinomio corrispondente. Si ha allora

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k + \sum_{k=0}^{N} b_k z^k = \sum_{k=0}^{N} (a_k + b_k) z^k.$$

E' possibile che $f + g$ abbia grado inferiore ad N in quanto non possiamo garantire che $a_N + b_N$ sia non nullo a meno che i gradi dei due polinomi non siano diversi perché in tal caso uno tra a_N e b_N è nullo e l'altro, essendo il termine di grado massimo, è non nullo.

Per quanto riguarda il prodotto supponiamo inizialmente che f e g non siano nulli. Allora si ha

$$\begin{aligned} f(z) \cdot g(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\deg f} a_k z^k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\deg g} b_j z^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\deg f} \sum_{j=0}^{\deg g} a_k b_j z^{k+j} \\ &= \sum_{n=0}^{\deg f + \deg g} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo cambiato variabile negli indici, ponendo $n = k + j$ da cui $j = n - k$ e inoltre stiamo supponendo, per comodità, che $a_k = 0$ quando $k > \deg f$ e $b_k = 0$ per $k < 0$. In effetti quando $n = \deg f + \deg g$ la somma

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ha un solo addendo non nullo che corrisonde a $k = \deg f$ e $n - k = \deg g$. Tale addendo è sicuramente non nullo in quanto è il prodotto dei coefficienti di grado massimo di f e g. Risulta quindi che il polinomio prodotto ha grado esattamente uguale a $\deg f + \deg g$.

Se almeno uno tra f e g è nullo allora chiaramente anche il prodotto è nullo. D'altra parte se uno tra $\deg f$ e $\deg g$ è uguale a $-\infty$ anche la somma è $-\infty$. Risulta quindi che il risultato è verificato anche nel caso particolare dei polinomi nulli. □

Teorema 4.13 (divisione tra polinomi)**.** *Dati due polinomi $p(z)$ e $d(z)$ con $d \neq 0$ è possibile trovare, in modo unico, due polinomi $q(z)$ (quoziente) e $r(z)$ (resto) con* $\deg r < \deg d$ *tali che:*

$$p(z) = q(z) \cdot d(z) + r(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dimostrazione. Passo 1: supponiamo che sia $\deg p < \deg d$. In questo caso deve necessariamente essere $q = 0$ altrimenti si avrebbe $\deg(q \cdot d) = \deg q + \deg d \geq \deg d > \deg r$ da cui $\deg(q \cdot d + r) = \deg(q \cdot d) = \deg q + \deg d > \deg p$ e non si potrebbe avere l'uguaglianza $p = q \cdot d + r$. Ma posto $q = 0$ e $r = p$ si ha $\deg r = \deg p < \deg d$ e l'uguaglianza è certamente (e unicamente) soddisfatta.

Passo 2: supponiamo che sia $\deg p \geq \deg d$. Poniamo $N = \deg p$ e $M = \deg d$. Sia $a_N \neq 0$ il coefficiente del termine di grado massimo di p e $b_M \neq 0$ il coefficiente di grado massimo del polinomio d. E' allora facile verificare che il polinomio

$$\frac{a_N}{b_M} z^{N-M} \cdot d(z)$$

ha lo stesso grado di $p(z)$ e il suo coefficiente di grado massimo è uguale ad a_N in quanto è il prodotto di a_N/b_M per b_M. Dunque il polinomio

$$p_1(z) = p(z) - \frac{a_N}{b_N} z^{N-M} \cdot d(z)$$

ha grado strettamente inferiore a p. Possiamo ora supporre, mediante un ragionamento induttivo su $\deg p - \deg d$ che per il polinomio p_1 il risultato del teorema sia valido cioè che esistano unici dei polinomio q_1 e r con $\deg r < \deg d$ tali che

$$p_1(z) = q_1(z) \cdot d(z) + r(z).$$

Il caso base del ragionamento induttivo, $\deg p = \deg d$, è garantito dal Passo 1. Avremo allora:

$$\begin{aligned} p(z) &= p_1(z) + \frac{a_N}{b_N} z^{N-M} \cdot d(z) \\ &= q_1(z) \cdot d(z) + r_1(z) + \frac{a_N}{b_N} z^{N-M} \cdot d(z) \\ &= (\frac{a_N}{b_N} z^{N-M} + q_1(z)) \cdot d(z) + r_1(z). \end{aligned}$$

Posto quindi

$$q(z) = \frac{a_N}{b_N} z^{N-M} + q_1(z)$$

il risultato è dimostrato. □

La dimostrazione del teorema precedente fornisce anche un algoritmo per eseguire la divisione (con resto) tra polinomi, come si può comprendere dallo svolgimento del seguente esercizio.

***Esercizio* 4.14.** Sia $p(z) = z^4 - 3z^2 + 2z + 1$ e $d(z) = z^2 - 1$. Eseguire la divisione con resto cioè: trovare $q(z)$ ed $r(z)$ con $\deg r < \deg d$ tali che

$$p(z) = q(z) \cdot d(z) + r(z).$$

Svolgimento. Il rapporto tra i termini di grado massimo di $p(z)$ e $d(z)$ è $z^4/z^2 = z^2$. Dunque consideriamo come primo monomio z^2. Si ha

$$\begin{aligned} p_1(z) = p(z) - z^2 \cdot d(z) &= z^4 - 3z^2 + 2z + 1 - z^4 + z^2 \\ &= -2z^2 + 2z + 1. \end{aligned}$$

Ripetiamo il procedimento con p_1 al posto di p. Il rapporto tra i termini di grado massimo di $p_1(z)$ e $d(z)$ è il monomio -2. Si ha

$$p_2(z) = p_1(z) - (-2)d(z) = -2z^2 + 2z + 1 + 2z^2 - 2 = 2z - 1.$$

Visto che $\deg p_2 < \deg d$ la divisione termina e si pone $r(z) = 2z - 1$. Si ha quindi $q(z) = z^2 - 2$ (la somma dei monomi trovati) e risulta:

$$p(z) = (z^2 - 2) \cdot d(z) + 2z - 1.$$

□

Teorema 4.15 (Ruffini)**.** *Sia $p(z)$ un polinomio non nullo. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ è tale che $p(z_0) = 0$ allora esiste un polinomio $q(z)$ con $\deg q = (\deg p) - 1$ tale che*

$$p(z) = (z - z_0) \cdot q(z).$$

Dimostrazione. In base al teorema precedente si può fare la divisione tra $p(z)$ e $d(z) = z - z_0$ per ottenere un polinomio $q(z)$ e un resto $r(z)$ con $\deg r < 1$ tali che

$$p(z) = (z - z_0) \cdot q(z) + r(z).$$

Siccome $\deg r(z) < 1$ si ha in effetti che $r(z) = c$ è una costante:

$$p(z) = (z - z_0) \cdot q(z) + c$$

e sostituendo $z = z_0$ si scopre che $c = p(z_0) = 0$. □

4.5 il teorema fondamentale dell'algebra

Per dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra dobbiamo estendere il teorema di Weierstrass alle funzioni di una variabile complessa. Nel teorema di Weierstrass la funzione per ipotesi è definita su un intervallo chiuso e limitato. Nel piano complesso non esiste il concetto di *intervallo* in quanto non abbiamo un ordinamento ma vedremo che comunque il teorema di Weierstrass rimane valido per le funzioni continue definite su insiemi chiusi e limitati secondo le seguenti definizioni.

Definizione 4.16 (chiusura sequenziale)**.** *Un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice essere* sequenzialmente chiuso *se presa una qualunque successione di punti $a_n \in A$ se $a_n \to a$ per qualche $a \in \mathbb{C}$ allora $a \in A$.* *sequenzialmente chiuso*

Definizione 4.17 (limitatezza)**.** *Un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice essere* limitato *se* *limitato*

$$\sup\{|z| : z \in A\} < +\infty.$$

Una successione $z_n \in \mathbb{C}$ si dice essere limitata se l'insieme $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato ovvero se

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n| < +\infty.$$

Definizione 4.18 (disco)**.** *Dato $R \geq 0$ si può definire il disco complesso di raggio R come l'insieme $D_R \subseteq \mathbb{C}$ definito da*

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Geometricamente si tratta di un cerchio pieno di raggio R centrato in 0.

Teorema 4.19 (il disco è chiuso e limitato)**.** *Per ogni $R \in [0, +\infty)$ il disco D_R è un sottoinsieme di C non vuoto, chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Per ogni $R \geq 0$ si ha $0 \in D_R$ e quindi D_R non è mai vuoto.

Che D_R sia limitato è pure ovvio, in quanto dato $z \in D_R$ si ha per definizione $|z| \leq R$ e dunque $\sup_{z \in D_R} |z| = R < +\infty$.

Per dimostrare che D_R è chiuso consideriamo una qualunque successione $a_n \in D_R$. Sappiamo dunque che $|a_n| \leq R$ cioè $R - |a_n| \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la continuità del modulo sappiamo che $R - |a_n| \to R - |a|$ e per il teorema della permanenza del segno possiamo concludere che $R - |a| \geq 0$ cioè che $|a| \leq R$ ovvero $a \in D_R$. Come volevamo dimostrare. □

Teorema 4.20 (Bolzano-Weierstrass complesso). *Se $z_n \in \mathbb{C}$ è una successione limitata allora è possibile estrarre una sottosuccessione z_{n_k} convergente: $z_{n_k} \to z$ con $z \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Siano x_n e y_n la parte reale ed immaginaria di z_n: $z_n = x_n + iy_n$. Visto che $|x_n| = \sqrt{x_n^2} \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$ e, allo stesso modo $|y_n| \leq |z_n|$, possiamo affermare che entrambe le successioni x_n e y_n sono limitate (ma stavolta in $\mathbb{R}$). Dunque possiamo applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass (reale) alla successione x_n per trovare una sottosuccessione $x_{n_j} \to x$ convergente. E possiamo applicare di nuovo il teorema di Bolzano-Weierstrass alla sottosuccessione y_{n_j} per trovare una sotto-sottosuccessione $y_{n_{j_k}} \to y$ anch'essa convergente. Posto $n_k = n_{j_k}$ avremo dunque trovato una sottosuccessione $z_{n_k} = x_{n_k} + iy_{n_k} \to x + iy$ convergente. □

Teorema 4.21 (Weierstrass complesso). *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un insieme non vuoto, sequenzialmente chiuso e limitato e sia $f \colon A \to \mathbb{R}$ una funzione sequenzialmente continua. Allora f ha massimo e minimo su A.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'esistenza del minimo: per il massimo la dimostrazione è perfettamente analoga. Sia $m = \inf f(A)$. Essendo A non vuoto, per il lemma sull'esistenza delle successioni minimizzanti sappiamo esistere una successione $z_n \in A$ tale che $f(z_n) \to m$. Essendo A limitato possiamo applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass per trovare $z \in \mathbb{C}$ e una sottosuccessione $z_{n_k} \to z$. Essendo A sequenzialmente chiuso possiamo quindi affermare che $z \in A$. Essendo f continua concludiamo che

$$f(z) = \lim_{k \to +\infty} f(z_{n_k}) = m$$

e dunque z è un punto di minimo per f. □

Teorema 4.22 (esistenza del minimo per funzioni coercive). *Sia $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che per ogni successione $z_n \to \infty$ (ovvero $|z_n| \to +\infty$) si abbia $f(z_n) \to +\infty$. Allora f ha minimo.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon f(z) \leq f(0)\}.$$

Chiaramente $0 \in A$ e quindi A non è vuoto. L'insieme A è anche sequenzialmente chiuso in quanto se $z_k \in A$ allora $f(0) - f(z_k) \geq 0$, per continuità $f(0) - f(z_k) \to f(0) - f(z)$ e per il teorema della permanenza del segno si ottiene $f(0) - f(z) \geq 0$ cioè $z \in A$. Dimostriamo ora che A è anche limitato. Se non lo fosse esisterebbe, per assurdo, una successione $z_n \in A$ tale che $|z_n| \to +\infty$ cioè $z_n \to \infty$. Ma allora, per ipotesi su f, si avrebbe $f(z_n) \to +\infty$ che contraddice la condizione $f(z_n) \leq f(0)$. Essendo A non vuoto, sequenzialmente chiuso e limitato ed essendo $f \colon A \to \mathbb{R}$ continua, possiamo applicare il teorema di Weierstrass complesso per dedurre che f ha minimo su A in un punto $w \in A$. Ma essendo $0 \in A$ si avrà sicuramente $f(w) \leq f(0)$ e per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus A$ si ha invece $f(z) > f(0)$ per come è stato definito A. Dunque w è minimo di f su tutto $\mathbb{C}$, non solo su A. □

teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 4.23 (teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Sia $f(z)$ un polinomio di grado $N \geq 1$ a coefficienti complessi:*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot z^j$$

con $a_j \in \mathbb{C}$ per $j = 0, \dots, N$ e $a_N \neq 0$. Allora esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $f(w) = 0$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $|f(z)|$ è coerciva cioè che se $z_n \to \infty$ allora $|f(z_n)| \to +\infty$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} |f(z_n)| &= \left| \sum_{j=0}^{N} a_j z_n^j \right| = \left| a_N z_n^N + \sum_{j=0}^{N-1} a_j z_n^j \right| \\ &= |z_n|^N \cdot \left| a_N + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{a_j}{z_n^{N-j}} \right| \to +\infty \end{aligned}$$

se $z_n \to \infty$.

Sappiamo che tutti i polinomi sono funzioni continue in quanto somme di prodotti di funzioni continue e il modulo è anch'esso una funzione continua dunque $|f(z)|$ è certamente una funzione continua.

Dunque possiamo applicare il teorema di esistenza del minimo per le funzioni coercive: esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $|f(w)|$ è minimo.

Per concludere il teorema basterà dimostrare che $f(w) = 0$. L'idea che vogliamo sviluppare è che i polinomi complessi se assumono un valore $f(w)$ in un punto $w \in \mathbb{C}$ allora assumono anche tutti i valori vicini ad esso in quanto *localmente* il polinomio assomiglia ad una potenza z^n e l'equazione $z^n = c$ ha sempre soluzione, come abbiamo già visto. Dunque vicino a w ci saranno dei punti in cui f assume valori che in modulo sono minori a $f(w)$: a meno che non sia proprio $f(w) = 0$, nel qual caso ovviamente non è possibile avere numeri con modulo inferiore a 0. Per semplificare la notazione vogliamo andremo a traslare e riscalare il polinomio f in modo che il punto di minimo vada in 0 e il valore con modulo minimo diventi 1.

Supponiamo per assurdo che sia $f(w) \neq 0$ e consideriamo il polinomio ausiliario

$$g(z) = \frac{f(w+z)}{f(w)}.$$

Andremo a dimostrare che esiste uno $z \neq 0$ tale che $|g(z)| < 1$: questo ci porterà all'assurdo in quanto si avrebbe

$$|f(w+z)| = |f(w)| \cdot |g(z)| < |f(w)|$$

e quindi w non sarebbe un punto di minimo per $|f|$.

Il polinomio g si può scrivere, al solito, come somma di monomi

$$g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_N z^n.$$

Essendo $g(0) = 1$ si ha $b_0 = 1$. Vicino a $z = 0$ il comportamento del polinomio è dominato dai termini di grado più basso. Sia $k \geq 1$ il primo indice per cui $b_k \neq 0$. Osserviamo che tale k esiste perché se tutti i coefficienti b_k fossero nulli per $k \geq 1$ allora il polinomio g sarebbe costante e allora anche f sarebbe costante, cosa che abbiamo escluso richiedendo per ipotesi che f abbia grado $N \geq 1$. Il polinomio g si potrà dunque scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} \cdots + b_N z^n \\ &= 1 + b_k z^k + z^{k+1} \Big(b_{k+1} + b_{k+2} z + \cdots + b_N z^{n-k-1} \Big) \\ &= 1 + b_k z^k + z^{k+1} \cdot q(z) \end{aligned}$$

dove $q(z)$ è un polinomio di grado $n - k - 1$.

Se scriviamo b_k e z in forma esponenziale:

$$b_k = re^{i\alpha}, \qquad z = \rho e^{i\theta}$$

scegliendo $\theta = (\pi - \alpha)/k$ otteniamo che $b_k z^k$ sia un numero reale negativo, in particolare:

$$\begin{aligned} \Big| g(\rho e^{i\theta}) \Big| &= \Big| 1 + re^{i\alpha} \rho^k e^{ik\theta} + \rho^{k+1} e^{i(k+1)\theta} q(\rho e^{i\theta}) \Big| \\ &\leq \Big| 1 + r\rho^k e^{i\pi} \Big| + \rho^{k+1} \Big| q(\rho e^{i\theta}) \Big| \\ &= \Big| 1 - r\rho^k \Big| + \rho^{k+1} \Big| q(\rho e^{i\theta}) \Big|. \end{aligned}$$

Essendo $q(z)$ una funzione continua sappiamo, per il teorema di Weierstrass complesso, che $|q(z)|$ ha massimo $M < +\infty$ su D_1. Ovvero per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$ si ha $|q(z)| \leq M$. In particolare nel nostro caso $|z| = \rho$ e quindi se $\rho \leq 1$ possiamo affermare che $\big| q(\rho e^{i\theta}) \big| \leq M$.

Dunque, proseguendo la stima fatta in precedenza, si ha, per ogni $\rho \leq 1$

$$\Big| g(\rho e^{i\theta}) \Big| \leq \Big| 1 - r\rho^k \Big| + M \cdot \rho^{k+1}.$$

Se ora imponiamo anche che sia $\rho < 1/\sqrt[k]{r}$ possiamo togliere il valore assoluto e richiedendo inoltre che sia $\rho < r/M$ (ricordiamo che $r > 0$ in quanto $b_k \neq 0$) si ottiene

$$\left|g(\rho e^{i\theta})\right| \leq 1 - r\rho^k + M \cdot \rho^{k+1} < 1 - r\rho^k + r\rho^k = 1.$$

E' dunque possibile determinare un valore di ρ abbastanza piccolo, ma non nullo, in modo che posto $z = \rho e^{i\theta}$, si abbia $|g(z)| < 1$ e la dimostrazione è completata. □

Teorema 4.24 (Decomposizione dei polinomi sui complessi)**.** *Sia $p(z)$ un polinomio non nullo. Allora posto $n = \deg p$ esistono dei numeri complessi $z_1, z_2, \dots, z_n$ ed un numero complesso $c \neq 0$ tali che*

$$p(z) = c \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

Gli z_k sono unici a meno dell'ordine e c pure è univocamente determinato.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su $n = \deg p$. Se $n = 0$ il polinomio p è costante: $p(z) = c$. Ricordando che un prodotto di $n = 0$ fattori è uguale a 1 si ottiene quindi il risultato voluto.

Sia ora $p(z)$ un qualunque polinomio di grado $n > 1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra sappiamo che esiste un numero complesso z_n tale che $p(z_n) = 0$. Per il teorema di Ruffini si ha allora

$$p(z) = (z - z_n)q(z)$$

con q un qualche polinomio di grado $n - 1$. Per ipotesi induttiva possiamo dunque supporre che esistano $z_1, \dots, z_{n-1}$ e c numeri complessi tali che

$$q(z) = c \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)$$

e la tesi segue. □

5 CALCOLO DIFFERENZIALE

5.1 LIMITE DI FUNZIONE

Definizione 5.1 (intorno). *Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo la famiglia degli* intorni *(basilari) di x come l'insieme di tutti gli intervallini aperti, simmetrici, centrati in x:* intorni

$$\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}.$$

Definiamo poi gli intorni destri *e* intorni sinistri *di x come* intorni destri/sinistri

$$\mathcal{B}_{x^+} = \{[x, x+\varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}, \qquad \mathcal{B}_{x^-} = \{(x-\varepsilon, x] \colon \varepsilon > 0\}.$$

Definiamo poi gli intorni di $+\infty$ e $-\infty$ come segue

$$\mathcal{B}_{+\infty} = \{(a, +\infty], \colon a \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{B}_{-\infty} = \{[-\infty, b), \colon b \in \mathbb{R}\}.$$

Per ogni $x \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ risultano quindi definiti gli intorni $\mathcal{B}_x$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sono definiti gli intorni $\mathcal{B}_{x^+}$ e $\mathcal{B}_{x^-}$.

***Osservazione* 5.2.** Sarebbe possibile definire in maniera analoga gli intorni dei punti in $\mathbb{R}^n$ (per l'analisi di funzioni di più variabili) o in $\mathbb{C}$ (per l'analisi complessa). Ma in questo corso e in questo capitolo in particolare siamo particolarmente interessati allo studio delle funzioni di una singola variabile. Su $\mathbb{R}$ c'è una struttura di ordine totale che è utile preservare aggiungendo due punti all'infinito: $+\infty$ e $-\infty$.

Su $\mathbb{R}^n$ (e su $\mathbb{C}$, che in questo contesto possiamo identificare con $\mathbb{R}^2$) non c'è una struttura d'ordine naturale e quindi usualmente si considera un unico punto all'infinito ∞ i cui intorni saranno

$$\mathcal{B}_\infty = \{\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| > R\} \colon R > 0\}.$$

Su $\mathbb{R}^n$ (e su $\mathbb{C}$) non esiste il concetto di intorno *destro* e *sinistro* proprio perché questi concetti presuppongono un ordinamento.

In certi casi può tornare utile considerare un unico punto all'infinito, denotato con ∞, anche in $\mathbb{R}$ (in molti testi tale punto verrebbe denotato con il simbolo $\pm\infty$) e si potrebbero usare le notazioni $+\infty = \infty^-$ e $-\infty = \infty^+$ visto che gli intorni di $+\infty$ e $-\infty$ sono in effetti intorni unilaterali del punto all'infinito.

Definizione 5.3 (punto di accumulazione). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e $x \in [-\infty, +\infty]$. Diremo che x è un* punto di accumulazione *di A se ogni intorno di x contiene punti di A diversi da x, ovvero:* *

punto di accumulazione

$$\forall U \in \mathcal{B}_x \colon (A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset.$$

Analogamente diremo che $x \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione destro *(o* sinistro*) di A se ogni intorno destro (o sinistro) di x contiene punti di A diversi da x.*

Definizione 5.4 (limite di funzione). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f \colon A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ un punto di accumulazione di A e sia $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Allora diremo che la funzione f ha limite ℓ in per x che tende a x_0 e scriveremo* ***

limite di funzione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

o anche

$$f(x) \to \ell \qquad \text{per } x \to x_0$$

se per ogni intorno di ℓ esiste un intorno di x_0 tale che la funzione valutata nell'intorno di x_0, tolto eventualmente x_0, assume valori nell'intorno di ℓ:

$$\forall U \in \mathcal{B}_\ell \colon \exists V \in \mathcal{B}_{x_0} \colon f(V \setminus \{x_0\}) \subseteq U. \tag{1}$$

La stessa definizione può essere data restringendosi agli intorni destri/sinistri del punto x_0 (nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$). Si otterranno quindi le definizioni di limite destro *e* limite sinistro *semplicemente sostituendo $\mathcal{B}_{x_0^+}$ o $\mathcal{B}_{x_0^-}$ al posto di $\mathcal{B}_{x_0}$ nella definizione precedente:*

limite destro/sinistro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Osserviamo che se $A = \mathbb{N}$ e $x_0 = +\infty$ la definizione di limite di funzione per $x \to +\infty$ coincide con la definizione di limite della successione $a_n = f(n)$. Non c'è quindi ambiguità nell'usare gli stessi simboli per i limiti di funzione e i limiti di successione. Si noti che $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ in $\bar{\mathbb{R}}$ (verificare!) e dunque se $n \in \mathbb{N}$ l'unico limite che possiamo considerare è per $n \to +\infty$.

***Esempio* 5.5.** Si consideri la funzione segno:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si può verificare che

$$\operatorname{sgn}(x) \to 1 \qquad \text{per } x \to 0^+$$

e

$$\operatorname{sgn}(x) \to -1 \qquad \text{per } x \to 0^-$$

***Osservazione* 5.6** *(definizione di limite con gli epsilon e delta).* Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ la definizione di

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

si può scrivere nella forma:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Considerando i casi $x \in \mathbb{R}$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ e combinandoli con i casi $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$ ci rendiamo conto che si ottengono 15 diverse definizioni di limite. Questo è il motivo per cui preferiamo dare la definizione astratta (1).

Come nel caso dei limiti di successione, la notazione $\lim_{x\to x_0} f(x)$ risulta definita univocamente (quando il limite esiste) in quanto vale il seguente.

* **Teorema 5.7** (unicità del limite). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A e $\ell_1, \ell_2 \in [-\infty, +\infty]$. Se per $x \to x_0$ si ha*

$$f(x) \to \ell_1 \qquad e \qquad f(x) \to \ell_2$$

allora $\ell_1 = \ell_2$. Risulta quindi che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ quando esiste è unico.

* *Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $\ell_1 \neq \ell_2$. Allora esiste un intorno V_1 di ℓ_1 ed un intorno V_2 di ℓ_2 tali che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (basta prendere degli intorni abbastanza piccoli). Ma per le definizioni di limite $f(x) \to \ell_1$ e $f(x) \to \ell_2$ dovranno esistere U_1 e U_2 intorni di x_0 su cui si ha $f(U_1) \subseteq V_1$ e $f(U_2) \subseteq V_2$. Ma allora $f((A \setminus \{x_0\}) \cap U_1) \cap f((A \setminus \{x_0\}) \cap U_2) \subseteq V_1 \cap V_2 = \emptyset$... e questo è assurdo perché certamente $U_1 \cap U_2$ contiene punti di A diversi da x_0 in quanto U_1 e U_2 sono uno contenuto nell'altro e x_0 è un punto di accumulazione per A. □

Teorema 5.8 (località del limite). *Il limite di una funzione per $x \to x_0$ dipende solamente dai valori di f in un intorno di x_0 e non dipende dal valore di f in x_0. Più precisamente se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è una funzione, $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ è un punto di accumulazione di A, $g\colon B \to \mathbb{R}$ è un'altra funzione tale che esiste un intorno U di x_0 per cui $(A \setminus \{x_0\}) \cap U = (B \setminus \{x_0\}) \cap U$ e $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap U$, allora si ha*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

dove si intende che basta che uno dei due limiti (di f o di g) esista perché esista anche l'altro.

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dal fatto che nella definizione di limite gli intorni di x_0 possono essere scelti arbitrariamente piccoli, in particolare si potranno scegliere intorni contenuti in U in cui le due funzioni quindi coincidono. □

Teorema 5.9 (restrizione del limite). *Se una funzione ha limite ℓ per $x \to x_0$ e se restringiamo l'insieme di definizione della funzione (in modo che x_0 rimanga punto di accumulazione) allora il limite della funzione non cambia. Più precisamente se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è una funzione, x_0 è un punto di accumulazione di A e $B \subseteq A$ ha ancora x_0 come punto di accumulazione e se $g\colon B \to \mathbb{R}$ coincide con f su B, allora se esiste il limite di f per $x \to x_0$ si ha*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Si osservi che a differenza del teorema sulla località del limite è possibile che la funzione ristretta g abbia limite quando la funzione f non aveva limite (ad esempio si consideri $g(x) = \sqrt{x/|x|}$, $f(x) = x/|x|$ per $x \to 0$).

Dimostrazione. Il teorema segue immediatamente dalla definizione di limite se si osserva che restringendo il dominio la condizione di validità del limite si indebolisce in quanto gli intorni di x_0 vengono intersecati con il dominio della funzione. □

Teorema 5.10 (legame tra limite, limite destro e limite sinistro). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione di A. Sia $A^+ = A \cap [x_0, +\infty)$ e $A^- = A \cap (-\infty, x_0]$.* *

Se x_0 è punto di accumulazione sia di A^+ che di A^- allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Se x_0 è punto di accumulazione di A^+ ma non di A^- allora i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

sono equivalenti. Analogamente se x_0 è punto di accumulazione di A^- ma non di A^+ risultano equivalenti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Dimostrazione. Si tratta semplicemente di verificare le definizioni di limite sfruttando il fatto che intorni di un punto x_0 sono formati dall'unione di intorno destro e intorno sinistro. □

Teorema 5.11 (limite della funzione composta/cambio di variabile). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ un punto di accumulazione di A, $y_0 \in [-\infty, +\infty]$ un punto di accumulazione di B, $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Siano $f\colon A \to B \setminus \{y_0\}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ funzioni tali che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \qquad e \qquad \lim_{y\to y_0} g(y) = \ell.$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell.$$

Dimostrazione. Visto che $g(y) \to \ell$ per ogni U intorno di ℓ deve esistere un V intorno di y_0 tale che $g((B \setminus \{y_0\}) \cap V) \subseteq U$ e visto che $f(x) \to y_0$ deve esistere un intorno W di x_0 tale che $f((A \setminus \{x_0\}) \cap W) \subseteq V$. Ma visto che per ipotesi f assume valori in $B \setminus \{y_0\}$ si ha anche $f((A \setminus \{x_0\}) \cap W) \subseteq (B \setminus \{y_0\}) \cap V$ e quindi

$$g(f((A \setminus \{x_0\}) \cap W)) \subseteq g((B \setminus \{y_0\}) \cap V) \subseteq U$$

che significa che $g(f(x)) \to \ell$. □

Teorema 5.12 (collegamento tra limiti di funzione e limiti di successione)**.**
*** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, sia x_0 un punto di accumulazione di A e sia $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Le due seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$;
2. *per ogni successione $a_n \to x_0$ con $a_n \in A \setminus \{x_0\}$ risulta*
$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell.$$

*** *Dimostrazione.* Se per $x \to x_0$ si ha $f(x) \to \ell$ e se $a_n \to x_0$ con $a_n \in A \setminus \{x_0\}$ la successione $f(a_n)$ non è altro che la composizione della funzione f con la funzione $n \mapsto a_n$. Si può quindi applicare il teorema sul limite della funzione composta per ottenere che $f(a_n) \to \ell$.

Supponiamo viceversa di sapere che per ogni successione $a_n \to x_0$ si ha $f(a_n) \to \ell$. Vogliamo mostrare allora che $f(x) \to \ell$. Lo facciamo per assurdo: supponiamo che esista un intorno U di ℓ tale che preso un qualunque intorno V di x_0 non si abbia $f((A \setminus \{x_0\}) \cap V) \subseteq U$. Possiamo considerare per ogni $n \in \mathbb{N}$ degli intorni V_n sempre più piccoli. Ad esempio nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ potremo scegliere $V_n = (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$, nel caso $x_0 = +\infty$ si potrà scegliere $V_n = (n, +\infty]$ e nel caso $x_0 = -\infty$ si sceglierà $V_n = [-\infty, -n)$. Se per assurdo $f((A \setminus \{x_0\} \cap V_n))$ non fosse contenuto in U significherebbe che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe $a_n \in (A \setminus \{x_0\}) \cap V_n$ tale che $f(a_n) \notin U$. Ma allora a_n risulterebbe essere una successione in $A \setminus \{x_0\}$ con limite x_0 (in quanto per ogni intorno di x_0 esiste un N tale che V_N sia contenuto in tale intorno e per ogni $n > N$ si ha $V_n \subseteq V_N$) ma $f(a_n)$ non potrebbe avere limite ℓ (essendo fuori dall'intorno V). Ma questo nega l'ipotesi e conclude quindi la dimostrazione del teorema. □

Esempio 5.13. Sia $f(x) = \sin(x)$. Sappiamo che per ogni successione $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ si ha il limite notevole

$$\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1.$$

Allora possiamo concludere che vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Analogamente, per quanto visto con i limiti di successione, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Valgono anche i seguenti confronti tra ordini di infinito. Se $\alpha > 0$, $a > 1$ si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0.$$

permanenza del segno

Teorema 5.14 (permanenza del segno). *Se $f(x) \geq 0$ in un intorno di x_0 e se esiste il limite* ***

$$\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

allora $\ell \geq 0$. Analogamente se $f(x) \leq 0$ allora $l \leq 0$.

Il risultato vale per allo stesso modo per il limite destro e il limite sinistro.

Dimostrazione. Il risultato si può dimostrare in modo analogo a come abbiamo fatto per i limiti di successione.

Oppure si può ricondurre al risultato sui limiti di successione utilizzando il teorema di collegamento. Infatti se il limite di funzione esiste allora prendendo una successione $x_n \to x_0$ il limite lungo la successione coincide con il limite della funzione e lungo la successione possiamo applicare il teorema della permanenza del segno già dimostrato. □

Teorema 5.15 (operazioni con i limiti di funzione). *Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$$

allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \ell_1 + \ell_2, \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x)-g(x)) = \ell_1 - \ell_2,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2, \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2},$$

sempre che le operazioni utilizzate sul lato destro delle uguaglianze siano definite (cioè a meno di "forme indeterminate"). Inoltre si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = {\ell_1}^{\ell_2}$$

se l'operazione $\ell_1^{\ell_2}$ è definita e se almeno uno tra ℓ_1 e ℓ_2 è diverso da 0 (nonostante 0^0 sia definito la forma 0^0 è, per quanto concerne i limiti, una forma indeterminata).

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato questi risultati per i limiti di successione e potremmo ridimostrarli, con le stesse tecniche, nel contesto dei limiti di funzione. Ma possiamo anche risparmiare le dimostrazioni se utilizziamo invece il teorema di collegamento tra limite di funzione e limite di successione. □

Teorema 5.16 (esistenza del limite per le funzioni monotòne)**.** *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e sia $x_0 \in [-\infty, +\infty]$. Se x_0 è punto di accumulazione di $A \cap (-\infty, x_0)$ allora si ha*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f(A \cap (-\infty, x_0)). \tag{2}$$

Analogamente, se x_0 è punto di accumulazione di $A \cap (x_0, +\infty)$ allora si ha

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf f(A \cap (x_0, +\infty)). \tag{3}$$

Se f è decrescente vale lo stesso risultato con inf *e* sup *scambiati.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo (2), gli altri risultati si ricavano per simmetria. Sia $\ell = \sup f(A \cap (-\infty, x_0))$. Per il teorema 1.26 di caratterizzazione del sup sappiamo che per ogni $x < x_0$, $x \in A$, si ha $\ell \geq f(x)$ e che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_1 < x_0$, $x_1 \in A$ tale che $\ell < f(x_1) + \varepsilon$. Per la monotonia di f se $x \in (x, x_0)$ si ha dunque

$$\ell - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon$$

dunque posto $\delta = x_0 - x_1$ abbiamo verificato la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)\colon |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

□

Possiamo ora esprimere il concetto di *funzione continua* già definito nel capitolo 2.3 mediante i limiti di funzione.

*** **Teorema 5.17.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se x_0 è punto di accumulazione di A. Allora f è continua in x_0 se e solo se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dimostrazione. In base alla definizione 2.26 la funzione f è continua nel punto x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in A\colon |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

mentre la definizione di limite $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$ si espande in

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in A, x \neq x_0\colon |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta.$$

L'unica differenza è che nella definizione di limite c'è la condizione $x \neq x_0$. Ma visto che per $x = x_0$ si ha $|f(x) - f(x_0)| = 0$ quella condizione è inutile e quindi le due definizioni sono equivalenti. □

5.2 DERIVATA

Il potenziale gravitazionale generato dalla terra nello spazio, in un punto a distanza r dal suo centro è dato da:

$$U(r) = -\frac{GM}{r}$$

dove M è la massa della terra e G è la costante di gravitazione universale. La funzione $U(r)$ non è affatto lineare. Se però consideriamo il campo gravitazionale per i punti in prossimità della superficie terrestre, ci aspettiamo un comportamento approssimativamente lineare. Proviamo a esplicitare questa idea.

Supponiamo di trovarci ad altezza h dalla superficie terrestre. Ci troveremo allora a distanza $R+h$ dal centro della terra. Si avrà allora:

$$U(R+h) = -GM\frac{1}{R+h}.$$

Osserviamo ora che si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R+h} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + \frac{R-(R+h)}{R(R+h)} \\
&= \frac{1}{R} - \frac{h}{R(R+h)} \\
&= \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} - \frac{h}{R(R+h)} + \frac{h}{R^2} \\
&= \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} - \frac{hR - h(R+h)}{R^2(R+h)} \\
&= -\frac{h}{R^2} + \frac{1}{R} + \frac{h^2}{R^2(R+h)}.
\end{aligned}$$

Dunque si avrà

$$\begin{aligned}
U(R+h) &= \frac{GM}{R^2}h - \frac{GM}{R} + \omega(h) \\
&= gh + C + \omega(h)
\end{aligned}$$

dove $g = GM/R^2$, C è una costante (irrilevante perché il potenziale può essere definito a meno di una costante) e $\omega(h)$ è una funzione con la proprietà $\omega(h)/h \to 0$ per $h \to 0$. Dunque se h è molto piccolo rispetto a R, il termine $\omega(h)$ è trascurabile rispetto al termine gh (anche se entrambi tendono a zero per $h \to 0$). Questo giustifica l'utilizzo della formula semplificata:

$$U_0(h) = gh$$

da cui l'energia potenziale $E = mgh$ se abbiamo una massa m ad una altezza h sulla superficie terrestre.

linearizzazione

Quello che abbiamo fatto è un procedimento di *linearizzazione*. Il campo gravitazionale è descritto da una funzione non lineare: $-GM/r$. Ma

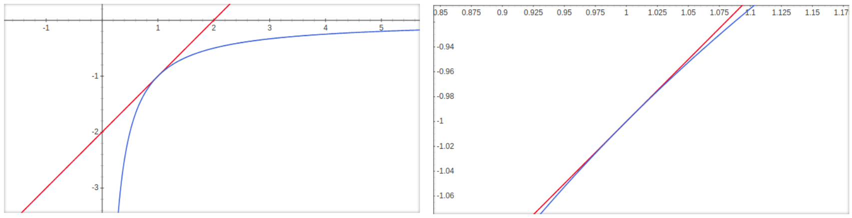


Figura 1: Il grafico del potenziale gravitazionale terrestre. Sull'asse delle x la distanza dal centro della terra in raggi terrestri. Sull'asse delle y il potenziale gravitazionale con unità $C = GM/R$. La pendenza della retta tangente al grafico della curva per $x = R$ è $g = GM/R^2$. Nella figura di destra un ingrandimento in un intorno del raggio terrestre: si nota come il grafico del potenziale risulta quasi indistinguibile dal grafico della retta tangente.

quando ci restringiamo a un piccolo intervallo di valori di r (i valori di r vicini ad R, il raggio della terra) tale funzione risulta quasi indistinguibile, a meno di una costante, dalla funzione lineare gh se $r = R + h$. Le funzioni lineari sono molto più semplici da trattare ed è quindi conveniente, se rimaniamo sulla superficie terrestre, utilizzare quest'ultima formula per il potenziale gravitazionale. Il grafico della funzione lineare che meglio approssima il grafico di una funzione si chiama *retta tangente*. retta tangente
Il suo coefficiente angolare, g nel nostro esempio, si chiama *derivata*. derivata

Una volta introdotte le derivate vedremo che quello che abbiamo determinato è la formula:

$$U(R+h) = U(R) + U'(R)h + \omega(h).$$

*** **Definizione 5.18** (derivata). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di A. Diremo che la funzione f è* derivabile *nel punto x_0 se esiste ed è finito il limite:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

In tal caso denoteremo con $f'(x_0)$ il valore di tale limite che chiameremo derivata *derivata*
della funzione f nel punto x_0.

Se B è l'insieme dei punti di accumulazione di A in cui f risulta essere derivabile, risulta quindi definita la funzione derivata $f'\colon B \to \mathbb{R}$.

Una funzione f si dice essere derivabile se è derivabile in ogni punto del suo dominio. Se $C \subseteq A$ la funzione f si dice essere derivabile su C *se è derivabile in ogni punto dell'insieme C (cioè se $C \subseteq B$).*

Notazioni alternative per denotare la derivata di una funzione:

$$f' = Df = \frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx}.$$

Il rapporto
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
rapporto incrementale

si chiama *rapporto incrementale*. In effetti cambiando variabile e ponendo $x = x_0 + h$ si può scrivere
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
che risulta essere il rapporto dell'incremento della funzione f (a volte denotato con Δf) rispetto all'incremento corrispondente della variabile x (a volte denotato con Δx). Cambiando variabile nel limite, per $h \to 0$ si avrà $x \to x_0$ e quindi
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

***Esempio* 5.19.** Si consideri la funzione $f(x) = 1/x$ definita sull'insieme $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha allora per ogni $x \neq 0$: **

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Risulta quindi che la funzione $1/x$ sia derivabile e la sua derivata è la funzione $-1/x^2$.

Teorema 5.20 (continuità delle funzioni derivabili)**.** *Se f è derivabile nel punto x allora f è anche continua nel punto x.* ***

Dimostrazione. Se f è derivabile in x significa che esiste ed è finito il limite ***
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$
Osserviamo che il denominatore h di tale rapporto tende a zero e quindi affinché il limite sia finito è necessario che anche il numeratore $f(x+h) - f(x)$ tenda a zero. Ovvero: $f(x+h) \to f(x)$ per $h \to 0$ che è equivalente alla continuità di f in x. □

Esempio* 5.21** *(funzione continua ma non derivabile).** La funzione $f(x) = |x|$ è un esempio di funzione continua ma non derivabile. E' infatti facile verificare che nel punto $x_0 = 0$ il limite destro del rapporto incrementale è 1 mentre il limite sinistro è -1. ***

Teorema 5.22 (derivata della funzione composta)**.** *Sia f una funzione derivabile nel punto x_0 e sia g una funzione derivabile nel punto $f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile nel punto x_0 e si ha:* ***
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

*** *Dimostrazione.* Consideriamo la funzione

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0), \\ g'(f(x_0)) & \text{se } y = f(x_0). \end{cases}$$

Si avrà allora

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = G(f(x_0+h)) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{4}$$

infatti se $f(x_0+h) \neq f(x_0)$ abbiamo moltiplicato e diviso per $f(x_0+h) - f(x_0)$ se invece $f(x_0+h) = f(x_0)$ allora anche $g(f(x_0+h)) = g(f(x_0))$ e l'uguaglianza è ancora valida perché sia il lato sinistro che il lato destro si annullano (e il valore assegnato a G risulta in tal caso irrilevante).

Chiaramente quando $h \to 0$ il secondo fattore sul lato destro dell'uguaglianza (4) tende, per definizione, a $f'(x_0)$. Per quanto riguarda il primo fattore osserviamo che $G(y)$, per come è stata definita, risulta essere una funzione continua nel punto $y = f(x_0)$ in quanto

$$\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \to g'(f(x_0))$$

per $y \to f(x_0)$. Ma anche la funzione f è continua nel punto x_0 (in quanto derivabile). Dunque la funzione composta $G(f(x_0+h))$ è continua nel punto $h = 0$. Risulta quindi che $G(f(x_0+h)) \to G(f(x_0)) = g'(f(x_0))$ per $h \to 0$. Dunque il lato destro di (4) ha limite $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ per $h \to 0$, come volevamo dimostrare. □

*** **Teorema 5.23** (derivata della funzione inversa)**.** *Sia f una funzione invertibile derivabile in un punto x_0 e supponiamo che la funzione inversa f^{-1} sia continua in $f(x_0)$. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e vale:*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Chiamato $y_0 = f(x_0)$ la formula può essere anche scritta nella forma:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Se invece $f'(x_0) = 0$ la funzione f^{-1} non è derivabile in $f(x_0)$.

Osserviamo che se f è definita in un intervallo e se è invertibile e continua in tutto l'intervallo allora certamente l'inversa è continua (Esercizio 2.57).

*** *Dimostrazione.* Posto $y_0 = f(x_0)$ consideriamo il rapporto incrementale di f^{-1} nel punto y_0:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}.$$

Per $y \to y_0$ possiamo fare il cambio di variabile $x = f^{-1}(y)$ in quanto avendo assunto che f^{-1} sia continua in $f(x_0)$ sappiamo che se $y \to y_0$ allora $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$. Si ha allora per $y \to y_0$ che $x \to x_0$ e, se $f'(x_0) \neq 0$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Se invece $f'(x_0) = 0$ il rapporto incrementale della funzione inversa ha limite infinito e quindi la funzione inversa non è derivabile in $f(x_0)$. □

Teorema 5.24 (operazioni con le derivate)**.** *Siano f e g due funzioni derivabili in uno stesso punto x_0. Allora le funzioni $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e, se $g(x_0) \neq 0$ anche f/g sono funzioni derivabili in x_0. Nei punti in cui entrambe le funzioni sono derivabili si ha* ***

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (f-g)' = f' - g',$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda la derivata della somma (o della differenza) è sufficiente osservare che il rapporto incrementale della somma (o della differenza) è la somma (o la differenza) dei rapporti incrementali e che il limite della somma (o della differenza) è uguale alla somma (o la differenza) dei limiti. ***

Calcoliamo la derivata del prodotto $f \cdot g$ nel punto x_0. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + (f(x) - f(x_0))g(x_0)}{x - x_0}\\ &= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0).\end{aligned}$$

Passando al limite per $x \to x_0$ ci ricordiamo che $f(x) \to f(x_0)$ in quanto f è continua in x_0 (essendo per ipotesi derivabile). I rapporti incrementali tendono alle derivate e si ottiene quindi il risultato voluto $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.

Per quanto riguarda la derivata del rapporto osserviamo che posto $h(y) = 1/y$ si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot h(g(x)).$$

Dall'esercizio già svolto sappiamo che $h'(y) = -1/y^2$ e dunque possiamo utilizzare le formule per la derivata del prodotto e la derivata della funzione composta per ottenere:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= (f \cdot (h \circ g))'(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot h(g(x_0)) + f(x_0) \cdot h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-1}{g^2(x_0)} g'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

□

** **Teorema 5.25** (derivate delle funzioni elementari). *Per $m, q, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ si ha*

$$D(mx+q) = m, \qquad D|x| = \frac{x}{|x|}, \qquad Dx^n = nx^{n-1},$$

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \qquad D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$De^x = e^x, \qquad D\ln x = 1/x$$

$$D\sin x = \cos x, \qquad D\cos x = -\sin x$$

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$D\,\mathrm{tg}\, x = 1 + \mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad D\,\mathrm{arctg}\, x = \frac{1}{1+x^2},$$

$$D\sinh x = \cosh x, \qquad D\cosh x = \sinh x,$$

$$D\,\mathrm{settsinh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad D\,\mathrm{settcosh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

dove le uguaglianze sono valide (e quindi le funzioni sul lato sinistro sono derivabili) nei punti in cui il lato destro è ben definito. La funzione $\sqrt[n]{x}$ non è derivabile in $x = 0$. Le funzioni $\arcsin x$ *e* $\arccos x$ *non sono derivabili nei punti -1 e 1. La funzione $|x|$ non è derivabile in 0. La funzione* $\mathrm{settcosh}\, x$ *non è derivabile in 1. Le funzioni lineari, potenze con base positiva, potenze con esponente intero, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcotangente sono invece derivabili in tutti i punti in cui sono definite.*

** *Dimostrazione.* Per quanto riguarda le funzioni lineari si ha:

$$(mx+q)' = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h)+q-(mx+q)}{h} = \lim_{h\to 0} m = m.$$

Ricordando che la derivata è un limite e che il limite in un punto dipende solo dai valori della funzione in un intorno del punto, possiamo affermare che la derivata del valore assoluto $|x|$ coincide con la derivata di x

cioè 1 sugli $x > 0$ e coincide con la derivata di $-x$ sugli $x < 0$. Dunque $D|x| = x/|x|$ se $x \neq 0$. Se $x = 0$ i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale di $|x|$ tendono rispettivamente a 1 e -1 e quindi la derivata non esiste.

Dimostriamo che $Dx^n = nDx^{n-1}$ per $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, per induzione su n. Per $n = 1$ abbiamo $x^n = x^1$ è lineare e quindi dalla formula precedente $Dx^1 = 1 = 1 \cdot x^0$. Supponendo di sapere che $Dx^n = nx^{n-1}$ si ha, applicando la regola di derivazione del prodotto:

$$Dx^{n+1} = Dx \cdot x^n = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$$

dimostrando dunque il passo induttivo. Ricordando la formula di derivazione del rapporto possiamo trovare la formula per le potenze con esponente intero negativo:

$$Dx^{-n} = D\frac{1}{x^n} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}.$$

La derivata della radice n-esima si trova con la formula di derivazione della funzione inversa x^n, che può essere applicata se $x \neq 0$:

$$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Osserviamo che se n è dispari la formula è valida anche per $x < 0$. La derivata della radice quadrata si ottiene ponendo $n = 2$.

Per quanto riguarda la derivata dell'esponenziale ci riconduciamo ad un limite notevole:

$$De^x = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

La derivata del logaritmo si ottiene come derivata della funzione inversa dell'esponenziale:

$$D\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Possiamo quindi calcolare la derivata delle potenze con base positiva e esponente reale qualunque:

$$Dx^\alpha = De^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x} D(\alpha \ln x) = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Per quanto riguarda le funzioni trigonometriche sin e cos ci ricordiamo dei limiti notevoli:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \frac{1-\cos h}{h^2} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Applicando le formule di addizione si ha

$$\begin{aligned}
D\sin x &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x)\frac{\cos h - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin h}{h} = \cos(x).
\end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned}
D\cos x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\cos h - 1}{h} - \sin(x)\frac{\sin h}{h} = -\sin(x)
\end{aligned}$$

La funzioni arcsin è definita come l'inversa della restrizione della funzione sin all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Nell'intervallo aperto $(-\pi/2, \pi/2)$ la funzione sin ha derivata positiva e dunque risulta che la funzione inversa (che sappiamo essere continua) è derivabile in $(-1,1)$ e la sua derivata è

$$D\arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si ha infatti $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ se $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Analogamente la funzione arccos è definita come l'inversa della restrizione di cos all'intervallo $[0,\pi]$ e si ha quindi, per $x \in (-1,1)$

$$D\arccos x = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 \arccos x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si ha infatti $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ se $y \in [0,\pi]$.

Nei punti $x=1$ e $x=-1$ le funzioni arcsin e arccos non sono invece derivabili.

Per la funzione tangente possiamo utilizzare la formula di derivazione del rapporto:

$$\begin{aligned}
D\operatorname{tg} x &= D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Usando la formula della derivata della funzione inversa si ha

$$D\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Per quanto riguarda le funzioni iperboliche le derivate di sinh e cosh si riconducono immediatamente alla derivata dell'esponenziale, utilizzando la definizione (13). Le derivate delle funzioni inverse settsinh e settcosh si ottengono dalla formula per la derivata della funzione inversa e utilizzando le relazioni $\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$ e, per $x > 0$, $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$:

$$D \operatorname{settsinh} x = \frac{1}{\cosh(\operatorname{settsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\operatorname{settsinh} x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$D \operatorname{settcosh} x = \frac{1}{\sinh(\operatorname{settcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{settcosh} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

□

Teorema 5.26 (Fermat)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Se $x_0 \in (a,b)$ è un punto di massimo o minimo per f allora $f'(x_0) = 0$.* ***

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo suppore che x_0 sia un punto di massimo per f. Sappiamo che ***

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Visto che x_0 è un punto dell'intervallo aperto (a,b) la funzione f è definita in un intorno destro di x_0 e quindi possiamo restingere il limite ai valori $x > x_0$ ottenendo:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Visto che x_0 è un punto di massimo per f sappiamo che $f(x) - f(x_0) \le 0$. Essendo $x - x_0 > 0$ l'intero rapporto incrementale risulta essere non positivo. Dunque, per il teorema della permanenza del segno, possiamo concludere che $f'(x_0) \le 0$.

Ma possiamo anche restringere la funzione ad un intorno sinistro di x_0 e osservare che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ma ora il numeratore è, come prima, non positivo mentre il denominatore $x - x_0$ è negativo. Dunque il rapporto incrementale stavolta è non negativo e quindi, per la permanenza del segno, $f'(x_0) \ge 0$.

Abbiamo scoperto quindi che $f'(x_0) \le 0$ e $f'(x_0) \ge 0$ da cui deduciamo $f'(x_0) = 0$. □

Utilizzando le definizioni seguenti il teorema di Fermat si può enunciare dicendo che ogni punto di massimo o minimo relativo interno al dominio di una funzione in cui la funzione è derivabile è necessariamente un punto critico. In particolare per determinare massimi e minimi assoluti e relativi di una funzione sarà sufficiente esaminare i punti di frontiera, i punti di non derivabilità e i punti critici.

Definizione 5.27 (punti notevoli). *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A$ e $f'(x_0) = 0$ diremo che x_0 è un* punto critico *o* punto stazionario *di f.* *punto critico*

Se $x_0 \in A$ ed esiste un intorno U di x_0 per cui x_0 risulta essere un punto di minimo (rispettivamente di massimo) per f ristretta ad U diremo che x_0 è un punto di minimo relativo *o* minimo locale *(rispettivamente* massimo relativo *o* massimo locale*). Per contrapposizione i punti di massimo e minimo su tutto il dominio A vengono anche chiamati massimo/minimo* assoluto *di f.* *minimo relativo*

Diremo che $x_0 \in A$ è un punto di flesso *per f se f è derivabile in un intorno di x_0 e x_0 è un punto di massimo o minimo relativo per f'. Nel punto x_0 la retta tangente ha equazione $y = r(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Se x_0 è minimo per f' risulta che $f(x) - r(x)$ è crescente quindi $f(x) \geq r(x)$ per $x \geq x_0$ e $f(x) \leq r(x)$ per $x \leq x_0$ (il grafico della funzione attraversa la retta tangente da sotto a sopra) mentre se x_0 è massimo per f' risulta che $f(x) \leq r(x)$ per $x \geq x_0$ e $f(x) \geq r(x)$ per $x \leq x_0$ (il grafico della funzione attraversa la tangente da sopra a sotto). Se la funzione f non è derivabile in x_0 ma il limite del rapporto incrementale esiste ed è infinito, diremo che x_0 è un* flesso verticale*. In tale punto la retta tangente è verticale e il grafico della funzione attraversa tale retta.* *punto di flesso* *flesso verticale*

Sia $x_0 \in A$ un punto in cui la funzione f è continua ed esistono i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale (che si chiamano derivata destra *e* derivata sinistra*)*

$$m^{\pm} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Se $m^+ \neq m^-$ chiaramente f non è derivabile in x_0. Se entrambi m^+ ed m^- sono finiti diremo che x_0 è un punto angoloso *in quanto le due semirette tangenti in x_0 (da destra e da sinistra) formano un angolo non piatto. Se $m^+ = -m^- = +\infty$ oppure se $m^+ = -m^- = -\infty$ diremo che il punto x_0 è un* punto di cuspide *(c'è una semiretta tangente verticale).* *punto angoloso* *punto di cuspide*

*** **Teorema 5.28** (Rolle). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $[a,b]$ e derivabile su (a,b). Se $f(a) = f(b)$ allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.* *Rolle*

*** *Dimostrazione.* Essendo f una funzione continua possiamo applicare il teorema di Weiestrass per dedurre che f ha massimo e minimo sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Se il punto di massimo o il punto di minimo sta nell'intervallo aperto (a,b) possiamo applicare il teorema di Fermat per ottenere che la derivata di f si annulla in tale punto.

In caso contrario sia il punto di massimo che il punto di minimo sono estremi dell'intervallo, cioè sono uguali ad a o a b. Ma visto che $f(a) = f(b)$ i valori massimo e minimo coincidono e quindi la funzione è costante. Ma in tal caso $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$. □

Lagrange **Teorema 5.29** (Lagrange). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b). Allora esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che* ***

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria: ***

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Per verifica diretta si osserva che

$$g(b) = g(a).$$

La funzione g soddisfa quindi le ipotesi del teorema di Rolle e dunque esisterà $x_0 \in (a,b)$ tale che $g'(x_0) = 0$. Ma si osserva che

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e dunque se $g'(x_0) = 0$ si ottiene il risultato desiderato. □

criteri di monotonia **Teorema 5.30** (criteri di monotonia). *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Sia $J = (\inf I, \sup I)$ l'intervallo aperto con gli stessi estremi di I. Supponiamo che f sia continua su I e derivabile su J. Allora valgono i seguenti criteri:* ***

1. $(\forall x \in J\colon f'(x) \geq 0) \iff$ *f è crescente (su tutto I);*
2. $(\forall x \in J\colon f'(x) \leq 0) \iff$ *f è decrescente (su tutto I);*
3. $(\forall x \in J\colon f'(x) = 0) \iff$ *f è costante (su tutto I);*
4. $(\forall x \in J\colon f'(x) > 0) \implies$ *f è strettamente crescente (su tutto I);*
5. $(\forall x \in J\colon f'(x) < 0) \implies$ *f è strettamente decrescente (su tutto I).*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto le implicazioni da sinistra verso destra. ***

Per la prima, se f non fosse crescente ci dovrebbero essere due punti $a, b \in I$ tali che $a < b$ ma $f(a) > f(b)$. Dunque si avrebbe

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0.$$

Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[a,b]$ si troverebbe un punto $x \in (a,b)$ tale che $f'(x) < 0$. Chiaramente $(a,b) \subseteq J$ e quindi questo contraddice l'ipotesi $f'(x) \geq 0$.

La seconda implicazione (per le funzioni decrescenti) si dimostra in maniera analoga cambiando verso alle disuguaglianze.

Anche la terza implicazione si dimostra tramite il teorema di Lagrange in modo analogo alle precedenti. Oppure basta osservare che se

$f'(x) = 0$ allora valgono contemporaneamente $f'(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$ quindi mettendo insieme le prime due implicazioni si ottiene che f è contemporaneamente crescente e decrescente dunque è costante.

Per la quarta implicazione si procede come per la prima. Per assurdo si avrebbero $a < b$ con $f(b) \leq f(a)$. Ma allora

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$$

e applicando il teorema di Lagrange si troverebbe un punto $x \in (a, b)$ con $f'(x) \leq 0$, contro l'ipotesi $f'(x) > 0$.

La quinta implicazione si dimostra in maniera analoga cambiando verso alle disuguaglianze.

Vediamo ora le implicazioni da destra verso sinistra. Per la prima, supponiamo che f sia crescente e prendiamo $x \in J$. Allora è chiaro che per ogni $h > 0$ si avrà $f(x + h) \geq f(x)$ e dunque

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Facendo il limite per $h \to 0^+$ si ottiene $f'(x)$ e, per la permanenza del segno, dovra essere $f'(x) \geq 0$.

In maniera analoga (invertendo le disuguaglianze) si dimostra la seconda implicazione.

La terza discende dalle prime due oppure, più semplicemente, dalle regole di derivazione, in quanto la derivata di una costante è zero. □

***Esempio* 5.31.** La funzione $f(x) = 1/x$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, è derivabile e la derivata $f'(x) = -1/x^2$ è ovunque negativa. La funzione f è quindi strettamente decrescente separatamente sui due intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$ sui quali possiamo applicare il criterio di monotonia. Ma non è decrescente su tutto il suo dominio in quanto, ad esempio, $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. Questo esempio mostra che nei criteri di monotonia l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è fondamentale.

***Esercizio* 5.32.** Determinare base e altezza di una lattina cilindrica di volume $33ml$ che a parità di volume ha la minima superficie totale.

Svolgimento. Sia V il volume, S l'area della superficie totale, h l'altezza e r il raggio di base del cilindro. Sappiamo che

$$V = \pi h r^2 S = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Ricavando h dalla prima equazione e sostituendo nella seconda otteniamo

$$S = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

La funzione $S(r)$ è definita e continua su $(0, +\infty)$ e si ha $S(r) \to +\infty$ per $r \to 0^+$ e anche per $r \to +\infty$. Dunque S ammette minimo per il teorema di Weierstrass generalizzato. Per trovare il minimo basterà calcolare la derivata

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

e trovare i punti critici

$$4\pi r^3 = 2V$$

da cui

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 3.74cm$$
$$h = \frac{V}{\pi r^2} \approx 7.49cm.$$

□

***Esercizio* 5.33.** Risolvere l'equazione

$$e^x = x^3. \tag{5}$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x - x^3.$$

Dobbiamo trovare gli zeri di f (cioè i punti x tali che $f(x) = 0$). Si ha

$$f'(x) = e^x - 3x^2,$$
$$f''(x) = e^x - 6x,$$
$$f'''(x) = e^x - 6.$$

Si ha $f'''(x) \gtreqless 0$ se $x \gtreqless \ln 6$. Applicando i criteri di monotonia possiamo quindi dedurre che f'' (la cui derivata è f''') è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, \ln 6]$ e strettamente crescente sull'intervallo $[\ln 6, +\infty)$. Di conseguenza $\ln 6$ è un punto di minimo per f'' su tutto $\mathbb{R}$. Possiamo rappresentare sinteticamente queste proprietà in forma di tabella, come segue.

x		$\ln 6$	
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Cerchiamo di determinare il segno di f'' agli estremi degli intervalli su cui f'' è monotona. Per $x \to -\infty$ si ha $f''(x) \to +\infty$, per $x \to +\infty$ si ha $f''(x) \to +\infty$ e per $x = \ln 6$ si ha $f(\ln 6) = 6 - 6\ln 6 < 0$. Dunque sui due intervalli $(-\infty, \ln 6]$ e $[\ln 6, +\infty]$ la funzione f'' è strettamente monotona e cambia segno. Per il teorema degli zeri tale funzione si annulla in ognuno dei due intervalli e per la stretta monotonia si annulla in un solo punto su ogni intervallo. Dunque esistono x_1 e x_2 tali che $x_1 < \ln 6 < x_2$ e $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$. Dalla monotonia di f'' possiamo quindi dedurre i segni di f'' e quindi l'andamento di f'.

x		x_1		x_2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Nel precedente diagramma si intende che i punti x_1 e x_2 sono massimo e minimo *relativo* in quanto x_1 è massimo per f' sull'intervallo $(-\infty, x_2]$ e x_2 è minimo di f sull'intervallo $[x_1, +\infty)$.

Come prima vogliamo determinare il segno di f' guardando il segno agli estremi dei suoi intervalli di monotonia. Per $x \to -\infty$ si ha $f'(x) \to -\infty$, per $x \to +\infty$ si ha $f'(x) \to +\infty$. Siamo anche in grado di determinare il segno di $f'(x_1)$ e $f'(x_2)$ sfruttando le proprietà algebriche di tali numeri. Sappiamo infatti che x_1 e x_2 risolvono l'equazione $e^x = 6x$. Dunque

$$f'(x_1) = e^{x_1} - 3x_1^2 = 6x_1 - 3x_1^2 = 3x_1(2 - x_1)$$

e lo stesso vale per $f'(x_2)$.

Ora possiamo capire dove si trovano x_1 e x_2 rispetto ai valori 0 e 2 guardando semplicemente il segno di $f''(0) = 1 > 0$ e $f''(2) = e^2 - 12 < 0$. Visto che $f''(2) < 0$ guardando la tabella dei segni di f'' possiamo concludere che $x_1 < 2 < x_2$. Analogamente visto che $f''(0) > 0$ e $0 < 2 < x_2$ possiamo dedurre che $0 < x_1$. Dunque $0 < x_1 < 2 < x_2$ e

$$f'(x_1) = 3x_1(2 - x_1) > 0, \qquad f'(x_2) = 3x_2(2 - x_2) < 0.$$

Conoscendo l'andamento di f' possiamo costruire una tabella dei segni di f' dove inseriamo anche i limiti a $+\infty$ e $-\infty$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+$

In base al teorema degli zeri e alla stretta monotonia possiamo quindi affermare che f' si annulla in esattamente tre punti x_3, x_4 e x_5 tali che $x_3 < x_1 < x_4 < x_2 < x_5$. Con l'andamento di f' possiamo quindi fare una tabella dei segni di f'.

x		x_3		x_4		x_5	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Nuovamente vogliamo determinare il segno di f negli estremi degli intervalli di monotonia: $-\infty$, x_3, x_4, x_5, $+\infty$. In $-\infty$ e $+\infty$ è facile osservare che $f(x)$ tende a $+\infty$. Nei punti x_3, x_4 e x_5 possiamo sfruttare il fatto che tali punti, essendo zeri di f', soddisfano l'equazione $e^x = 3x^2$ dunque

$$f(x_3) = e^{x_3} - x_3^3 = 3x_3^2 - x_3^3 = x_3^2(3 - x_3).$$

Lo stesso vale per $f(x_4)$ e $f(x_5)$. Valutiamo f' nei punti 0 e 3 per determinare il segno dell'espressione precedente. Si ha $f'(0) = 1 > 0$ e

$f'(3) = e^3 - 27 < 0$. Guardando la tabella dei segni di f' si può quindi affermare che $x_3 < 0 < x_1 < x_4 < 3 < x_5$. Dunque

$$\begin{aligned} f(x_3) &= x_3^2(3 - x_3) > 0, \\ f(x_4) &= x_4^2(3 - x_4) > 0, \\ f(x_5) &= x_5^2(3 - x_5) < 0. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la seguente tabella per l'andamento di f

x	$-\infty$		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\searrow$	$+$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+$

In base al teorema degli zeri e alla stretta mononotia possiamo affermare che f si annulla in due soli punti x_6 e x_7 con $x_4 < x_6 < x_5 < x_7$. Raccogliendo tutte le informazioni precedenti e osservando che $f(\ln 6) < 0$ sapendo che $f(3) < 0$ e valutando $f'(4) < 0$ e $f(5) > 0$ si possono ordinare tutti i capisaldi trovati in precedenza:

$$x_3 < 0 < x_1 < x_4 < \ln 6 < x_6 < 2 < x_2 < x_5 < 4 < x_7 < 5.$$

Possiamo in particolare affermare che l'equazione (5) ha le due soluzioni x_6 e x_7 dove i numeri x_6 e x_7 sono univocamente determinati dall'essere le uniche soluzioni di (5) rispettivamente negli intervalli $[\ln 6, 1]$ e $[3, 4]$ dove la funzione f è strettamente monotona e cambia segno. Approssimazioni numeriche di x_6 e x_7 possono essere trovate mediante il metodo di bisezione. □

***Esempio* 5.34.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Osserviamo che la funzione f è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è un intervallo ma è unione di due intervalli disgiunti: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Possiamo allora applicare i criteri di monotonia separatamente ai due intervalli ottenendo che $f(x)$ è costante su ognuno dei due intervalli. Dunque esisteranno c_1 e c_2 tali che

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{se } x > 0, \\ c_2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Possiamo determinare facilmente c_1 e c_2 osservando che

$$\begin{aligned} c_1 &= f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} \\ c_2 &= f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

In effetti la funzione f pur avendo derivata nulla non è costante ma solo *localmente costante*.

***Esempio* 5.35.** Consideriamo la funzione $f(x) = x^3$ la cui derivata è $f'(x) = 3x^2$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) \geq 0$ dunque possiamo dedurre che f è crescente. Scelto invece $I = [0, +\infty)$ l'intervallo aperto corrispondente è $J = (0, +\infty)$. Osserviamo che su J si ha $f'(x) > 0$ quindi possiamo concludere che f è strettamente crescente su tutto I. Lo stesso vale per l'intervallo $(-\infty, 0]$. Mettendo insieme le due cose possiamo concludere che $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ nonostante che sia $f'(0) = 0$. Questo mostra che una funzione strettamente monotona può avere derivata nulla in un punto.

Più in generale è facile osservare che se f è monotona ma non strettamente monotona significa che ci sono due punti a e b per cui $f(a) = f(b)$. Ma se f è monotona allora per ogni $x \in [a, b]$ si deve avere $f(x) = f(a) = f(b)$ (ad esempio: se f è crescente si dovrebbe avere $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ ma se $f(a) = f(b)$ necessariamente $f(x) = f(a) = f(b)$). Dunque f risulterebbe essere costante su $[a, b]$ e in particolare avremmo una infinità più che numerabile di punti in cui la derivata si annulla. Questo significa che se $f'(x) \geq 0$ su un intervallo e se $f'(x) = 0$ su un numero finito o anche numerabile di punti o, ancora, su un insieme di punti con parte interna vuota, allora comunque f è strettamente crescente. Ragionamento analogo vale naturalmente anche per le funzioni decrescenti.

***Esercizio* 5.36.** Dimostrare che

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

***Esercizio* 5.37.** Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 2e^{x-1} - x^2.$$

Si mostri che f è bigettiva e che la funzione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in tutti i punti tranne il punto 1 dove ha un flesso verticale. Si calcoli $(f^{-1})'(2/e)$.

Svolgimento. Risulta

$$f'(x) = 2e^{x-1} - 2x, \qquad f''(x) = 2e^{x-1} - 2.$$

Dunque $f''(x) > 0$ per $x > 1$ e $f''(x) < 0$ per $x < 1$. Dunque per i criteri di monotonia f' è strettamente crescente su $[1, +\infty)$ e strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$. Visto che $f'(1) = 0$ risulta quindi che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ solo per $x = 1$. Dunque f è crescente per il criterio di monotonia ma anche strettamente crescente perché se fosse crescente ma non strettamente ci dovrebbe essere un intero intervallo in cui f' si annulla. Dunque f è iniettiva. Visto che $f(x) \to \pm\infty$ per

$x \to \pm\infty$ si ha $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$, $\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$ e per il teorema dei valori intermedi otteniamo che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dunque f è anche suriettiva.

La funzione inversa di f è continua per il Teorema 2.56 ed è derivabile nei punti corrispondenti ai punti in cui f ha derivata non nulla. L'unico punto in cui f ha derivata nulla è $x = 1$ e visto che $f(1) = 1$ risulta che $f^{-1}(y)$ è derivabile per ogni $y \neq 1$ e vale

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2e^{x-1} - 2x}.$$

Osservando che $f(0) = 2/e$ si trova quindi

$$(f^{-1})'(1/e) = \frac{1}{2/e} = \frac{e}{2}.$$

□

Teorema 5.38 (proprietà di Darboux)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora la derivata soddisfa la proprietà dei valori intermedi: per ogni $x, y \in I$ e per ogni m se $f'(x) \leq m \leq f'(y)$ allora esiste $z \in I$ tale che $f'(z) = m$.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in I$ con $x < y$ e sia m compreso tra $f'(x)$ e $f'(y)$. E' sufficiente trovare una coppia di punti $a, b \in I$ tali che

$$R(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

perché in tal caso, per il teorema di Lagrange, dovrà esistere un punto $z \in (a, b)$ tale che $f'(z) = m$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che sia $f'(x) \leq m \leq R(x, y)$. Il caso in cui $m \geq R(x, y)$ si risolve infatti in maniera analoga.

Consideriamo la funzione

$$F(t) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } t = x; \\ R(x,t) & \text{se } t \in (x, y]. \end{cases}$$

La funzione $F\colon [x, y] \to \mathbb{R}$ è continua in $(x, y]$ in quanto $R(x, t)$ è continua (essendo f continua anche il rapporto incrementale lo è). E' anche continua in x in quanto $f'(x)$ per definizione è il limite del rapporto incrementale, dunque

$$F(x) = f'(x) = \lim_{t \to x} R(x,t) = \lim_{t \to x} F(t).$$

Allora la funzione $F(t)$ assume i valori intermedi tra $F(x) = f'(x)$ e $F(y) = R(x, y)$. Ci sarà dunque un punto $t \in [x, y]$ per cui $F(t) = m$ e per il teorema di Lagrange esisterà un punto $z \in [x, t]$ tale che $f'(z) = R(x, t) = F(t) = m$. □

** ***Esempio 5.39** (funzione derivabile con derivata non continua).* La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, $f'(0) = 0$ ma il limite

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

non esiste (e dunque $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è continua in $x = 0$).

Dimostrazione. La funzione $x^2 \sin(1/x)$ è derivabile infinite volte su tutto il suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in quanto composizione di funzioni elementari derivabili infinite volte. Dunque, per la località della derivata, anche la funzione f è derivabile infinite volte su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x \neq 0$ possiamo quindi calcolare $f'(x)$ utilizzando le regole di derivazione

$$f'(x) = D\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Verifichiamo ora che f è continua e derivabile anche in 0. Si ha infatti

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$$

e dunque $f'(0) = 0$. Osserviamo però che $f'(x)$ non ammette limite per $x \to 0$ in quanto per $x \to 0$ si ha $2x\sin(1/x) \to 0$ ma il limite di $\cos(1/x)$ invece non esiste. Dunque $f'(x)$ è la somma di una funzione che ha limite zero e di una funzione il cui limite non esiste per $x \to 0$. Dunque $f'(x)$ non ammette limite per $x \to 0$. □

5.3 CONVESSITÀ

** **Definizione 5.40** (funzione convessa). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice essere* convessa *se per ogni $x, y \in I$ e per ogni $t \in [0,1]$ si ha* *funzione convessa*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Analogamente diremo che f è concava *se vale la disuguaglianza inversa:* *funzione concava*

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$$

(o, equivalentemente, se $-f$ è convessa).

Osserviamo che la retta del piano passante per i punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ può essere parametrizzata in maniera uniforme per $t \in \mathbb{R}$ da

$$(1-t)(x, f(x)) + t(y, f(y)) = ((1-t)x + ty, (1-t)f(x) + tf(y)).$$

Chiaramente per $t = 0$ si ottiene il punto $(x, f(x))$ per $t = 1$ il punto $(y, f(y))$ e per $t \in [0, 1]$ il segmento congiungente tali punti. La condizione di convessità della funzione f corrisponde quindi a richiedere che ogni corda (segmento) che unisce due punti del grafico si trovi "al di sopra" del grafico della funzione.

Definizione 5.41 (insieme convesso)**.** *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice essere* convesso *se dati due punti qualunque $a, b \in E$ l'intero segmento $[a, b] = \{(1-t)a + tb \colon t \in [0, 1]\}$ è contenuto in E.* *

convesso

Teorema 5.42 (epigrafico delle funzioni convesse)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora sono equivalenti:*

1. *I è un intervallo e f è convessa;*
2. *l'*epigrafico di *f ovvero l'insieme*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in I, y \geq f(x)\}$$

è convesso.

epigrafico di f

Per le funzioni concave sarà il sottografico $\{(x, y) \colon y \leq f(x)\}$ *ad essere convesso.*

Dimostrazione. Supponiamo che I sia un intervallo e f sia convessa. Per dimostrare che l'epigrafico E è convesso consideriamo due punti $a, b \in E$ e un qualunque punto p sul segmento $[a, b]$. Se $a = (x_a, y_a)$, $b = (x_b, y_b)$, $p = (x_p, y_p)$ allora esiste un $t \in [0, 1]$ tale che $x_p = (1-t)x_a + tx_b$ e $y_p = (1-t)y_a + ty_b$. Visto che $a, b \in E$ sappiamo che $y_a \geq f(x_a)$ e $y_b \geq f(x_b)$. Dunque necessariamente si ha

$$y_p \geq (1-t)f(x_a) + tf(y_b).$$

Ma essendo f convessa si ha:

$$(1-t)f(x_a) + tf(y_b) \geq f((1-t)x_a + tx_b) = f(x_p).$$

Dunque $y_p \geq f(x_p)$ che significa $p \in E$.

Viceversa supponiamo di sapere che E è convesso. Siano $x, y \in I$ punti qualunque. Allora i punti $a = (x, f(x))$ e $b = (y, f(y))$ sono certamente punti di E e quindi l'intero segmento $[a, b]$ deve essere contenuto in E. Dunque per ogni $t \in [0, 1]$ il punto $p = ((1-t)x + ty, (1-t)f(x) + tf(y))$ deve stare in E. In primo luogo deve quindi essere $(1-t)x + ty \in I$ e se questo è vero per ogni $t \in [0, 1]$ significa che I è un intervallo. In secondo luogo se $p \in E$ significa che

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$$

che corrisponde alla definizione di funzione convessa. □

* **Lemma 5.43** (rapporto incrementale di una funzione convessa). *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$. Dati $x, y \in I$ con $x \neq y$ definiamo il* rapporto incrementale *di f come:*

$$R(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Allora sono condizioni equivalenti:

1. *f è convessa;*
2. *per ogni $x, y, z \in I$ se $x < y < z$ si ha $R(x,y) \leq R(y,z)$;*
3. *per ogni $x, y, z \in I$ se $x < y < z$ si ha $R(x,y) \leq R(x,z)$;*
4. *per ogni $x, y, z \in I$ se $x < y < z$ si ha $R(x,z) \leq R(y,z)$;*
5. *la funzione $R(x,y)$ è crescente in ognuna delle due variabili.*

Dimostrazione. Attenzione: il lemma risulta ovvio se si utilizza la giusta interpretazione geometrica (il rapporto incrementale è la pendenza della corda corrispondente). Quella che segue è la traduzione algebrica di quanto è geometricamente ovvio ma risulta inevitabilmente pesante e più difficilmente comprensibile.

Siano $x, y, z \in I$ con $x < y < z$. Posto $t = (y - x)/(z - x)$ si ha $y = (1 - t)x + tz$, $y - x = t(z - x)$, $z - y = (1 - t)(z - x)$. Si ha allora

$$\begin{aligned} R(x,z) - R(x,y) &= \frac{f(z) - f(x)}{z - x} - \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= t\frac{f(z) - f(x)}{y - x} - \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= \frac{tf(z) + (1 - t)f(x) - f(y)}{y - x} \end{aligned}$$

La condizione di convessità di f è

$$f(y) \leq (1 - t)f(x) + tf(z)$$

ed è quindi equivalente alla condizione $R(x,z) \leq R(x,y)$. Dunque le condizioni 1 e 3 sono equivalenti.

Ma con una verifica diretta si osserva che

$$R(x,z) = tR(x,y) + (1 - t)R(y,z)$$

da cui si ottiene

$$R(y,z) - R(x,z) = t[R(y,z) - R(x,y)]$$

oppure anche

$$R(x,z) - R(x,y) = (1 - t)[R(y,z) - R(x,y)].$$

Risulta quindi che le quantità

$$R(y,z) - R(x,y), \qquad R(x,z) - R(x,y), \qquad R(y,z) - R(x,z)$$

hanno tutte lo stesso segno. E quindi le condizioni 2, 3 e 4 sono tra loro equivalenti (se vale una delle tre valgono tutte e tre).

Se valgono le tre condizioni 2, 3 e 4 è facile verificare che la funzione $R(x,y)$ è crescente in entrambe le variabili. Innanzitutto per simmetria, visto che $R(x,y) = R(y,x)$, è sufficiente verificare che $R(x,y)$ è crescente nella seconda variabile y per ogni x fissato. Quindi dato $z > y$ bisogna mostrare che $R(x,z) \geq R(x,y)$. Abbiamo allora tre possibilità a seconda che sia $x < y$ oppure $y < x < z$ oppure $z < x$. Nel primo caso si ha $x < y < z$ e dunque la disuguaglianza $R(x,y) \leq R(x,z)$ corrisponde alla condizione 3. Nel secondo caso si ha $y < x < z$ e la condizione $R(x,y) \leq R(x,z)$ si può scrivere come $R(y,x) \leq R(x,z)$ che è, riordinando opportunamente le variabili, la condizione 2. Se, infine, $y < z < x$ la condizione $R(x,y) \leq R(x,z)$ si può scrivere $R(y,x) \leq R(z,x)$ che, riordinando le variabili, è la condizione 4.

Viceversa (e infine) se la funzione $R(x,y)$ è crescente in entrambe le variabili in particolare è crescente nella seconda variabile e quindi se $x < y < z$ si ha $R(x,y) \leq R(x,z)$. Risulta quindi che la condizione 5 implica la 3 e quindi tutte le altre condizioni. □

Teorema 5.44. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto I. Allora sono equivalenti:* ***

1. *f è convessa;*
2. *per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $x \in I$ si ha*

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(geometricamente: il grafico della funzione sta sopra la retta tangente);

3. *f' è crescente.*

Analogamente per le funzioni concave si avrà che il grafico "sta sotto" la retta tangente e che la derivata è decrescente.

Dimostrazione. Osserviamo che **

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} R(x_0, x).$$

Se f è convessa allora, per il lemma, il rapporto incrementale $R(x_0,x)$ è crescente e quindi $f'(x_0) = \inf_{x > x_0} R(x_0, x)$. In particolare $f'(x_0) \leq R(x_0, x)$ per ogni $x > x_0$. In maniera analoga si trova $f'(x_0) \geq R(x_0,x)$ se $x < x_0$. In ogni caso risulta quindi che per ogni x si ha

$$(R(x_0,x) - f'(x_0))(x - x_0) \geq 0$$

ovvero
$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$
Dunque la condizione 1 implica la 2.

Se vale la condizione 2, dati $x, y \in I$ si ha
$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x - y)$$
se scambiamo x e y e cambiamo di segno ambo i membri si ottiene invece
$$f(x) - f(y) \leq f'(x)(x - y)$$
mettendo insieme le due disuguaglianze, se ora supponiamo che sia $x > y$ otteniamo proprio $f'(x) \geq f'(y)$ cioè f' è crescente (condizione 3).

Supponiamo ora di sapere che f' è crescente e supponiamo per assurdo che la funzione f non sia convessa. In base al lemma precedente dovrebbero allora esistere tre punti $x < y < z$ tali che $R(x, y) > R(y, z)$. Per il teorema di Lagrange dovrebbe allora esistere un punto $c \in (x, y)$ tale che $f'(c) = R(x, y)$ e un punto $d \in (y, z)$ tale che $f'(d) = R(y, z)$ ma allora $f'(c) > f'(d)$ nonostante sia $c < d$ e dunque f' non poteva essere crescente. □

*** **Corollario 5.45** (criterio di convessità tramite derivata seconda)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte (cioè f è derivabile e anche f' è derivabile). Allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Analogamente f è concava se e solo se $f'' \leq 0$.*

*** *Dimostrazione.* Per il criterio precedente f è convessa se e solo se f' è crescente. Per il criterio di monotonia f' è crescente se e solo se $f'' \geq 0$. Considerazioni analoghe valgono per la concavità. □

Teorema 5.46. *Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$. Sia $f \colon [a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa in (a, b) e continua in a. Allora f è convessa su tutto $[a, b)$. Risultato analogo vale per funzioni definite su intervalli aperti a sinistra $(a, b]$ e aperti da ambo i lati (a, b).*

Dimostrazione. Dati $x, y \in [a, b)$ dobbiamo mostrare che per ogni $t \in [0, 1]$ vale
$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$
Per ipotesi sappiamo che la disuguaglianza è valida se $x, y \in (a, b)$. Dobbiamo quindi dimostrare la disuguaglianza solamente nel caso $x = a$ e $y \in (a, b)$. Dato qualunque $t \in (0, 1)$ e presa una successione $x_k \to a$ con $x_k \in (a, b)$ definiamo t_k in modo che sia $z = (1 - t)x + ty = (1 - t_k)x_k + t_k y$ cioè:
$$t_k = \frac{x - x_k + t(y - x)}{y - x_k}.$$
Siccome $t_k \to t$ per $k \to +\infty$ se $t \in (0, 1)$ per k abbastanza grande anche $t_k \in (0, 1)$. Inoltre per la convessità in (a, b) sappiamo che vale
$$f((1 - t_k)x_k + t_k y) \leq (1 - t_k)f(x_k) + t_k f(y)$$

e passando a limite per $k \to +\infty$, dalla continuità di f in x si ottiene

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

come volevamo dimostrare. Per $t = 0$ e $t = 1$ la disuguaglianza è sempre banalmente verificata. □

***Esempio* 5.47.** La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è definita su $[0, +\infty)$ ma è derivabile solamente in $(0, +\infty)$. La sua derivata è $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}/2$ e la derivata seconda è $f''(x) = -x^{-\frac{3}{2}}/4 < 0$. Dunque la funzione è concava sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$. Ma essendo continua possiamo concludere che f è concava su tutto il dominio $[0, +\infty)$.

Teorema 5.48 (continuità delle funzioni convesse)**.** *Siano $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ con $a < b$. Sia $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in (a, b)$ e siano $y, z \in (a, b)$ con $y < x_0 < z$. Per il lemma sui rapporti incrementali sappiamo che per ogni $x \in (y, z)$ si ha

$$R(x_0, y) \leq R(x_0, x) \leq R(x_0, z).$$

In particolare esiste una costante C tale che

$$|R(x_0, x)| \leq C, \qquad \forall x \in (y, z).$$

Moltiplicando per $|x - x_0|$ si ottiene allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$$

e per $x \to x_0$ il lato destro tende a zero e quindi per confronto anche il lato sinistro deve tendere a zero. Dunque $f(x) \to f(x_0)$ e f è continua in x_0. □

Teorema 5.49 (combinazioni baricentriche)**.** *Se f è una funzione convessa definita su un intervallo I, dati $x_1, \dots, x_n \in I$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ e $\lambda_k \geq 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ allora* *

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Per le funzioni concave vale la disuguaglianza inversa.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Nel caso $n = 1$ si ha $\lambda_1 = 1$ e i due lati della disuguaglianza sono effettivamente uguali. Supponendo il teorema dimostrato per un certo n, procediamo a dimostrarlo per $n + 1$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\
&= (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Visto che
$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$$
si ha
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$
Dunque, per ipotesi induttiva si ha allora
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k).$$
Usando di nuovo la convessità di f con $t = \lambda_{n+1}$ si ha
$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\le (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\le (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k).
\end{aligned}$$
come volevamo dimostrare. □

* ***Esempio* 5.50** *(disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica).* Osserviamo che la funzione $f(x) = \ln x$ è concava, infatti si ha $f''(x) = -1/x^2 < 0$. Dunque, per il teorema precedente, se $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, $\lambda_k \ge 0$ si ha
$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \ge \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln x_k.$$
Facendo l'esponenziale di ambo i membri si ottiene
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ge \prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}.$$
Nel caso particolare $\lambda_k = 1/n$ si ottiene la disuguaglianza tra *media aritmetica* (AM per gli anglofoni) e *media geometrica* (GM): media aritmetica/-geometrica
$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

***Esercizio* 5.51** *(subadditività delle funzioni concave).* Sia $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione concava con $f(0) \ge 0$. Allora f è subadditiva cioè:
$$f(x+y) \le f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \ge 0.$$

Dimostrazione. Se $x = y = 0$ la disuguaglianza è ovvia. Altrimenti $x + y > 0$ e si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{y}{x+y} \cdot 0 + \frac{x}{x+y} \cdot (x+y)\right) \\ &\geq \frac{y}{x+y} f(0) + \frac{x}{x+y} f(x+y) \geq \frac{x}{x+y} f(x+y). \end{aligned}$$

Scambiando x con y e sommando si ottiene:

$$f(x) + f(y) \geq \frac{x}{x+y} f(x+y) + \frac{y}{x+y} f(x+y) = f(x+y).$$

□

5.4 teorema di de l'hospital

Cauchy **Teorema 5.52** (Cauchy). *Siano $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue su tutto $[a,b]$ e derivabili su (a,b). Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora $g(b) \neq g(a)$ ed esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che* **

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione ausiliaria **

$$h(x) = (g(b) - g(a)) f(x) - (f(b) - f(a)) g(x).$$

Per verifica diretta si osserva che

$$h(b) = g(b) f(a) - f(b) g(a) = h(a).$$

Dunque h verifica le ipotesi del teorema di Rolle ed esiste dunque un punto $x_0 \in (a,b)$ per cui $h'(x_0) = 0$. Essendo però

$$h'(x) = (g(b) - g(a)) f'(x) - (f(b) - f(a)) g'(x)$$

si ottiene

$$(g(b) - g(a)) f'(x_0) = (f(b) - f(a)) g'(x_0).$$

Per ipotesi sappiamo che $g'(x_0) \neq 0$. Ma necessariamente anche $g(b) - g(a) \neq 0$ perché altrimenti potremmo applicare il teorema di Rolle alla funzione g e ottenere che g' si annulla in un punto di (a,b), cosa che abbiamo escluso per ipotesi. Dunque possiamo dividere ambo i membri per $(g(b) - g(a))$ e per $g'(x_0)$ per ottenere l'uguaglianza enunciata nel teorema. □

Teorema 5.53 (de l'Hospital 0/0). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ un punto di accumulazione di I e siano $f, g\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili. Supponiamo che sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$. Se* ***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

e se esiste (finito o infinito) il limite

$$\ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

** *Dimostrazione.* Bisognerà distinguere diversi casi a seconda che x_0 sia finito o infinito e che sia un punto interno o un estremo dell'intervallo I. Fatta la dimostrazione nel primo caso tutti gli altri si riconducono ad esso.

Caso 1: supponiamo che sia $I = [x_0, b]$. In questo caso possiamo estendere le funzioni f e g anche nel punto x_0 ponendo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (x_0, b] \\ 0 & \text{se } x = x_0, \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (x_0, b] \\ 0 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

Visto che per ipotesi $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$ risulta che $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ siano funzioni continue su tutto l'intervallo $[x_0, b]$ inoltre, sempre per ipotesi, sono derivabili nell'intervallo $(x_0, b]$ visto che l'estensione per $x = x_0$ non modifica le derivate negli altri punti. In particolare le funzioni estese soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy in ogni intervallo $[x_0, x]$ con $x \in (x_0, b]$, dunque possiammo affermare che per ogni x esiste $c(x) \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)} = \frac{\tilde{f}'(c(x))}{\tilde{g}'(c(x))} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Ma essendo $x_0 < c(x) < x$ per $x \to x_0$ si ha $c(x) \to x_0$ e quindi, tramite un cambio di variabile (Teorema 5.11) possiamo affermare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Caso 2: supponiamo sia I qualunque e x_0 finito. Visto che le funzioni sono definite su $I \setminus \{x_0\}$ possiamo sempre supporre $x_0 \in I$. Inoltre visto che i limiti dipendono solo dai valori in un intorno del punto x_0 possiamo sempre supporre che I sia un intervallo chiuso e limitato. Nel passo precedente abbiamo fatto il caso in cui x_0 era l'estremo inferiore di I, ma allo stesso modo si può fare il caso in cui x_0 è l'estremo superiore. Se invece x_0 fosse un punto interno di I possiamo considerare separatamente il limite destro e sinistro e ricondurci ai casi in cui x_0 era un estremo.

Caso 3: supponiamo sia $x_0 = +\infty$. In tal caso l'intervallo I contiene un intevallo $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso vogliamo ricondurci al primo caso tramite il cambio di variabile $t = 1/x$. Posto $F(t) = f(1/t)$

e $G(t) = g(1/t)$ si osserva che F e G sono definite sull'intervallo $(0, 1/a]$, tendono a zero per $t \to 0^+$ sono derivabili,

$$F'(t) = -\frac{f'(1/t)}{t^2}, \qquad G'(t) = -\frac{g'(1/t))}{t^2}$$

e risulta quindi

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Quindi applicano il teorema nel caso già dimostrato possiamo affermare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \ell.$$

Caso 4: il caso $x_0 = -\infty$ si svolge in maniera analoga al caso precedente. □

Proposizione 5.54 (criterio di derivabilità). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$. Se il limite della derivata* **

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = m$$

esiste ed è finito la funzione f è derivabile anche in x_0 e vale $f'(x_0) = m$.

Dimostrazione. Consideriamo il limite del rapporto incrementale **

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Visto che la funzione è continua in x_0 si ha $f(x) - f(x_0) \to 0$ per $x \to x_0$ e chiaramente si ha anche $x - x_0 \to 0$ come richiesto nelle ipotesi del teorema di De L'Hospital. Se facciamo il limite del rapporto delle derivate si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = m$$

e dunque applicando il teorema si trova che anche il limite del rapporto incrementale è uguale ad m e dunque $f'(x_0) = m$. □

La proposizione precedente dice che la derivata di una funzione in un punto non può avere un valore diverso dal suo limite, se tale limite esiste. Esistono però funzioni derivabili la cui derivata non è continua, come abbiamo visto nell'esempio 5.39 in quanto il limite della derivata potrebbe non esistere.

de l'Hospital **Teorema 5.55** (de l'Hospital $\cdot/\infty$). *Siano $a, b \in [-\infty, +\infty]$ con $a < b$. Siano $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili. Se* *

$$\lim_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty,$$

se $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$ *e se esiste il limite (finito o infinito)*

$$\ell = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora si ha

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Risultato analogo si ha facendo i limiti per $x \to b^-$ *invece che per* $x \to a^+$ *e di conseguenza anche nel caso in cui la funzione sia definita su un intervallo "bucato"* $f\colon (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *e si considerino i limiti "pieni" per* $x \to x_0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non si abbia

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Allora, per il teorema di collegamento tra limiti di funzione e limiti di successione, deve esistere una successione $a_k \in (a,b)$, $a_k \to a$ tale che non si abbia

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(a_k)}{g(a_k)} = \ell.$$

Se la successione $f(a_k)/g(a_k)$ è limitata allora applicando il teorema di Bolzano Weierstrass sappiamo esistere una sottosuccessione di a_k convergente ad un valore $m \neq \ell$ (se tutte le sottosuccessioni convergessero ad ℓ l'intera successione convergerebbe ad ℓ). Se invece $f(a_k)/g(a_k)$ non è limitata possiamo estrarre una sottosuccessione che converge a $+\infty$ oppure a $-\infty$. In ogni caso esiste una successione, che chiameremo ancora a_k, ed esiste $m \in \bar{\mathbb{R}}$ tale che

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{f(a_k)}{g(a_k)} = m \neq \ell.$$

Consideriamo ora un intorno U di m e un intorno V di ℓ tali che $U \cap V = \emptyset$. Siccome $f'(x)/g'(x) \to \ell$ per $x \to a$ esiste un $c \in (a,b)$ tale che per ogni $x \in (a,c)$ si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in V.$$

Consideriamo allora il seguente rapporto incrementale

$$\frac{f(a_k) - f(x)}{g(a_k) - g(x)} = \frac{\frac{f(a_k)}{g(a_k)} - \frac{f(x)}{g(a_k)}}{1 - \frac{g(x)}{g(a_k)}}$$

e osserviamo che il lato destro tende a m per $k \to +\infty$ in quanto $f(a_k)/g(a_k) \to m$ e visto che $|g(a_k)| \to +\infty$ si ha $f(x)/g(a_k) \to 0$ e $g(x)/g(a_k) \to 0$. Dunque esisterà un k per cui il lato destro sta nell'intorno U di m. Al lato sinistro possiamo invece applicare il teorema di Cauchy e trovare quindi un punto $y \in (a_k, c)$ per cui tale lato risulti uguale a $f'(y)/g'(y)$. Ma visto che $y \in (a,c)$ si dovrà avere $f'(y)/g'(y) \in V$. Questo è assurdo in quanto $U \cap V = \emptyset$. □

5.5 CLASSI DI REGOLARITÀ

Definizione 5.56 (funzioni di classe C^k). *Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ denotiamo con $\mathbb{R}^A$ l'insieme di tutte le funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo $C^k(A) \subseteq \mathbb{R}^A$ nel modo seguente:* **

C^k

1. *se $k = 0$ poniamo*
$$C^0(A) = \{f \in \mathbb{R}^A \colon f \text{ continua}\}.$$
2. *se $k > 0$ definiamo induttivamente*
$$C^k(A) = \{f \in \mathbb{R}^A \colon f \text{ derivabile e } f' \in C^{k-1}(A)\}.$$

Chiaramente se $j \geq k$ si ha $C^j(A) \subseteq C^k(A)$ dunque $C^k(A)$ è una famiglia decrescente (rispetto all'inclusione insiemistica) ed ha senso definire:

C^∞

$$C^\infty(A) = \{f \in \mathbb{R}^A \colon \forall k \in \mathbb{N} \colon f \in C^k(A)\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(A).$$

$f^{(j)}$

Le funzioni $f \in C^k(A)$ sono derivabili k volte. Utilizziamo la notazione $f^{(j)}$ per denotare la j-esima derivata di una funzione f. Dunque avremo
$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(1)} = f', \qquad f^{(2)} = f'', \dots$$

Abbiamo già osservato che $\mathbb{R}^A$ è uno spazio vettoriale reale. Gli spazi $C^k(A)$ per $k = 0, \dots, \infty$ sono una famiglia decrescente di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^A$. Infatti sappiamo che la combinazione lineare di funzioni continue è continua e che la combinazione lineare di funzioni derivabili è derivabile.

E' importante osservare che $C^1(A)$ non coincide con l'insieme delle funzioni derivabili su A. Infatti abbiamo già visto nell'esempio 5.39 che esistono funzioni derivabili la cui derivata non è continua e quindi tali funzioni, pur essendo derivabili, non sono di classe C^1.

funzione lipschitziana

Definizione 5.57 (funzioni lipschitziane). *Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice essere* lipschitziana *(o anche L-lipschitziana se vogliamo mettere in evidenza la dipendenza da L) se esiste $L > 0$ tale che* **
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in A.$$
La più piccola costante L per la quale è soddisfatta la precedente relazione si chiama costante di Lipschitz *di f.*

costante di Lipschitz

Teorema 5.58 (criterio di Lipschitz). *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz L. Se f è derivabile in un punto $x \in A$ allora $|f'(x)| \leq L$. Viceversa se $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile definita su un intervallo I e se esiste L tale che per ogni $x \in I$ si ha $|f'(x)| \leq L$ allora f è lipschitziana.* **

Dimostrazione. Se f è Lipschitziana significa che il rapporto incrementale è limitato. Cioè esiste $L > 0$ tale che

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le L \qquad \forall x, y \in A.$$

Dunque la derivata, che è il limite del rapporto incrementale, se esiste è anch'essa limitata dalla stessa costante: $|f'(x)| \le L$ per ogni $x \in A$.

Viceversa se la derivata è limitata $|f'(z)| \le L$ per ogni $z \in I$ e se $x, y \in I$ sono punti qualunque, allora, per il teorema di Lagrange, il rapporto incrementale di f è uguale alla derivata in un punto $z \in (x, y)$:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(z)| \le L.$$

e dunque la funzione è L lipschitziana:

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|.$$

□

Definizione 5.59 (funzioni Hoelderiane)**.** *Sia $\alpha > 0$. Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice essere α-Hoelderiana se esiste una costante $C > 0$ tale che* *funzione hoelderiana*

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha. \tag{6}$$

** **Definizione 5.60** (uniforme continuità)**.** *Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice essere* uniformemente continua *se* *uniforme continuità*

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x, y \in A\colon |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Teorema 5.61. *Ogni funzione lipschitziana è 1-Hoelderiana (e viceversa). Ogni funzione α-Hoelderiana è uniformemente continua. Ogni funzione uniformemente continua è continua. Ogni funzione α-Hoelderiana con $\alpha > 1$ ha derivata nulla.*

Dimostrazione. Le prime tre affermazioni seguono direttamente dalle definizioni. Per l'ultima osservazione si noti che se $\alpha > 1$ nella disuguaglianza (6) si può dividere per $|x - y|$ e ottenere quindi che il rapporto incrementale tende a zero se $y \to x$. □

Definizione 5.62 (modulo di continuità)**.** *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo il* modulo di continuità *di f come la funzione $M\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ definita da* *modulo di continuità*

$$M(r) = \sup\{|f(x) - f(y)|\colon x, y \in A, |x - y| \le r\}.$$

Teorema 5.63 (proprietà del modulo di continuità)**.** *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ e sia $M\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ il suo modulo di contintuità. La funzione $M(r)$ è crescente;*

La funzione f è uniformemente continua se e solo se

$$\lim_{r\to 0} M(r) = 0.$$

La funzione f è lipschitziana se e solo se esiste L tale che

$$M(r) \leq Lr.$$

La funzione f è α-Hoelderiana se e solo se esiste C tale che

$$M(r) \leq Cr^\alpha.$$

Dimostrazione. Osserviamo che la condizione

$$M(r) \leq c$$

è equivalente a

$$\forall x, y \in A \colon |x - y| \leq r \implies |f(x) - f(y)| \leq c.$$

La condizione $M(r) \to 0$ per $r \to 0$ significa

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \delta > 0 \colon \forall r > 0 \colon r < \delta \implies M(r) < \varepsilon$$

e diventa quindi la condizione di uniforme continuità.

Le condizioni di lipschitzianità e di α-hoelderianità risultano pure immediatamente. □

Teorema 5.64 (restrizione / incollamento di funzioni uniformemente continue)**.** *Sia $f \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Se $B \subseteq A$ la restrizione $f_{|B}$ di f a B è anch'essa uniformemente continua.*

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli tali che $I \cap J \neq \emptyset$. Sia $f \colon I \cup J \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f_{|I}$ e $f_{|J}$ sono uniformemente continue allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. La prima parte, sulla restrizione di una funzione uniformemente continua, deriva direttamente dalla definizione: se una qualunque proprietà vale per ogni $x, y \in A$ allora a maggior ragione vale per ogni $x, y \in B$ quando $B \subseteq A$.

Vediamo la seconda parte dell'enunciato: supponiamo f sia uniformemente continua su I e su J. Sia dato $\varepsilon > 0$ e siano δ_1 e δ_2 i valori di δ dati dalle condizioni di uniforme continuità di f rispettivamente su I e su J. Consideriamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Siano ora x, y punti qualunque di $I \cup J$ con $|x - y| < \delta$.

Si possono allora avere due casi possibili: x e y stanno nello stesso intervallo (I o J) oppure stanno uno in I e l'altro in J. Nel primo caso essendo $\delta < \delta_1$ e $\delta < \delta_2$ l'uniforme continuità di f su I e su J garantisce che valga in ogni caso $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Nel secondo caso deve esistere un punto $z \in I \cap J$ che sia un punto intermedio tra x e y. Allora usando la disuguaglianza triangolare:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \varepsilon + \varepsilon.$$

si ottiene dunque (salvo rimpiazzare ε con $\varepsilon/2$) anche in questo caso la stima voluta. □

*** **Teorema 5.65** (Heine-Cantor). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua.* *Heine-Cantor*

*** *Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Allora f soddisfa la negazione della proprietà

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x, y \in A\colon |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

che è

$$\exists \varepsilon > 0\colon \forall \delta > 0\colon \exists x, y \in A\colon |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Dunque dato $\varepsilon > 0$ che soddisfa la precedente proprietà possiamo prendere $\delta = 1/k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ottenendo quindi due successioni x_k, y_k tali che

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \qquad \text{e} \qquad |f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon.$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass esisterà una sottosuccessione convergente $x_{k_j} \to c$. Visto che $|x_k - y_k| \to 0$ si dovrà avere anche $y_{k_j} \to c$. Ma allora, per la continuità di f:

$$\left|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})\right| \to |f(c) - f(c)| = 0$$

in contraddizione con la condizione $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$. □

Teorema 5.66 (dell'asintoto). *Sia $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua tale che* *teorema dell'asintoto*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Allora anche f è uniformemente continua.

In particolare se f ha un asintoto obliquo *ovvero se esistono $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ tali che* *asintoto obliquo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

allora f, se è continua, è uniformemente continua.

Risultato analogo vale per le funzioni definite su intervalli del tipo $(-\infty, a]$ (facendo i limiti a $-\infty$) e quindi per funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ (facendo i limiti sia a $+\infty$ che a $-\infty$).

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > a$ tale che $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/3$ per ogni $x \geq M$. D'altra parte la funzione f, per il teorema di Heine-Cantor, è uniformemente continua su $[a, M + 1]$ e dunque esiste $\delta_1 > 0$ tale che presi $x, y \in [a, M + 1]$ con $|x - y| < \delta_1$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. D'altra parte g è uniformemente continua su $[M, +\infty)$ e quindi esiste δ_2 tale che dati $x, y \in [M, +\infty)$ con $|x - y| < \delta_2$ si ha $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/3$. Ma in quest'ultimo caso si ha:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Posto dunque $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$ scelti comunque $x, y \in [a, +\infty)$ con $|x - y| < \delta$ siamo certamente in uno dei due casi precedenti e quindi, in ogni caso, si ottiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, come dovevamo dimostrare.

Nel caso particolare $g(x) = mx + q$ si osserva semplicemente che g è uniformemente continua in quanto è L-lipschitziana con $L = |m|$. □

5.6 FORMULA DI TAYLOR

Definizione 5.67 (polinomio di Taylor). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte nel punto x_0. Il* polinomio di Taylor *della funzione f, di ordine n, centrato in x_0 è il polinomio:* ***

polinomio di Taylor

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Nel caso particolare in cui sia $x_0 = 0$ il polinomio di Taylor viene anche chiamato *polinomio di MacLaurin*.

polinomio di MacLaurin

Teorema 5.68 (caratterizzazione polinomio di Taylor). *Il polinomio di Taylor di una funzione f, di ordine n, centrato in x_0 è l'unico polinomio P di grado non superiore ad n tale che* ***

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad \forall k \in \{0, \dots, n\}.$$

Dimostrazione. E' facile mostrare, per induzione su j che per ogni $j \in \mathbb{N}$ la derivata j-esima di $(x - x_0)^k$ è:

$$D^j (x - x_0)^k = \begin{cases} \frac{k!}{(k-j)!}(x - x_0)^{k-j} & \text{se } j \le k, \\ 0 & \text{se } j > k. \end{cases}$$

Ogni polinomio di grado non superiore ad n può essere scritto nella forma:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

(basti notare che se $P(x)$ è un polinomio anche $Q(t) = P(x_0 + t)$ è un polinomio) e le sue derivate sono:

$$P^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k \cdot \frac{k!}{(k-j)!} \cdot (x - x_0)^{k-j}.$$

Per $x = x_0$ l'unico addendo non nullo è quello con $k = j$, dunque

$$P^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k.$$

Dunque si ha $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ se e solo se $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$ cioè se P è il polinomio di Taylor di f. □

***Osservazione* 5.69** *(polinomio di Taylor della derivata).* Se P_n è il polinomio di Taylor centrato in x_0 di ordine n per f, allora si ha

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot k(x-x_0)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}}{j!}(x-x_0)^j. \end{aligned}$$

Dunque si verifica che P_n' è il polinomio di Taylor di ordine $n-1$ per f'. In breve: il polinomio di Taylor di ordine $n-1$ della derivata è la derivata del polinomio di Taylor di ordine n della funzione.

Viceversa se

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di ordine n della derivata $f'(x)$, allora il polinomio di Taylor di ordine $n+1$ di f sarà[1]

$$P_{n+1}(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \cdot (x-x_0)^{k+1} \tag{7}$$

in quanto

$$\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} = \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{(k+1)!} = \frac{a_k \cdot k!}{(k+1)!} = \frac{a_k}{k+1}.$$

** **Teorema 5.70** (formula di Taylor con resto di Lagrange). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$, $f \in C^{n+1}(I)$. Sia P il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0. Per ogni $x \in I$ esiste y con $|y-x_0| \le |x-x_0|$ tale che* *Taylor con resto di Lagrange*

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

* *Dimostrazione.* Posto $R(x) = f(x) - P(x)$ osserviamo che essendo $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n$, per gli stessi k si ha $R^{(k)}(x_0) = 0$. In particolare $R(x) = R(x) - R(x_0)$ è l'incremento di R sull'intervallo $[x_0, x]$ (supponiamo senza perdita di generalità che sia $x > x_0$). Analogamente osserviamo che $(x-x_0)^{n+1}$ è anch'essa una funzione che si annulla in x_0 e dunque $(x-x_0)^{n+1}$ è l'incremento della funzione sullo stesso intervallo.

1 Chiameremo questa una *primitiva* del polinomio dato, nel prossimo capitolo, quando parleremo del calcolo integrale.

Dunque possiamo applicare il teorema di Cauchy alle funzioni $R(x)$ e $(x-x_0)^{n+1}$ sull'intervallo $[x_0, x]$ per ottenere l'esistenza di un punto $x_1 \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R'(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n}.$$

Di nuovo applichiamo il teorema di Cauchy alle funzioni $R'(x)$ e $(n+1)(x-x_0)^n$ sull'intervallo $[x_0, x_1]$ per ottenere l'esistenza di un punto $x_2 \in (x_0, x_1)$ tale che

$$\frac{R'(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n} = \frac{R''(x_2)}{(n+1)n(x_2-x_0)^{n-1}}.$$

Possiamo iterare il procedimento ottenendo al passo k:

$$\begin{aligned}&\frac{R^{(k)}(x_k)}{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)(x_k-x_0)^{n+1-k}}\\ &\quad= \frac{R^{(k+1)}(x_{k+1})}{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1)(x_{k+1}-x_0)^{n-k}}.\end{aligned}$$

Proseguendo fino al passo n-esimo si ottiene dunque un punto $x_{n+1} \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Ma $R^{(n+1)} = f^{(n+1)} - P^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ in quanto P è un polinomio di grado al più n e quindi la sua derivata $(n+1)$-esima è nulla. Perciò otteniamo, ponendo $y = x_{n+1}$:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Esempio* 5.71** *(calcolo delle cifre di π).** Vogliamo applicare la formula di Taylor con resto di Lagrange alla funzione $f(x) = \arcsin(x)$ fino all'ordine 6. Per calcolare le derivate del arcoseno osserviamo che

$$\begin{aligned}f'(x) &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\ f''(x) &= x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

e possiamo congetturare che ogni derivata si possa scrivere nella forma

$$f^{(k)}(x) = Q_k(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}-k}, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{8}$$

con $Q_k(x)$ un opportuno polinomio. Possiamo dimostrare (8) per induzione. Per $k = 1$ la formula è verificata con $Q_1(x) = 1$. Supponendo la formula valida per un certo k, possiamo farne la derivata:

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= Q_k'(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}-k} + \left(\frac{1}{2}-k\right)(-2x)Q_k(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}-k-1}\\ &= \left[(1-x^2)Q_k'(x) + (2k-1)xQ_k(x)\right] \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}-k}\end{aligned}$$

dunque posto

$$Q_{k+1}(x) = (1-x^2)Q_k'(x) + (2k-1)xQ_k(x)$$

è chiaro che se Q_k è un polinomio anche Q_{k+1} lo è. Possiamo anzi utilizzare la relazione precedente per calcolare velocemente i polinomi $Q_1, \dots, Q_6$:

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= 1 \\
Q_2(x) &= (1-x^2)\cdot 0 + x \cdot 1 = x \\
Q_3(x) &= (1-x^2)\cdot 1 + 3x \cdot x = 2x^2 + 1 \\
Q_4(x) &= (1-x^2)\cdot (4x) + 5x \cdot (2x^2+1) = 6x^3 + 9x \\
Q_5(x) &= (1-x^2)\cdot (18x^2+9) + 7x \cdot (6x^3+9x) = 24x^4 + 72x^2 + 9 \\
Q_6(x) &= (1-x^2)\cdot (96x^3+144x) + 9x \cdot (24x^4+72x^2+9) \\
&= 120x^5 + 600x^3 + 225x.
\end{aligned}$$

Osserviamo che da (8) si ottiene $f^{(k)}(0) = Q_k(0)$ in quanto $1 - x^2 = 1$ per $x = 0$. Dunque si ha

$$f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 1, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 9.$$

La formula di Taylor con resto di Lagrange ci dice quindi che per ogni $x > 0$ esiste c con $0 < c < x$ tale che

$$f(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6.$$

In particolare per $x = 1/2$, ricordando che $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ avremo che

$$\frac{\pi}{6} = f(1/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 8} + \frac{3}{40\cdot 32} + \varepsilon$$

con

$$\varepsilon = \frac{f^{(6)}(c)}{2^6 \cdot 6!}$$

per un qualche c compreso tra 0 e $1/2$. Ovvero:

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + 6\varepsilon = \frac{2009}{640} + 6\varepsilon.$$

Ma visto che $0 < c < \frac{1}{2}$, si ha

$$0 \le Q_6(c) \le 120c^5 + 600c^3 + 225c < \frac{120}{2^5} + \frac{600}{2^3} + \frac{225}{2} = \frac{6120}{2^5} < 200$$

da cui

$$f^{(6)}(c) = \frac{Q_6(c)}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}} < \frac{200}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^{11}} = \frac{200\cdot 2^{11}}{\sqrt{3}\cdot 3^5} < 2000$$

e quindi

$$0 < 6\varepsilon = \frac{6Q_6(c)}{2^6 \cdot 6!} < \frac{2000}{2^6 \cdot 6!} < \frac{28}{640}$$

che ci garantisce quindi che

$$\frac{2009}{640} < \pi < \frac{2037}{640}$$

cioè

$$3.139 < \pi < 3.183$$

Teorema 5.72 (formula di Taylor con resto di Peano). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$, $f \in C^{n-1}(I)$ con $f^{(n-1)}$ derivabile in x_0 (in particolare è sufficiente che sia $f \in C^n(I)$). Sia P il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0. Allora si ha* ***

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

ovvero, scritto in maniera più espressiva:

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n). \tag{9}$$

Viceversa se $P(x)$ è un polinomio di grado che non supera n e vale la formula (9) *allora P è il polinomio di Taylor di f.*

Dimostrazione. Osserviamo che il limite ***

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

è una forma indeterminata $0/0$ in quanto essendo f e P funzioni continue, ed essendo $P(x_0) = f(x_0)$ si ha $f(x) - P(x) \to f(x_0) - P(x_0) = 0$ per $x \to x_0$. Ovviamente anche il denominatore $(x - x_0)^n \to 0$ per $x \to x_0$.

Potremo quindi applicare il teorema di De L'Hospital se riusciamo a determinare il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}.$$

Anche in questo caso osserviamo che il limite è una forma indeterminata $0/0$ e dunque nuovamente potremo utilizzare De L'Hospital. Iterando il procedimento $n - 1$ volte arriveremo al limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)}.$$

Osserviamo ora che $P^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$ dunque il limite sopra esposto è uguale a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right).$$

Ma quello che compare al primo addendo non è altro che il rapporto incrementale della funzione $f^{(n-1)}$ nel punto x_0. Il suo limite è quindi uguale a $f^{(n)}(x_0)$ che è proprio la quantità che poi viene sottratta. Il risultato di quest'ulimo limite è quindi 0 e, a cascata, tutti i limiti precedenti sono uguali a zero.

Vogliamo ora mostrare che c'è un unico polinomio che soddisfa (9). Supponiamo che Q sia un polinomio di grado non superiore ad n che soddisfi, come fa P:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Allora si avrebbe, per $x \to x_0$,

$$\frac{Q(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{Q(x) - f(x)}{(x - x_0)^n} - \frac{P(x) - f(x)}{(x - x_0)^n} \to 0. \tag{10}$$

Posto $R(t) = Q(x_0 + t) - P(x_0 + t)$ risulta che R è un polinomio di grado non superiore ad n tale che

$$\lim_{t \to 0} \frac{R(t)}{t^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{Q(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Per concludere che $Q = P$ basta dimostrare che R è il polinomio nullo. Posto

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

supponiamo per assurdo che ci sia almeno un coefficiente $a_k \neq 0$. Sia anzi a_m il primo coefficiente diverso da zero, cosicché si abbia

$$R(t) = \sum_{k=m}^{n} a_k t^k, \qquad a_m \neq 0.$$

Ma allora possiamo scrivere

$$\frac{R(t)}{t^n} = \frac{1}{t^{n-m}} \left[a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k t^{k-m} \right]$$

e visto che tutti gli addendi $a_k t^{k-m}$ tendono a zero per $t \to 0$ se fosse $a_m \neq 0$ il lato destro di questa uguaglianza tenderebbe a $\pm\infty$, assurdo. $\square$

Definizione 5.73 (coefficiente binomiale reale). *Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ definiamo* *

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}.$$

Osserviamo che se $\alpha \in \mathbb{N}$ questa definizione coincide con la definizione 1.19.

Teorema 5.74 (sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari). *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si hanno, per $x \to 0$ le relazioni riportate nella tabella 1.* **

Dimostrazione. Per definizione, il coefficiente del termine x^k nel polinomio di Taylor di $f(x)$ non è altro che $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ Se $f(x) = e^x$ allora $f^{(k)}(x) = e^x$ e dunque $f^{(k)}(0) = 1$. Si trovano quindi i coefficienti $a_k = 1/k!$. **

Se $f(x) = \sin x$ si ha $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ e $f^{(4)}(x) = \sin x$... e poi le derivate si ripetono ogni quattro iterazioni. Valutando le derivate in $x = 0$ si ottiene dunque la sequenza $0, 1, 0, -1, \dots$ che si ripete indefinitamente. Si ottiene dunque lo sviluppo indicato. Discorso analogo si può fare per $f(x) = \cos x$.

Se $f(x) = (1+x)^\alpha$ si ottiene $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ e così via... Valutando le derivate in $x = 0$ si ottiene la sequenza: 1, α, $\alpha(\alpha-1)$, $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots$ da cui, dividendo per $k!$, si ottiene che i coefficienti del polinomio di Taylor risultano essere i coefficienti binomiali $\binom{\alpha}{k}$.

Se $f(x) = \ln(1+x)$ osserviamo che $f(0) = 0$ poi si ha $f'(x) = (1+x)^{-1}$ e le derivate successive coincidono dunque con le derivate di $(1+x)^\alpha$ con $\alpha = -1$: i coefficienti (a parte il primo che è nullo) concidono quindi con i coefficienti binomiali

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-k)}{k!} = (-1)^k.$$

Similmente se $f(x) = \operatorname{arctg} x$ osserviamo che $f(0) = 0$ e $f'(x) = (1+x^2)^{-1}$. Per quanto già visto sappiamo che si ha

$$(1+y)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k y^k + o(y^n)$$

da cui sostituendo $y = x^2$ si ha

$$f'(x) = (1+x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

Utilizzando la seconda parte del Teorema 5.72 (formula di Taylor con resto di Peano), abbiamo verificato che vale l'equazione (9) per il polinomio $P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$. Dunque $P(x)$ è il polinomio di Taylor di grado $2n$ di $f'(x)$. Ma il polinomio di Taylor della derivata è la derivata del polinomio di Taylor, quindi possiamo utilizzare (7) per ottenere il polinomio di Taylor riportato in tabella.

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \\
&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\
\operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5).
\end{aligned}
$$

Tabella 1: sviluppi di Taylor, per $x \to 0$, di alcune funzioni elementari. Si veda il teorema 5.74

.

Metodo analogo si usa per $f(x) = \arcsin x$, osservando che

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2k-1)}{2}}{k!}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!} x^{2k} + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} + o(x^{2n})
\end{aligned}$$

abbiamo trovato il polinomio di Taylor di $f'(x)$ e utilizzando (7) si ottiene la formula riportata in tabella.

Per quanto riguarda la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ ci limitiamo a calcolare esplicitamente i primi termini:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{tg} x & f(0) &= 0 \\
f^{(1)} &= 1 + f^2 & f^{(1)}(0) &= 1 \\
f^{(2)} &= 2ff' & f^{(2)}(0) &= 0 \\
f^{(3)} &= 2(f')^2 + 2ff'' & f^{(3)}(0) &= 2 \\
f^{(4)} &= 4f'f'' + 2f'f'' + 2ff''' = 6f'f'' + 2ff''' & f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)} &= 6(f'')^2 + 6f'f''' + 2f'f''' + 2ff^{(4)} \\
&= 6(f'')^2 + 8f'f''' + 2ff^{(4)} & f^{(5)}(0) &= 16.
\end{aligned}$$

Si ottengono quindi i coefficienti: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2/3! = 1/3$, $a_4 = 0$, $a_5 = 16/5! = 2/15$. □

5.7 OPERAZIONI CON I SIMBOLI DI LANDAU

Le notazioni di Landau o-piccolo e O-grande sono comodissime per l'elaborazione di stime asintotiche. Bisogna però fare molta attenzione a come queste notazioni vengono usate, perché altrimenti si rischia di fare degli errori grossolani. Alcuni risultati controintuitivi sono ad esempio:

1. $o(x) - o(x) = o(x)$ (e non 0),
2. $o(x^2) = o(x)$ ma non $o(x) = o(x^2)$.

Il secondo esempio, in particolare, ci dice che il simbolo di uguaglianza in realtà non è utilizzato in modo appropriato in questo contesto, perché non gode della proprietà simmetrica. In questa sezione proponiamo una definizione formalmente precisa dell'oggetto o-piccolo (e O-grande) e un modo rigoroso per manipolarlo e confrontarlo.

Definizione 5.75 (o-piccolo, O-grande)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di A e sia $g\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione positiva su A. Definiamo allora gli insiemi di funzioni*[2]*:*

$$\begin{aligned} o(g) &= \left\{ f \in \mathbb{R}^A \colon \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right\}; \\ O(g) &= \left\{ f \in \mathbb{R}^A \colon \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < +\infty \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathbb{R}^A \colon \exists U \in \mathcal{U}_{x_0}, C > 0 \colon \forall x \in U \colon \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C \right\}. \end{aligned}$$

Espressioni come ad esempio:

$$\sin x - x = o(x^2), \qquad \text{per } x \to 0$$

vanno quindi interpretate come

$$f \in o(g)$$

dove $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x^2$. In questa sezione scriveremo:

$$\sin x - x \in o(x^2) \tag{11}$$

per dare risalto a questa interpretazione (e mettere in evidenza il fatto che la relazione non è affatto simmetrica).

Possiamo ora procedere ad interpretare le operazioni tra insiemi. In generale se A e B sono insiemi di oggetti su cui è definita una operazione $*$ (che potrebbe essere la somma, il prodotto, il rapporto...) definiamo:

$$A * B = \{a * b \colon a \in A, b \in B\}.$$

Analogamente se A è un insieme sui cui elementi è definita una operazione $*$ con un oggetto b, definiremo:

$$A * b = \{a * b \colon a \in A\}, \qquad b * A = \{b * a \colon a \in A\}.$$

Ad esempio l'espressione

$$\sin x = x + o(x^2)$$

andrebbe formalmente intesa come

$$\sin x \in x + o(x^2)$$

2 ricordiamo che A^B denota l'insieme delle funzioni $f\colon B \to A$

dove l'insieme $x + o(x^2)$ è l'insieme di tutte le funzioni f che possono essere scritte nella forma $f(x) = x + h(x)$ con $h \in o(x^2)$ cioè h tale che $h(x)/x^2 \to 0$. Risulta quindi che tale espressione è equivalente alla (11) in quanto se $\sin x = x + h(x)$ con $h \in o(x^2)$ significa che $\sin x - x \in o(x^2)$.

Possiamo allora enunciare le regole algebriche di manipolazione dei simboli di Landau.

Teorema 5.76 (operazioni con i simboli di Landau). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ punto di accumulazione per A. Siano $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ funzioni positive, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Allora, per $x \to x_0$ si ha:*

$$\begin{aligned}
0 \in o(f) &\subseteq O(f) & f &\in O(f) \\
c \cdot o(f) &= o(f) & c \cdot O(f) &= O(f) \\
o(f) + o(f) &= o(f) & O(f) + O(f) &= O(f) \\
o(f) - o(f) &= o(f) & O(f) - O(f) &= O(f) \\
o(f \cdot g) &= f \cdot o(g) & O(f \cdot g) &= f \cdot O(g) \\
o(g/f) &= o(g)/f & O(g/f) &= O(g)/f \\
o(f) \cdot o(g) &\subseteq o(f \cdot g) & O(f) \cdot O(g) &\subseteq O(f \cdot g) \\
o(f) \cdot O(g) &\subseteq o(f \cdot g) & & \\
(o(f))^n &\subseteq o(f^n) & (O(f))^n &\subseteq O(f^n) \\
o(o(f)) &\subseteq o(f) & O(O(f)) &\subseteq O(f) \\
o(O(f)) &\subseteq o(f) & O(o(f)) &\subseteq o(f).
\end{aligned}$$

Si osserva, in particolare, che $o(f)$ e $O(f)$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^A$.

E' anche possibile applicare i cambi di variabile. Se $f \in o(g)$ per $x \to x_0$ e $h(t) \to x_0$ per $t \to t_0$ allora

$$f \circ h \in o(g \circ h) \qquad \text{per } t \to t_0.$$

Dimostrazione. Visto che $0/f = 0$ è ovvio che $0 \in o(f)$. L'inclusione $o(f) \subseteq O(f)$ discende dal fatto che se $h \in o(f)$ significa che $h/f \to 0$ per $x \to x_0$. Ma allora esiste un intorno di x_0 in cui $|h/f| < 1$ e dunque $h \in O(f)$. Ovviamente $f \in O(f)$ in quanto $f/f = 1$ è una funzione limitata.

Se $h \in c \cdot o(f)$ significa che $h = c \cdot (h/c)$ e $h/c \in o(f)$ ovvero $(h/c)/f \to 0$. Ma questo è equivalente a $h/f \to 0$ visto che c è una costante non nulla. Il caso degli O grande si svolge in modo simile.

L'insieme $o(f) + o(f)$ è formato da funzione della forma $h + k$ con $h, k \in o(f)$. Ma si ha

$$\frac{h+k}{f} = \frac{h}{f} + \frac{k}{f} \to 0 + 0 = 0.$$

Dunque $o(f) + o(f) \subseteq o(f)$. Viceversa osserviamo che se $h \in o(f)$ si può scrivere $h = h/2 + h/2$ e per quanto visto prima sappiamo che $h/2 \in o(f)$. Dunque $o(f) \subseteq o(f) + o(f)$. Ragionamento simile si può fare per $O(f)$: la somma di due funzioni localmente limitate è anch'essa localmente limitata.

Osserviamo che $o(f) - o(f) = o(f) + (-1) \cdot o(f) = o(f) + o(f) = o(f)$ per quanto già visto. Lo stesso vale per $O(f) - O(f)$.

Se $h \in o(fg)$ significa che $h/(fg) \to 0$. Ma allora $h = f \cdot (h/f)$ con $h/f \in o(g)$ in quanto $(h/f)/g = h/(fg) \to 0$. Dunque $h \in fo(g)$ e di conseguenza $o(fg) \subseteq f \cdot o(g)$. Viceversa se $h \in f \cdot o(g)$ significa che $h = f \cdot (h/f)$ con $h/f \in o(g)$ ovvero $(h/f)/g \to 0$. Dunque $h/(fg) \to 0$ che significa $h \in o(fg)$. Ragionamento analogo si può fare con gli O grande.

I risultati per la divisione si riconducono a quelli della moltiplicazione osservando che la divisione per f è uguale alla moltiplicazione per $1/f$.

Se $h \in o(f)$ e $k \in o(g)$ vogliamo mostrare che $hk \in o(fg)$. Ma questo è ovvio essendo $(hk)/(fg) = (h/f) \cdot (k/g) \to 0 \cdot 0 = 0$. Abbiamo mostrato che $o(f)o(g) \subseteq o(fg)$. Risultato analogo si ha negli altri due casi $O(f)O(g) \subseteq O(fg)$ e $o(f)O(g) \subseteq o(fg)$, osservando che il prodotto di due funzioni limitate è limitata e il prodotto di una limitata per una infinitesima è infinitesima.

Per quanto riguarda la potenza $(o(f))^n$ osserviamo che si ha:

$$\begin{aligned}(o(f))^n &= \{h^n \colon h \in o(f)\} \subseteq \{h_1 \cdots h_n \colon h_1, \dots, h_n \in o(f)\} \\ &= o(f) \cdots o(f) \subseteq o(f^n).\end{aligned}$$

Se $h \in o(o(f))$ significa che esiste $k \in o(f)$ e $h \in o(k)$. Dunque $k/f \to 0$ e $h/k \to 0$. Ma allora $h/f = (h/k) \cdot (k/f) \to 0 \cdot 0 = 0$ dunque $h \in o(f)$. Abbiamo quindi mostrato che $o(o(f)) \subseteq o(f)$. Dimostrazione analoga si può fare per gli O grande. Anche le inclusioni $o(O(f)) \subseteq o(f)$ e $O(o(f)) \subseteq o(f)$ si dimostrano in modo analogo osservando che il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima è infinitesima.

Per quanto riguarda il cambio di variabile, dobbiamo verificare che

$$\frac{f(h(t))}{g(h(t))} \to 0 \qquad \text{per } t \to t_0$$

se $f \in o(g)$ e se $h(t) \to x_0$ per $t \to t_0$. Ma questo non è altro che il cambio di variabile $x = h(t)$ nel limite $f(x)/g(x) \to 0$ per $x \to x_0$. □

***Esempio* 5.77.** Sapendo che per $x \to 0$ si ha

$$\sin x \in x + o(x^2), \qquad \cos x \in 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

e ricordando che $x^3 \in o(x^2)$ possiamo dedurre, utilizzando le proprietà del teorema precedente:

$$\begin{aligned}
2\cos x - \sin x &\in 2 - x^2 + 2o(x^3) - x - o(x^2) \\
&= 2 - x - x^2 + o(x^3) + o(x^2) \\
&= 2 - x - x^2 + o(o(x^2)) + o(x^2) \\
&\subseteq 2 - x - x^2 + o(x^2) + o(x^2) \\
&= 2 - x - x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Usualmente tutti questi passaggi vengono sottointesi, si utilizza il simbolo $=$ al posto di $\in$ e $\subseteq$ e spesso si preferisce scrivere sempre un solo $o(\cdot)$ alla fine di ogni espressione.

***Esempio* 5.78.** Con gli stessi presupposti dell'esempio precedente potremo scrivere:

$$\begin{aligned}
(\sin^2 x)(2 - 2\cos x)^3 &\in (x + o(x^2))^2 \cdot (2 - (2 - x^2 - 2o(x^3))^3 \\
&= (x + o(x^2))^2 \cdot (x^2 + o(x^3))^3 \\
&= (x^2 + 2xo(x^2) + (o(x^2))^2) \\
&\quad \cdot (x^6 + 3x^4 o(x^3) + 3x^2(o(x^3))^2 + (o(x^3))^3) \\
&\subseteq (x^2 + o(x^3) + o(x^4)) \cdot (x^6 + o(x^7) + o(x^8) + o(x^9)) \\
&= (x^2 + o(x^3)) \cdot (x^6 + o(x^7)) \\
&= x^8 + x^2 o(x^7) + o(x^3)x^6 + o(x^3)o(x^7) \\
&= x^8 + o(x^9) + o(x^9) + o(x^9) = x^8 + o(x^9).
\end{aligned}$$

***Esempio* 5.79.** Possiamo anche fare un esercizio con il cambio di variabile. Osservando che $y = 1 - \cos x \to 0$ per $x \to 0$ sapendo che $\sin y = y + o(y^2)$ per $y \to 0$ e che $2 - 2\cos x = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ possiamo scrivere che per $x \to 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
\sin(2 - 2\cos x) &\in (2 - 2\cos x) + o((2 - 2\cos x)^2) \\
&\subseteq x^2 + o(x^2) + o((x^2 + o(x^2))^2) \\
&\subseteq x^2 + o(x^2) + o(O(x^4)) \\
&\subseteq x^2 + o(x^2) + o(x^4) \\
&= x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

***Esercizio* 5.80.** Dimostrare (per semplice curiosità) che valgono anche le inclusioni inverse a quelle enunciate nel teorema:

$$o(f \cdot g) \subseteq o(f) \cdot o(g), \qquad O(f \cdot g) \subseteq O(f) \cdot o(g),$$
$$o(f \cdot g) \subseteq o(f) \cdot O(g),$$
$$o(f) \subseteq o(o(f)), \qquad O(f) \subseteq O(O(f)).$$

Osservare invece che $(o(f))^2 \neq o(f) \cdot o(f)$.

La formula di Taylor può risultare molto utile per determinare il carattere di una serie, come nel seguente.

***Esercizio* 5.81.** Determinari i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k} \right)^{\alpha}$$

converge assolutamente e quelli per cui converge.

Soluzione. Posto $f(x) = x - \sin x$, tramite sviluppo di Taylor sappiamo che si ha, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned} f^{\alpha}(x) = (x - \sin x)^{\alpha} &= \left(\frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^{\alpha} = \frac{x^{3\alpha}}{6^{\alpha}} (1 + o(1))^{\alpha} \\ &= \frac{x^{3\alpha}}{6^{\alpha}} (1 + \alpha \cdot o(1) + o(o(1))) = \frac{x^{3\alpha}}{6^{\alpha}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Visto che per $k \to +\infty$ si ha $x = 1/k \to 0$, possiamo scrivere:

$$a_k = (f(1/k))^{\alpha} = \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k} \right)^{\alpha} = \frac{1}{6^{\alpha} \cdot k^{3\alpha}} (1 + o(1)) \sim \frac{1}{6^{\alpha} \cdot k^{3\alpha}}.$$

Osserviamo che la serie data è $\sum (-1)^k a_k$ e che $a_k > 0$. Dunque per il criterio di confronto asintotico se $3\alpha > 1$, cioè se $\alpha > 1/3$, la serie data converge assolutamente, se invece $\alpha \leq 1/3$ la serie non converge assolutamente (ma potrebbe convergere). Osserviamo inoltre che se $\alpha \leq 0$ il termine a_k non è neanche infinitesimo e quindi la serie non può convergere.

Per $\alpha \in (0, 1/3]$ possiamo provare ad utilizzare il criterio di Leibniz: la successione a_k è infinitesima, dobbiamo verificare che sia anche definitivamente decrescente. Avendo posto $a_k = (f(1/k))^{\alpha}$ sarà sufficiente dimostrare che la funzione $f(x)$ è crescente in un intorno destro di 0. Per le proprietà del polinomio di Taylor sappiamo che il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f'(x)$ è uguale alla derivata del polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine 3. Dunque possiamo affermare immediatamente (ma sarebbe stato ugualmente veloce calcolare la derivata e poi svilupparla) che

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{6} \right)' + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 \left(\frac{1}{2} + o(1) \right)$$

dunque, per la permanenza del segno, deve esistere un intorno di 0 in cui $1/2 + o(1)$ è positivo e quindi in tale intorno risulta che $f'(x) \geq 0$ cioè f è crescente. Dunque anche f^α è crescente e, per k abbastanza grande, a_k è decrescente. Si può quindi applicare il criterio di Leibniz e concludere che la serie è convergente per ogni $\alpha > 0$. □

5.8 funzioni analitiche

Nel capitolo sulle serie di potenze abbiamo studiato le serie di potenze della forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k. \tag{12}$$

E' chiaro che se fissiamo un punto z_0 possiamo fare un cambio di variabile e osservare che la serie

$$g(z) = f(z - z_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{13}$$

converge nel cerchio $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{Z} \colon |z - z_0| < R\}$ dove R è il raggio della serie di potenze (12). Diremo che la serie nell'equazione (13) è una serie di potenze centrata in z_0 e chiameremo R il suo raggio di convergenza.

Risulta allora naturale chiedersi se una serie di potenza centrata in un punto z_0 può essere traslata in un punto $z_1 \neq z_0$ almeno quando $z_1 \in B_R(z_0)$. La risposta, affermativa, è data dal seguente.

Teorema 5.82 (traslazione di una serie di potenze). *Si consideri la serie di potenze* (12) *con raggio di convergenza $R \in (0, +\infty]$ si prenda un punto $z_1 \in B_R(z_0)$ e si ponga $r = R - |z_1 - z_0|$ cosicché $B_r(z_1) \subseteq B_R(z_0)$. Allora per ogni $z \in B_r(z_1)$ si ha*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - z_1)^k \tag{14}$$

per opportuni coefficienti b_k. In particolare la serie di potenze in (14), *centrata in z_1, ha raggio di convergenza non inferiore a r.*

Dimostrazione. Per semplificare le notazioni possiamo supporre, senza perdere di generalità, che sia $z_0 = 0$. Informalmente vorremmo svolgere i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_1 + z_1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^{k-j} (z - z_1)^j \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=j}^{+\infty} a_k \binom{k}{j} z_1^{k-j} \right) (z - z_1)^j \end{aligned}$$

ottenendo quindi il risultato voluto con

$$b_j = \sum_{k=j}^{+\infty} a_k \binom{k}{j} z_1^{k-j}.$$

Affinché questi passaggi siano validi bisogna garantire che i termini

$$c_{k,j} = a_k \binom{k}{j} z_1^{k-j}$$

siano assolutamente sommabili, cosicché i passaggi fatti sopra risultano validi in quanto stiamo associando e commutando i termini di una serie assolutamente convergente. Ma ripetendo gli stessi passaggi con gli opportuni moduli si osserva che

$$\sum_{k,j} \left| c_{k,j} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|(|z - z_1| + |z_1|)^k.$$

Visto che la serie di potenze originale è assolutamente convergente all'interno del raggio di convergenza, possiamo affermare che essendo $|z - z_1| + |z_1| < r + |z_1| = R$ la serie $\sum c_{k,j}$ è assolutamente convergente, i passaggi informali sono giustificati e la dimostrazione è conclusa. □

La teoria delle funzioni analitiche potrebbe essere svolta, senza cambiare sostanzialmente nulla, per le funzioni di variabile complessa. Si dovrebbe però introdurre il concetto di derivata in senso complesso un argomento che richiederebbe molto spazio e che esula dagli scopi di questo corso. Ci limitiamo quindi alle funzioni reali, che sono il nostro argomento di studio.

Definizione 5.83 (funzione analitica)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme aperto e sia $f\colon A \subseteq\to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f è* analitica *se per ogni $x_0 \in A$ esiste una successione di numeri reali a_k ed esiste $R > 0$ tali che per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A$ si ha:* *funzione analitica*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Il teorema 5.82 ci dice in particolare che la somma di una serie di potenze è una funzione analitica, almeno all'interno del raggio di convergenza. Ad esempio le funzioni e^x, $\sin x$ e $\cos x$ sono state definite come somma di una serie di potenze (centrata in $x = 0$) di raggio infinito e dunque risultano essere funzioni analitiche su tutto $\mathbb{R}$.

Teorema 5.84 (Sviluppabilità in serie di Taylor)**.** *Se $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione analitica allora $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ e per ogni $x_0 \in A$ esiste $R > 0$, tale che per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A$ risulta*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \tag{15}$$

Anche la derivata di f è una funzione analitica e la serie di Taylor della derivata si ottiene derivando termine a termine la serie di Taylor di f.

Dimostrazione. Senza perdere di generalità supponiamo che sia $x_0 = 0$. Essendo f una funzione analitica, per definizione sappiamo che esiste $R > 0$ tale che per $|x| < R$ si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

con opportuni coefficienti a_k. Vogliamo mostrare che $f(x)$ è derivabile. Informalmente vorremmo svolgere i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} h^j x^{k-j}}{h} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} h^{j-1} x^{k-j} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j+1} h^j x^{k-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{+\infty} a_k \binom{k}{j+1} x^{k-j-1} \right) h^j.\end{aligned}$$

Se poniamo

$$c_{k,j} = a_k \binom{k}{j+1} x^{k-j-1}$$

i passaggi risultano giustificati se la serie $\sum_{k,j} c_{k,j}$ è assolutamente convergente. Ma, mettendo opportunamente i valori assoluti nei passaggi già fatti, si ha

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=j+1}^{+\infty} \left| c_{k,j} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \frac{|x+h|^k - |x|^k}{|h|}$$

e dunque possiamo affermare che c'è convergenza assoluta se $|x| < R$ e $|x+h| < R$ cioè se $|h| < R - |x|$. In tal caso i passaggi fatti prima sono giustificati e quindi il risultato è una serie di potenze convergente per $|h| < R - |x|$. In particolare fissato x la somma della serie di potenze ottenuta alla fine è una funzione continua e per $h \to 0$ tende al termine noto della serie (quello con $j = 0$), dunque si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \binom{k}{1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Abbiamo trovato che la derivata della serie di potenze è uguale alla serie di potenze delle derivate.

Visto che la serie delle derivate ha lo stesso raggio di convergenza R della serie originaria (teorema 3.41) il procedimento può essere iterato trovando che ogni derivata è derivabile e per ogni $x \in (-R, R)$ si avrà dunque:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k x^{k-n}.$$

In particolare

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

e quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

come dovevamo dimostrare. □

Abbiamo visto che le funzioni analitiche sono di classe C^∞. Il seguente esempio ci mostra che il viceversa non è vero e dunque la classe delle funzioni analitiche è strettamente contenuta nella classe delle funzioni C^∞.

***Esempio* 5.85** *(funzione C^∞ non analitica).* La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞ in quanto per $x \neq 0$ possiamo calcolare tutte le derivate e osservare che si possono scrivere nella forma

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

per un opportuno polinomio P_n (lo si dimostri per induzione). Dunque per $x \to 0$ si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) \to 0$$

e quindi la funzione f è derivabile infinite volte anche nel punto $x = 0$ (grazie alla proposizione 5.54) e risulta $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se la funzione f fosse analitica in un intorno di 0 dovremmo avere, per il teorema 5.84:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 0 \cdot x^k = 0$$

che è assurdo in quanto $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.

Teorema 5.86 (serie binomiale). *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in (-1, 1)$ si ha* *serie binomiale*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che la serie di potenze di coefficiente $a_k = \binom{\alpha}{k}$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Infatti, tramite il criterio del rapporto, si trova:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|} = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \to 1.$$

Dunque la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

è definita per ogni $x \in (-1,1)$. Grazie al teorema 5.82 la funzione f è sviluppabile in serie di potenze nell'intorno di ogni punto dell'intervallo (-1.1) e dunque è una funzione analitica su tale intervallo. Inoltre la sua derivata ha come sviluppo la serie delle derivate:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1}.$$

Per dimostrare che $f(x) = (1+x)^\alpha$ basta mostrare che il rapporto:

$$u(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$$

è costantemente uguale ad 1. Per verifica diretta si vede che $f(0) = 1$ dunque abbiamo almeno $u(0) = 1$. Basta allora mostrare che u è costante ovvero che $u' = 0$. Ma si ha

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - f(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Osserviamo allora che

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{k!} + k\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} [(\alpha-k)+k] x^k \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha \cdot f(x). \end{aligned}$$

Dunque $u'(x) = 0$ e $f(x) = (1+x)^\alpha$ per ogni $x \in (-1,1)$, come volevamo dimsotrare. □

Non basta quindi che una funzione sia di classe C^∞ per garantire che sia anche analitica e quindi non è ovvio il seguente.

Teorema 5.87 (criterio di analiticità)**.** *Sia $f \in C^\infty(A)$ una funzione reale definita su un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x_0 \in A$ esistano $r > 0$, $M > 0$ e $L > 0$ tali che $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq A$ e per ogni $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia*

$$\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!} \leq M \cdot L^n.$$

Allora f è analitica in A.

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in A$. Dobbiamo dimostrare che in un intorno di x_0 è possibile scrivere f come somma di una serie di potenze $\sum a_k(x - x_0)^k$. Necessariamente, per il teorema precedente, la serie di potenze dovrà essere la serie di Taylor, cioè vogliamo dimostrare che esiste $\rho > 0$ tale che se $|x - x_0| < \rho$ si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Grazie alla formula di Taylor con resto di Lagrange (teorema 5.70), noi sappiamo che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Dunque sarà sufficiente mostrare che fissato x per $n \to +\infty$ il resto tende a zero. Ma infatti se $|x - x_0| \leq \rho$ si ha

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq M \cdot L^{n+1}|x - x_0|^{n+1} = M(L\rho)^{n+1} \to 0$$

se scegliamo ρ in modo che sia $\rho < 1/L$. □

Teorema 5.88 (analiticità di alcune funzioni elementari)**.** *Le funzioni e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ sono funzioni analitiche. Le funzioni* arcsin *e* arccos *sono analitiche sull'intervallo aperto $(-1, 1)$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione x^α è analitica sull'intervallo $(0, +\infty)$. Valgono inoltre le formule riportate in tabella 2.*

Dimostrazione. Che e^x, $\sin x$ e $\cos x$ siano funzioni analitiche discende direttamente dal fatto che tali funzioni sono state definite come somma di una serie di potenze. Dunque, grazie al teorema 5.82 sono funzioni analitiche. In alternativa si può applicare il teorema 5.87. Le funzioni sin e cos hanno derivata limitata, quindi le ipotesi del teorema sono facilmente verificate. Ma anche la funzione e^x ha derivata limitata se ci restringiamo ad un qualunque intervallo limitato e dunque anche in quel caso il teorema si applica.

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad \text{se } |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \qquad \text{se } |x| < 1 \\
\arcsin x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad \text{se } |x| < 1 \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x
\end{aligned}
$$

Tabella 2: sviluppi in serie di Taylor, di alcune funzioni elementari. Si veda il teorema 5.88

.

Per quanto riguarda la funzione $f(x) = x^\alpha$ scelto un punto qualunque $x_0 > 0$ possiamo utilizzare il teorema 5.86:

$$
\begin{aligned}
x^\alpha &= (x_0 + x - x_0)^\alpha = x_0^\alpha \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^\alpha \\
&= x_0^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_0^{\alpha-k} \binom{\alpha}{k} (x - x_0)^k
\end{aligned}
$$

e dunque anche x^α è sviluppabile in serie di potenze nell'intorno di un qualunque punto $x_0 > 0$ ed è quindi una funzione analitica.

Osserviamo ora che se f è derivabile ed f' è analitica allora anche f è analitica. Infatti se

$$
f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k
$$

su un certo intervallo I allora la funzione

$$
g(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \tag{16}
$$

è anch'essa analitica su I (in quanto definita da una serie di potenze) ma chiaramente $g(x_0) = f(x_0)$ e $g'(x) = f'(x)$ per ogni $x \in I$, dunque $g - f$ è costantemente uguale a 0 cioè $f(x) = g(x)$.

La precedente osservazione si applica alle funzioni $\ln x$, $\arcsin x$ e $\arccos x$ in quanto la loro derivata è una funzione potenza e quindi è analitica per quanto già visto.

Osserviamo ora che se una funzione è analitica allora può essere scritta in serie di Taylor e i coefficienti della serie di Taylor coincidono con i coefficienti dei polinomi di Taylor. Dunque gli sviluppi in tabella 2 hanno gli stessi termini dei polinomi nella tabella 1 a pagina 175. $\square$

Teorema 5.89 (principio di identità delle funzioni analitiche)**.** *Se f e g sono due funzioni analitiche definite su uno stesso intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ allora risultano fatti equivalenti:*

1. *$f(x) = g(x)$ per ogni $x \in I$,*
2. *esiste $x_0 \in I$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$,*
3. *esiste $x_0 \in I$ e $\rho > 0$ tale che per ogni $x \in I$ con $|x - x_0| < \rho$ si ha $f(x) = g(x)$.*

Dimostrazione. Se $f = g$ allora chiaramente le derivate di f e g coincidono in tutti i punti, quindi $1 \implies 2$.

Se f e g sono analitiche e $x_0 \in I$ esiste un intorno del punto x_0 in cui entrambe le funzioni possono essere scritte come somma della serie di Taylor. Ma se f e g hanno le stesse derivate nel punto x_0 le loro serie di Taylor coincidono e dunque le funzioni coincidono all'interno del raggio di convergenza. Dunque $2 \implies 3$.

Ci rimane da dimostrare che $3 \implies 1$. Per ipotesi sappiamo che esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x) = g(x)$ in un intorno di x_0. Supponiamo per assurdo che esista almeno un punto $x \in I$ in cui $f(x) \neq g(x)$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che sia $x > x_0$ e possiamo prendere l'estremo inferiore di tali punti:

$$x_1 = \inf\{x \in I \colon x > x_0, f(x) \neq g(x)\}.$$

Sappiamo che $x_1 > x_0$ perché in un intorno di x_0 le due funzioni coincidono per ipotesi. Per definizione di x_1 sappiamo anche che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [x_0, x_1)$ e quindi, facendo le derivate, possiamo affermare che $f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in [x_0, x_1)$. Visto che f e g sono di classe C^∞ possiamo concludere, per continuità, che anche $f^{(k)}(x_1) = g^{(k)}(x_1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque le due funzioni hanno le stesse derivate nel punto x_1. Essendo f e g funzioni analitiche sappiamo che c'è un intorno del punto x_1 in cui entrambe le funzioni coincidono con la somma della propria serie di Taylor. Ma avendo le stesse derivate in x_1 le due funzioni hanno anche la stessa serie di Taylor e quindi coincidono in un intorno di x_1. Questo è assurdo perché per come abbiamo definito x_1 ci devono essere dei punti arbitrariamente vicini a x_1 in cui $f(x) \neq g(x)$. $\square$

***Esercizio* 5.90** *(calcolo cifre di π).* Possiamo perfezionare il calcolo delle cifre di π fatto nell'esercizio 5.71. Grazie allo sviluppo di Taylor della funzione arcsin sappiamo che

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{(2k+1)\cdot 2^{2k+1}}$$

dunque

$$\pi = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{(2k+1)\cdot 4^k} + \varepsilon_{n+1}$$

dove

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= 3\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{(2k+1)\cdot 4^k} \le 3\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)\cdot 4^k} \\
&\le \frac{3}{(2n+1)\cdot 4^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{3}{(2n+1)\cdot 4^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{(2n+1)\cdot 4^n}.
\end{aligned}$$

Per $n = 3$ si ottiene dunque

$$\begin{aligned}
\pi &= 3 + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{3\cdot 3}{4\cdot 2\cdot 5\cdot 4^2} + \frac{3\cdot 5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 4^3} + \varepsilon_4 \\
&= 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{45}{21504} + \varepsilon_4
\end{aligned}$$

con

$$0 < \varepsilon_4 < \frac{1}{9\cdot 4^3} < 0.0018$$

da cui

$$3.141 < \pi < 3.143$$

Applicando questo metodo al calcolatore possiamo trovare rapidamente molte cifre esatte, come riportato nella tabella 3

3. 1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

Tabella 3: Le prime 1000 cifre decimali del numero π calcolate con il metodo utilizzato nell'esercizio 5.90. Si veda il codice a pagina 366.

6 CALCOLO INTEGRALE

*** **Definizione 6.1** (integrale di Riemann). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.*

Un insieme $P \subseteq [a, b]$ si dice essere una suddivisione di Riemann *dell'intervallo $[a, b]$ se P è un insieme finito tale che $a, b \in P$. In particolare P si potrà scrivere come* suddivisione di Riemann

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$$

con

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Data una qualunque suddivisione P di $[a, b]$ definiamo rispettivamente le somme!superiori *e le* somme!inferiori *come* somme superiori/inferiori

$$S^*(f, P) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup f([x_{k-1}, x_k])$$
$$S_*(f, P) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf f([x_{k-1}, x_k]).$$

Definiamo infine

$$I^*(f) = \inf\{S^*(f, P) \colon P \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$
$$I_*(f) = \sup\{S_*(f, P) \colon P \text{ suddivisione di } [a, b]\}.$$

Se $I^*(f) = I_*(f)$ diremo che f è Riemann-integrabile *e diremo che l'*integrale *di f su $[a, b]$ è il valore comune $I^*(f) = I_*(f)$ che verrà denotato con* integrale di Riemann

$$\int_a^b f \qquad \textit{oppure con} \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Se $b < a$ e se f è Riemann integrabile su $[b, a]$ definiamo per convenzione:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

* **Teorema 6.2** (criteri di integrabilità). *Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.* criteri di integrabilità

1. *Se P e Q sono due suddivisioni qualunque dell'intervallo $[a,b]$ si ha*
$$S_*(f,P) \leq S^*(f,Q).$$
Di conseguenza $I_*(f) \leq I^*(f)$.

2. *La funzione f è Riemann-integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P tale che*
$$S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon.$$

3. *Se f è Riemann-integrabile su $[a,b]$ allora esiste una successione P_n di suddivisioni tali che*
$$\lim_{n\to+\infty} S^*(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} S_*(f,P_n) = \int_a^b f. \tag{1}$$
Viceversa se esiste una successione P_n di suddivisioni di $[a,b]$ per cui si ha
$$\lim_{n\to+\infty} (S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n)) = 0$$
allora la funzione f è Riemann-integrabile e si ha
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S^*(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} S_*(f,P_n).$$

Dimostrazione. Sia P una qualunque suddivisione di $[a,b]$ e sia $y \in [a,b]$ un punto qualunque. Posto $P' = P \cup \{y\}$ vogliamo mostrare che si ha
$$S_*(f,P) \leq S_*(f,P') \leq S^*(f,P') \leq S^*(f,P). \tag{2}$$
Se $y \in P$ non c'è niente da dimostrare in quanto risulterebbe $P' = P$ e la disuguaglianza $S_*(f,P') \leq S^*(f,P')$ è sempre verificata in quanto ogni estremo superiore che compare nella definizione di S^* è maggiore o uguale al corrispondente estremo inferiore che compare nella definizione di S_*. Supponiamo allora che $y \notin P$ e dunque che y sia compreso tra due punti consecutivi x_{k-1}, x_k della suddivisione P:
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < y < x_k < \cdots < x_N = b.$$
Allora le somme che definiscono $S_*(f,P)$ e $S_*(f,P')$ differiscono solo sull'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ e si ha
$$\begin{aligned} S_*(f,P') - S_*(f,P) = (y - x_{k-1}) \cdot \inf_{[x_{k-1},y]} f + (x_k - y) \cdot \inf_{[y,x_k]} f \\ - (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \end{aligned}$$
ma osservando che
$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \leq \inf_{[x_{k-1},y]} f \qquad \text{e} \qquad \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \leq \inf_{[y,x_k]} f$$

si ottiene $S_*(f,P) \le S_*(f,P')$. In maniera analoga si ottiene $S^*(f,P) \ge S^*(f,P')$. Dunque (2) è dimostrata. Ma allora se P e Q sono suddivisioni qualunque osserviamo che $P \cup Q$ si può ottenere da P aggiungendo uno alla volta i punti di Q. Iterando la (2) si può dunque concludere che

$$S_*(f,P) \le S_*(f,P\cup Q) \le S^*(f,P\cup Q) \le S^*(f,Q)$$

da cui discende il primo punto del teorema: $S_*(f,P) \le S^*(f,Q)$. Facendo l'estremo inferiore al variare di Q si ottiene $S_*(f,P) \le I^*(f)$ e facendo l'estremo superiore al variare di P si ottiene $I_*(f) \le I^*(f)$.

Dimostriamo il secondo punto. Se esiste una suddivisione P tale che $S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$ possiamo immediatamente concludere che

$$I^*(f) - I_*(f) \le S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon.$$

Se questo è vero per ogni $\varepsilon > 0$ deduciamo che $I^*(f) - I_*(f) = 0$ e dunque che f è Riemann-integrabile.

Viceversa qualunque sia f, per le proprietà di di sup e inf esistono Q e R suddivisioni tali che

$$I^*(f) \ge S^*(f,Q) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad I_*(f) \le S_*(f,R) + \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui, per il punto precedente, ponendo $P = Q \cup R$ se f è Riemann integrabile si ottiene

$$\begin{aligned} S^*(f,P) - S_*(f,P) &\le S^*(f,Q) - S_*(f,R) \\ &\le I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per il terzo punto del teorema supponiamo dapprima che f sia Riemann-integrabile su $[a,b]$. Allora per il punto precedente per ogni $n \in \mathbb{N}$ ponendo $\varepsilon = 1/n$ possiamo trovare una suddivisione P_n tale che

$$S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) < \frac{1}{n}$$

da cui

$$I^*(f) \le S^*(f,P_n) \le S_*(f,P_n) + \frac{1}{n} \le I_*(f) + \frac{1}{n}$$

perciò passando al limite per $n \to +\infty$, essendo $I^*(f) = I_*(f) = \int_a^b f$ deve valere

$$\lim S^*(f,P_n) = \lim S_*(f,P_n) = \int_a^b f.$$

Viceversa se

$$\lim_{n\to+\infty} S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) = 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n tale che

$$S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) < \varepsilon.$$

Per il punto precedente concludiamo che f è Riemann-integrabile. D'altra parte sappiamo che

$$S_*(f, P_n) \leq I_*(f) = \int_a^b f = I^*(f) \leq S^*(f, P_n)$$

dunque se $S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) \to 0$ necessariamente l'integrale coincide con i limiti di $S^*(f, P_n)$ e di $S_*(f, P_n)$. □

Esempio* 6.3** *(calcolo dell'integrale tramite le suddivisioni).** Mostriamo che per ogni $b > 0$ la funzione $f(x) = x^2$ è Riemann-integrabile sull'intervallo $[0, b]$ e si ha

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}.$$

Dimostrazione. Consideriamo le suddivisioni *equispaziate* dell'intervallo $[0, b]$, cioè dividiamo $[0, b]$ in N intervalli ognuno di ampiezza b/N:

$$P_N = \left\{ \frac{kb}{N} \colon k \in 0, 1, \ldots, N \right\}.$$

Si ha

$$S^*(f, P_N) = \sum_{k=1}^N \sup_{[(k-1)b/N, kb/N]} f \cdot \frac{b}{N} = \frac{b}{N} \sum_{k=1}^N \frac{k^2 b^2}{N^2} = \frac{b^3}{N^3} \sum_{k=1^N} k^2.$$

Ricordiamo ora che vale

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

(tale formula può essere facilmente verificata per induzione). Dunque si ha

$$S^*(f, P_N) = \frac{b^3}{N^3} \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} = \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{N} + \frac{1}{N}^2 \right) \to \frac{b^3}{3}$$

per $N \to +\infty$. Analogamente si trova

$$S_*(f, P_N) = \sum_{k=1}^N \inf_{[(k-1)b/N, kb/N]} f \cdot \frac{b}{N} = \frac{b}{N} \sum_{k=1}^N \frac{(k-1)^2 b^2}{N^2} = \frac{b^3}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} k^2$$

e osservando che si ha

$$\sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} k^2 = \frac{2(N-1)^3 + 3(N-2)^2 + (N-1)}{6}$$

otteniamo

$$S_* \geq \sup_N S_*(f, P_N) \geq \lim_{N \to +\infty} S_*(f, P_N) = \frac{b^3}{3} \to \frac{b^3}{3}.$$

La dimostrazione si conclude quindi applicando il criterio (1) del teorema precedente. □

Teorema 6.4 (integrale della costante)**.** *Se* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *è costante:* $f(x) = c$ *allora* f *è Riemann-integrabile e si ha*

$$\int_a^b f = c \cdot (b-a).$$

Dimostrazione. Visto che su ogni $A \subseteq [a,b]$ si ha

$$\sup_A f = \inf_A f = c$$

è facile verificare che si ha

$$S^*(f,P) = S_*(f,P) = c \cdot (b-a)$$

qualunque sia la suddivisione P di $[a,b]$. Il risultato segue immediatamente. □

Non tutte le funzioni sono Riemann-integrabili come ci mostra il seguente esempio.

** ***Esempio* 6.5** *(funzione di Dirichlet).* Sia $a < b$ e sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora f non è Riemann-integrabile.

* *Dimostrazione.* Sia $P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ una qualunque suddivisione di $[a,b]$. Allora basta osservare che, per la densità dei razionali, in qualunque intervallino $I = [x_{k-1}, x_k]$ sono presenti infiniti punti razionali e infiniti punti irrazionali. Dunque $\sup f(I) = 1$ e $\inf f(I) = 0$ e di conseguenza

$$S^*(f,P) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \cdot 1 = b - a$$
$$S_*(f,P) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \cdot 0 = 0$$

da cui $I^*(f) = b - a \neq 0 = I_*(f)$. □

* **Teorema 6.6** (monotonia dell'integrale)**.** *Sia* $a \le b$ *e siano* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni Riemann-integrabili. Se per ogni* $x \in [a,b]$ *si ha* $f(x) \le g(x)$ *allora*

$$\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x).$$

In particolare se $f \ge 0$ *allora* $\int_a^b f \ge 0$.

Dimostrazione. Chiaramente se $f \leq g$ si avrà che il sup di f su qualunque intervallo sarà minore o uguale al sup di g sullo stesso intervallo. Dunque su ogni suddivisione P di $[a,b]$ si avrà:

$$S^*(f,P) \leq S^*(g,P)$$

da cui si ottiene immediatamente $I^*(f) \leq I^*(g)$ e il risultato segue. □

Teorema 6.7 (linearità dell'integrale)**.** *Siano $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni Riemann-integrabili e siano $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Allora $\lambda f + \mu g$ è Riemann integrabile e si ha* *

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

In particolare l'insieme delle funzioni Riemann-integrabili su $[a,b]$ risulta essere uno spazio vettoriale reale e l'integrale è una applicazione lineare su tale spazio, a valori in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che *

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f. \tag{3}$$

Questo deriva dal fatto che su qualunque insieme A si ha $\sup_A(-f) = -\inf_A f$ e dunque per una qualunque suddivisione P si ha

$$S^*(-f,P) = -S_*(f,P).$$

Se ne deduce che $I^*(-f) = -I_*(f)$ e, analogamente, $I_*(-f) = -I^*(f)$. Dunque se f è Riemann-integrabile anche $-f$ lo è e vale la proprietà (3).

Ora se $\lambda \geq 0$ vogliamo mostrare che vale

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f. \tag{4}$$

Semplicemente si osserva che $\sup_I \lambda f = \lambda \sup_I f$ e dunque $S^*(\lambda f, P) = \lambda S^*(f,P)$ per ogni suddivisione P. Ne consegue che $I^*(\lambda f) = \lambda I^*(f)$. In maniera analoga si può mostrare che $I_*(\lambda f) = \lambda I_*(f)$. Dunque se f è Riemann-integrabile anche λf (con $\lambda \geq 0$) lo è e vale (4).

Mettendo assieme (3) e (4) si ottiene che (4) vale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Lo stesso sarà vero se mettiamo g al posto di f e μ al posto di λ. Per concludere la dimostrazione sarà dunque sufficiente mostrare che vale anche

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Osserviamo che su qualunque insieme A si ha

$$\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g.$$

Infatti per le proprietà dell'estremo superiore per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ tale che
$$\sup_A (f+g) \le f(x) + g(x) + \varepsilon.$$
Ma chiaramente $f(x) \le \sup_A f$ e $g(x) \le \sup_A g$ dunque si ottiene
$$\sup_A (f+g) \le \sup_A f + \sup_A g + \varepsilon.$$
Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ottiene la disuguaglianza voluta. Questo significa che
$$S^*(f+g) \le S^*(f) + S^*(g).$$
analogamente si potrà dimostrare che
$$S_*(f+g) \ge S_*(f) + S_*(g).$$
Si ottiene dunque
$$I^*(f+g) \le I^* f(f) + I^*(g) \qquad \text{e} \qquad I_*(f+g) \ge I_*(f) + I_*(g)$$
e dunque se f e g sono integrabili anche $f+g$ risulta integrabile e vale la (6).

Per concludere che l'insieme delle funzioni integrali sia uno spazio vettoriale è sufficiente osservare che, grazie al teorema 6.4, la funzione 0 risulta integrabile. □

Teorema 6.8 (proprietà di reticolo)**.** *Se f e g sono funzioni a valori reali definiamo le funzioni $f \wedge g$ (massimo), $f \vee g$ (minimo), f^+ (parte positiva) e f^- (parte negativa) come segue:*
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \qquad (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{se } f(x) > 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \textit{se } f(x) < 0 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$
Risulta $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

Se f è una funzione Riemann-integrabile sull'intervallo $[a,b]$ allora anche $|f|$, f^+ e f^- sono integrabili e se anche g è Riemann-integrabile su $[a,b]$ allora anche $f \vee g$ e $f \wedge g$ sono integrabili sullo stesso intervallo.

Viceversa se f^+ e f^- sono Riemann-integrabili su $[a,b]$ anche f è Riemann-integrabile su $[a,b]$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che se f è integrabile anche $|f|$ lo è. Basta osservare che in generale se $x, y \in [a,b]$ si ha
$$|f(x)| - |f(y)| \le |f(x) - f(y)|$$
da cui per ogni $A \subseteq [a,b]$
$$\sup_{x \in A} |f(x)| - \inf_{y \in A} |f(y)| \le \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{y \in A} f(y)$$

e quindi per ogni suddivisione P si avrà

$$S^*(|f|, P) - S_*(|f|, P) \leq S^*(f, P) - S_*(f, P).$$

Ma se f è integrabile allora il lato destro può essere reso arbitrariamente piccolo (teorema 6.2) e di conseguenza anche il lato sinistro. Dunque la funzione $|f|$ è integrabile (se f lo è).

Ma allora basta osservare che

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \qquad f^- = \frac{|f| - f}{2},$$
$$f \wedge g = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \qquad f \vee g = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

per dedurre che anche f^+, f^-, $f \wedge g$ e $f \vee g$ sono integrabili, grazie alla linearità dell'integrale (teorema 6.7). □

additività dell'integrale

Teorema 6.9 (additività dell'integrale). *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e sia $c \in [a, b]$. Allora f è Riemann-integrabile su $[a, b]$ se e solo se f è Riemann-integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$. E in tal caso risulta* *

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{5}$$

In base alla convenzione

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

la formula (5) è valida non solo se $a \leq c \leq b$ ma anche se a, b, c sono in qualunque ordine, purché la funzione f sia integrabile sull'intervallo che contiene tutti e tre i punti a, b, c.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$. Allora, in base ai criteri di integrabilità, per ogni $\varepsilon > 0$ esisteranno una suddivisione P di $[a, c]$ e una suddivisione Q di $[c, b]$ tali che *

$$S^*(f, P) - S_*(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad S^*(f, Q) - S_*(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'insieme $R = P \cup Q$ risulta essere una suddivisione di $[a, b]$ su cui si avrà

$$S^*(f, R) = S^*(f, P) + S^*(f, Q), \qquad S_*(f, R) = S_*(f, P) + S_*(f, Q) \tag{6}$$

e dunque

$$S^*(f, R) - S_*(f, R) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Applicando nuovamente il criterio di integrabilità in senso invertito otteniamo unque l'integrabilità di f su $[a, b]$ e le equazioni (6) garantiscono l'additività dell'integrale rispetto al dominio.

Viceversa se f è integrabile su $[a,b]$ il criterio di integrabilità ci garantisce che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione R di $[a,b]$ tale che

$$S^*(f,R) - S_*(f,R) < \varepsilon.$$

Se ora consideriamo $R' = R \cup \{c\}$ sappiamo che $S^*(f,R') \le S^*(f,R)$ e $S_*(f,R') \ge S_*(f,R)$ dunque anche R' soddisfa la proprietà

$$S^*(f,R') - S_*(f,R') < \varepsilon.$$

Ma ora è chiaro che posto $P = R \cap [a,c]$ e $Q = R \cap [c,b]$ risulta che P e Q siano suddivisioni di $[a,c]$ e $[c,b]$ rispettivamente e che

$$\begin{aligned} S^*(f,R') &= S^*(f,P) + S^*(f,Q), \\ S_*(f,R') &= S_*(f,P) + S_*(f,Q). \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned} (S^*(f,P) - S_*(f,P)) + (S^*(f,Q) - S_*(f,Q)) &= S^*(f,R') - S_*(f,R) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Visto che entrambi gli addendi $S^* - S_*$ sono non negativi risulta che valgono separatamente le disuguaglianze

$$S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon, \qquad S^*(f,Q) - S_*(f,Q) < \varepsilon.$$

Dunque f è integrabile sia su $[a,c]$ che su $[c,b]$. E nuovamente possiamo osservare che l'integrale è additivo sul dominio. □

*** **Teorema 6.10** (integrabilità delle funzioni continue). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è limitata e Riemann-integrabile.*

integrabilità delle funzioni continue

*** *Dimostrazione.* Per il teorema di Weierstrass sappiamo che f è limitata. Per il teorema di Heine-Cantor sappiamo che f è uniformemente continua, dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Possiamo allora considerare una suddivisione P_δ con la proprietà che gli intervalli individuati dalla suddivisione abbiano tutti ampiezza minore di δ (ad esempio potremmo prendere la suddivisione formata da $(b-a)/\delta + 2$ punti equispaziati in $[a,b]$). Su ogni intervallo I di tale suddivisione si avrà che se $x, y \in I$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ da cui si deduce $\sup_I f - \inf_I f \le \varepsilon$. In particolare, sommando su tutti gli intervalli, si avrà

$$\begin{aligned} S^*(f,P_\delta) - S_*(f,P_\delta) &= \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \\ &\le \varepsilon \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Visto che questa quantità può essere resa arbitrariamente piccola per $\varepsilon \to 0$, in base ai criteri di integrabilità possiamo concludere che la funzione f è integrabile. □

integrabilità delle funzioni monotone

Teorema 6.11 (integrabilità delle funzioni monotone). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f è limitata e Riemann-integrabile.*

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che f sia crescente.

Chiaramente f è limitata in quanto $f(a) \le f(x) \le f(b)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Per avere l'integrabilità e sufficiente mostrare che esiste una successione di suddivisioni P_n tale che $S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) \to 0$. Consideriamo la suddivisione equispaziata $P_n = \{x_k\colon k = 0,1,\dots,n\}$ con $x_k = a + k(b-a)/N$. In tal caso su ogni intervallino $[x_{k-1}, x_k]$ si ha

$$\sup f([x_{k-1},x_k]) = f(x_k), \qquad \inf f([x_{k-1},x_k]) = f(x_{k-1}).$$

Dunque la differenza tra le somme superiori e le somme inferiori è telescopica e si ha, per $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} S^*(f,P) - S_*(f,P) &= \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \to 0. \end{aligned}$$

E' quanto volevamo dimostrare. □

funzione di Heaviside

***Esempio* 6.12** *(funzione di Heaviside).* Sia $a < 0 < b$. La funzione $H\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è crescente quindi integrabile.

Teorema 6.13 (continuità dell'integrale). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e tale che per ogni $c \in (a,b]$ risulta che f sia Riemann-integrabile su $[c,b]$. Allora f è Riemann-integrabile su $[a,c]$ e risulta*

$$\int_a^b f = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f.$$

Analogamente se f è integrabile su ogni intervallo $[a,c]$ con $c \in [a,b)$ allora f è integrabile su $[a,b]$ e vale

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solamente la prima parte, visto che la seconda si tratta in maniera del tutto analoga. Supponiamo quindi che f sia integrabile su ogni intervallo $[c,b]$ con $c \in (a,b]$. Sappiamo inoltre che f è limitata su tutto $[a,b]$ e quindi esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$. Fissato $\varepsilon > 0$ qualunque, scegliamo $c = a + \varepsilon/(4M)$ e, sapendo che f è integrabile su $[c,b]$, consideriamo una suddivisione Q_ε di $[c,b]$ tale che

$$S^*(f,Q_\varepsilon) - S_*(f,Q_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ma allora posto $P_\varepsilon = \{a\} \cup Q_\varepsilon$ otteniamo:

$$\begin{aligned} S^*(f,P_\varepsilon) &= S^*(f,Q_\varepsilon) + (c-a)\sup_{[a,c]} f \leq S^*(f,Q_\varepsilon) + M\cdot(c-a) \\ S_*(f,P_\varepsilon) &= S_*(f,Q_\varepsilon) + (c-a)\inf_{[a,c]} f \geq S_*(f,Q_\varepsilon) - M\cdot(c-a) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} S^*(f,P_\varepsilon) - S_*(f,P_\varepsilon) &\leq S^*(f,Q_\varepsilon) - S_*(f,Q\varepsilon) + 2M\cdot(c-a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque, la funzione f è integrabile. Ma si ha

$$\int_a^b f \leq S^*(f,P_\varepsilon) \leq S^*(f,Q_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \leq S_*(f,Q_\varepsilon) + \frac{3}{2}\varepsilon \leq \int_{a+\frac{\varepsilon}{4M}}^b f + \frac{3}{2}\varepsilon$$

$$\int_a^b f \geq S_*(f,P_\varepsilon) \geq S_*(f,P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \geq S^*(f,P_\varepsilon) - \frac{3}{2}\varepsilon \geq \int_{a+\frac{\varepsilon}{4M}}^b f - \frac{3}{2}\varepsilon$$

da cui, passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, si ottiene

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f \leq \int_a^b f \leq \lim_{c\to a^+}\int_c^b f$$

e quindi l'uguaglianza. □

***Esempio* 6.14.** La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

Dimostrazione. Su ogni intervallo $[\varepsilon,b]$ con $\varepsilon > 0$ e $b > \varepsilon$ la funzione è integrabile in quanto su tali intervalli è continua (la funzione è continua su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Inoltre la funzione è limitata, quindi per il teorema precedente possiamo concludere che è integrabile su $[0,b]$ per ogni $b > 0$.

In maniera analoga (per simmetria) la funzione è integrabile su $[a,0]$ per ogni $a < 0$. Dunque, per additività, la funzione è integrabile su ogni $[a,b]$ con $a < 0$ e $b > 0$ e di conseguenza (sempre grazie al teorema 6.9) è integrabile su ogni intervallo $[a,b]$. □

6.1 TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Teorema 6.15 (del valor medio)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste un punto $y \in (a,b)$ tale che* ***

$$\frac{\int_a^b f}{b-a} = f(y).$$

La quantità

$$\frac{\int_a^b}{b-a} f$$

si chiama *valor medio integrale* di f su $[a,b]$ e spesso si indica con il simbolo

$$\fint_a^b f.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass la funzione f ha massimo M e minimo m sull'intervallo $[a,b]$ cosicché per ogni $x \in [a,b]$ si avrà: ***

$$m \le f(x) \le M.$$

Risulta quindi, per la monotonia dell'integrale:

$$(b-a)m = \int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M = (b-a)M$$

ovvero

$$m \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le M.$$

Dunque la media integrale è un valore intermedio tra il minimo e il massimo della funzione e quindi, per il teorema dei valori intermedi, dovrà esistere un punto $y \in [a,b]$ dove la funzione assume tale valore. □

teor. fondamentale

Teorema 6.16 (Torricelli-Barrow: teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $x_0 \in I$ e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la* funzione integrale $F\colon I \to \mathbb{R}$ ***

funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^x f$$

è ben definita, è derivabile e si ha per ogni $x \in I$

$$F'(x) = f(x).$$

In particolare essendo $f \in C^0(I)$ si ha $F \in C^1(I)$.

Inoltre se $G\colon I \to \mathbb{R}$ è una qualunque funzione tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$, allora per ogni $a, b \in I$ si ha

formula fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

*** *Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che la funzione f, essendo continua, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I. Dunque l'integrale $\int_{x_0}^{x} f$ è ben definito.

Per ogni $h \neq 0$, se $x + h \in I$ per l'additività dell'integrale si ha

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f}{h} = \frac{\int_{x}^{x+h} f}{h}.$$

Applicando ora il teorema del valor medio possiamo affermare che esiste un punto $\xi(h)$ nell'intervallo di estremi x e $x + h$ tale che

$$\frac{\int_{x}^{x+h} f}{h} = f(\xi(h)).$$

Per $h \to 0$, si ha $\xi(h) \to x$ e, per continuità di f, $f(\xi(h)) \to f(x)$. Dunque abbiamo mostrato che F è derivabile in x:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

e $F'(x) = f(x)$.

Dunque se $a, b \in I$ sono punti qualunque si ha:

$$\int_a^b f = \int_{x_0}^{b} f - \int_{x_0}^{a} f = F(b) - F(a).$$

E se $G \colon I \to \mathbb{R}$ è una qualunque funzione tale che $G'(x) = f(x)$ si avrà $G'(x) = F'(x)$ per ogni $x \in I$ e dunque $(G - F)' = 0$ su I. Per i criteri di monotonia possiamo concludere che $G - F$ è costante su I: $G - F = c$. Dunque si ha

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = (G(b) - c) - (G(a) - c) = G(b) - G(a).$$

□

***Esempio* 6.17.** Si voglia calcolare

$$\int_0^b x^2 \, dx.$$

Basterà osservare che posto $G(x) = \frac{x^3}{3}$ si ha $G'(x) = x^2$ e quindi, grazie alla formula fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\int_0^b x^2 \, dx = G(b) - G(0) = \frac{b^3}{3}.$$

E' evidente quanto questo metodo risolutivo sia molto più semplice e potente di quello utilizzato nell'esempio 6.3.

primitiva

Definizione 6.18 (primitiva). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Una funzione $F: A \to \mathbb{R}$ si dice essere una* primitiva *(o* antiderivata*) di f se F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.* ***

Il teorema fondamentale del calcolo integrale può dunque essere espresso nel modo seguente: ogni funzione f continua, definita su un intervallo, ammette almeno una primitiva e se F è una qualunque primitiva di f si ha

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Per indicare la differenza $F(b) - F(a)$ si usano talvolta le seguenti notazioni:

$$[F(x)]_{x=a}^b = [F]_a^b = F(x)|_{x=a}^b = F|_a^b = F(b) - F(a).$$

Il calcolo degli integrali si riduce quindi alla determinazione delle primitive ovvero ad invertire l'operatore di derivata. Risulterà quindi importante avere degli strumenti per determinare le primitive di una funzione.

Definizione 6.19 (integrale indefinito). *L'insieme di tutte le primitive di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si indica con il simbolo* ***

$$\int f \qquad \text{oppure} \qquad \int f(x)\,dx$$

e si chiama integrale indefinito. *Il motivo di questa notazione (e del nome) deriva dal teorema fondamentale del calcolo integrale, in base al quale se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua si ha*

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b.$$

***Osservazione* 6.20.** Si faccia attenzione però che nel caso di funzioni non continue è possibile che le funzioni integrali non siano primitive. Ad esempio se si prende la funzione di Heaviside $H(x)$ definita nell'esempio 6.12 si può osservare che $\int_0^x H(t)\,dt = |x|$ è una funzione integrale ma non è una primitiva (e l'insieme delle primitive, in questo caso, è vuoto).

Se pensiamo all'operatore lineare D definito sull'insieme delle funzioni derivabili $Df = f'$ si può pensare a $\int f$ come all'insieme delle controimmagini di f tramite D ovvero:

$$\int f = D^{-1}(\{f\}) = \{F: DF = f\}.$$

Teorema 6.21 (proprietà delle primitive). *Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un intervallo non vuoto $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora* ***

1. *esiste almeno una primitiva F di f;*

2. *data una primitiva F di f ogni altra primitiva G differisce da F per una costante: $\exists c \in \mathbb{R}\colon G = F + c$.*

Detto in altri termini $\int f$ non è vuoto e se il dominio di f è un intervallo e $F \in \int f$ è una primitiva, allora

$$\int f = \{F + c\colon c \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che l'insieme delle funzioni costanti su un intervallo non è altro che $\ker D$ ovvero lo spazio di annullamento dell'operatore derivata. Stiamo dunque semplicemente osservando che le controimmagini di un operatore lineare sono spazi affini paralleli al nucleo dell'operatore.

*** *Dimostrazione.* Scelto un punto $x_0 \in I$ possiamo considerare la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci assicura che F è una primitiva di f.

Viceversa se F e G sono due primitive di f allora si ha:

$$F' = G' = f.$$

Posto $H = G - F$ avremo quindi $H' = 0$ sull'intervallo I. Per i criteri di monotonia sappiamo quindi che H è costante, ovvero esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $H(x) = c$ per ogni $x \in I$. Dunque si ottiene, come voluto: $G = F + H = F + c$. □

6.2 CALCOLO DELLE PRIMITIVE

In generale quello che ci interessa è trovare una singola primitiva in quanto in genere tutte le altre si otterranno di conseguenza molto facilmente. In base alle proprietà delle primitive, infatti, sappiamo che su ogni intervallo le primitive differiscono per una costante. Osserviamo però che se la funzione è definita sull'unione di più intervalli allora ogni intervallo può avere una costante diversa, come si vede nel seguente.

* ***Esempio 6.22*** *(primitive sugli insiemi non connessi).* Consideriamo la funzione $f(x) = 1/x$. Osserviamo che $f\colon (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è definita sull'unione di due intervalli. Per verifica diretta possiamo osservare che la funzione $F(x) = \ln|x|$ è una primitiva di f. Per ottenere l'insieme di tutte le primitive possiamo aggiungere ad F una qualunque funzione con derivata nulla sul dominio di f. Le funzioni con derivata nulla sono costanti su ogni intervallo e quindi troviamo che per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ la funzione

$$G(x) = \begin{cases} \ln(x) + c_1 & \text{se } x > 0, \\ \ln(-x) + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è una primitiva di f e non ci sono altre primitive.

In questo caso lo spazio delle primitive ha dimensione 2 in quanto il nucleo dell'operatore derivata sullo spazio delle funzioni definite sull'unione di due intervalli ha dimensione 2. Questo è l'esempio più semplice di un fenomeno piuttosto generale per cui gli operatori differenziali su uno spazio risultano strettamente legati alla topologia dello spazio stesso. In questo caso la dimensione del nucleo dell'operatore differenziale D è uguale al numero di componenti connesse del dominio delle funzioni nel dominio di D.

Come già detto utilizzeremo la notazione $\int f$ per indicare le primitive della funzione f. Ma invece di scrivere $F \in \int f$ per indicare che F è una primitiva di f potremo scrivere più semplicemente ma con abuso di notazione $\int f = F$ ricordando (come facevamo con la notazione degli o-piccolo) che tale relazione non è affatto simmetrica. Ad esempio potremo scrivere:

$$\int \cos x \, dx = \sin x.$$

Si faccia attenzione però che per alcuni la scrittura precedente è considerata sbagliata, in quanto $\sin x$ non è l'unica primitiva e si dovrebbe quindi scrivere

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c.$$

Ma abbiamo visto che se pretendiamo di scrivere tutte le primitive (e non solo una) allora sarebbe complicato scrivere il risultato quando la funzione non è definita su un singolo intervallo. Infatti se scrivessimo:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

avremmo comunque scritto solo una parte delle primitive (per quanto visto nell'esempio precedente).

Teorema 6.23 (integrali di alcune funzioni elementari)**.** *Si ha per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$*

$$\int x^\alpha \, dx \ni \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \int \frac{1}{x} \, dx \ni \ln |x|$$

$$\int e^x \, dx \ni e^x, \qquad \int \cos x \, dx \ni \sin x, \qquad \int \sin x \, dx \ni -\cos x$$

$$\int \cosh x \, dx \ni \sinh x, \qquad \int \sinh x \, dx \ni \cosh x,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx \ni \operatorname{arctg} x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \ni \arcsin x,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx \ni \operatorname{settsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx \ni \operatorname{settcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right).$$

Dimostrazione. E' sufficiente fare riferimento alla corrispondente tabella delle derivate delle funzioni elementari. □

Teorema 6.24 (linearità dell'integrale indefinito)**.** *Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e se f, g sono funzioni qualunque si ha:*

$$\int (\lambda f + \mu g) \supseteq \lambda \int f + \mu \int g$$

Dimostrazione. Ogni elemento dell'insieme che si trova sul lato destro si scrive nella forma $\lambda F + \mu G$ con $F \in \int f$ e $G \in \int g$. Dunque si ha $F' = f$ e $G' = g$ da cui

$$(\lambda F + \mu G)' = \lambda f + \mu g$$

e quindi

$$\lambda F + \mu G \in \int (\lambda f + \mu g)$$

come dovevamo dimostrare. □

Teorema 6.25 (cambio di variabile negli integrali)**.** *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se $g\colon A \to \mathbb{R}$ è derivabile e $f\colon g(A) \to \mathbb{R}$ allora* *sostituzione diretta*

   $$\int f(g(x))g'(x)\,dx \supseteq \left[\int f(y)\,dy\right]_{y=g(x)}$$

   dove si intende

   $$[F(y)]_{y=g(x)} = F(g(x));$$

2. *se $g \in C^1([a,b])$ e $f \in C^0(g([a,b]))$ allora* *cambio di variabile*

   $$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt;$$

3. *se $g \in C^1([a,b])$ è iniettiva, $f \in C^0(g([a,b]))$ allora g^{-1} è definita su $g([a,b])$ e si ha* *sostituzione inversa*

   $$\int f(x)\,dx \supseteq \left[\int f(g(t))g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Dimostrazione. Per la prima parte prendiamo una qualunque funzione H appartenente all'insieme sul lato destro. Essa sarà della forma $H(x) = F(g(x))$ con $F \in \int f$ ovvero con $F' = f$. Facciamo la derivata:

$$H'(x) = (F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Abbiamo quindi mostrato che H è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$ e quindi è elemento anche dell'insieme sul lato sinistro: era quanto dovevamo dimostrare

Per la seconda parte sappiamo che f, essendo continua, ammette almeno una primitiva $F(x)$. Per il punto precedente sappiamo che $F(g(t))$ è una primitiva di $f(g(t))g'(t)$ (basta farne la derivata per verificarlo). Dunque, utilizzando la formula fondamentale del calcolo, si ottiene:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = [F(x)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

e

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = [F(g(t))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Le due espressioni sono uguali, come volevamo dimostrare.

Per la terza parte sia F una qualunque funzione elemento dell'insieme sul lato destro della relazione che vogliamo dimostrare. Si avrà $F(x) = H(g^{-1}(x))$ con $H(t)$ primitiva di $f(g(t))g'(t)$. Ma allora, per la formula fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$H(t) - H(a) = \int_a^t f(g(s))g'(s)\,ds$$

da cui

$$F(x) - F(g(a)) = H(g^{-1}(x)) - H(a) = \int_a^{g^{-1}(x)} f(g(t))g'(t)\,dt$$

utilizzando il punto precedente sappiamo però che vale

$$F(x) - F(g(a)) = \int_a^{g^{-1}(x)} f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{x} f(s)\,ds.$$

Dunque derivando ambo i membri, grazie ancora al teorema fondamentale otteniamo:

$$F'(x) = f(x)$$

cioè $F \in \int f$, come dovevamo dimostrare. □

Le formule del teorema precedente si scrivono usualmente nella forma

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$$

dove si intende che le variabili x e y devono soddisfare la relazione $y = g(x)$ (o, viceversa, $x = g^{-1}(y)$). Per memorizzare tale formula si usa normalmente definire il *differenziale* di una funzione g come $dg(x) = g'(x)\,dx$ (coerentemente con la notazione $g' = dg/dx$) cosicché se $y = g(x)$ si ha $dy = g'(x)\,dx$. Non daremo qui una definizione formale di cosa sia un differenziale ma senz'altro utilizzeremo questa comoda notazione, pensandola semplicemente come una facilitazione tipografica.

***Esercizio* 6.26.** Vogliamo calcolare
$$\int \cos^2(x)\,dx.$$

Ricordando che $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$ si ha $\cos^2 t = (1+\cos(2t))/2$ (formula di bisezione). Dunque
$$\int \cos^2(t)\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt.$$
Chiaramente $\int \frac{1}{2}\,dt = t/2$. Nel secondo integrale possiamo fare un cambio di variabile, ponendo $2t = s$ da cui $2dt = ds$:
$$\int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int \cos(2t)\,2dt = \frac{1}{4}\left[\int \cos s\,ds\right]_{s=2t} = \frac{1}{4}[\sin s]_{s=2t}$$
$$= \frac{1}{4}\sin(2t) = \frac{1}{2}\sin t\cos t.$$
In definitiva otteniamo
$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{t+\sin t\cos t}{2}.$$

***Esempio* 6.27.** Vogliamo calcolare
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$
La funzione integranda è definita per $x \in [-1,1]$. Ci viene in mente di operare la sostituzione $x = \sin t$ con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Osserviamo che su $[-\pi/2,\pi/2]$ la funzione $\sin t$ è derivabile, invertibile e la sua inversa è $t = \arcsin x$. Informalmente si ha
$$x = \sin t, \qquad dx = \cos t\,dt$$
da cui si ottiene la formula
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos t\,dt\right]_{t=\arcsin x}.$$
Osserviamo ora che per $t \in [-\pi/2,\pi/2]$ risulta $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos t$ e dunque l'integrale diventa
$$\int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos t\,dt = \int \cos^2(t)\,dt.$$
Quest'ultimo integrale lo abbiamo calcolato nell'esercizio precedente. Dunque otteniamo:
$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &\overset{(x=\sin t)}{=} \int \cos^2(t)\,dt = \frac{t+\sin t\cos t}{2}\\ &= \frac{t+(\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t}}{2}\\ &\overset{(t=\arcsin x)}{=} \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}.\end{aligned}$$

integrazione per parti **Teorema 6.28** (integrazione per parti)**.** *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualunque, sia $g\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia $F \in \int f$. Allora* *

$$\int f \cdot g \supseteq F \cdot g - \int F \cdot g'.$$

In particolare se $f \in C^0([a,b])$ e $g \in C^1([a,b])$ e $F \in \int f$, si ha

$$\int_a^b f \cdot g = [F \cdot g]_a^b - \int_a^b F \cdot g'.$$

Dimostrazione. Ogni funzione dell'insieme di destra si scrive nella forma $F \cdot g - H$ con $H \in \int F \cdot g'$. Dunque $H' = F \cdot g'$ e, per ipotesi, $F' = f$ da cui *

$$(F \cdot g - H)' = F' \cdot g + F \cdot g' - H' = F' \cdot g = f \cdot g$$

che è quanto dovevamo dimostrare.

La seconda parte del teorema deriva direttamente dalla formula fondamentale del calcolo integrale (valida in quanto sia $f \cdot g$ che $F \cdot g'$ sono funzioni continue), osservando che

$$\left[F \cdot g - \int F \cdot g'\right]_a^b = [F \cdot g]_a^b - \int_a^b F \cdot g'.$$

□

***Esempio* 6.29.** Si voglia calcolare

$$\int x \cos x \, dx.$$

Il metodo di integrazione per parti ci permette di ricondurre l'integrale di un prodotto ad un integrale di un prodotto in cui uno dei fattori viene integrato e l'altro derivato. In questo caso sarà conveniente derivare il fattore x e integrare il fattore $\cos x$ in modo da ricondursi all'integrale di $1 \cdot \sin x$, che sappiamo svolgere. Precisamente si ha

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

***Esempio* 6.30.** Si voglia calcolare

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

In questo caso se utilizziamo l'integrazione per parti possiamo ricondurre questo integrale a $\int e^x \sin x$. Integrando ancora per parti ci si ricondurrà nuovamente ad $\int e^x \cos x$. Se però in questi passaggi si riottiene la quantità originale con un segno cambiato, si potrà risolvere l'equazione ottenuta per trovare il risultato cercato.

Precisamente:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \sin x - \left[e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx \right] \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx\end{aligned}$$

da cui:

$$2 \cdot \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

ovvero

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}.$$

*** **Teorema 6.31** (ancora integrali di funzioni elementari)**.** *Si ha*

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x,$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}.$$

*** *Dimostrazione.* In entrambi i casi l'idea è che la derivata della funzione integranda trasforma la funzione trascendente in una funzione razionale. Può quindi risultare utile applicare l'integrazione per parti nella forma:

$$\int f(x)\, dx = \int 1 \cdot f(x)\, dx = x f(x) - \int x f'(x)\, dx.$$

Nel primo caso si ha:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x.$$

Nel secondo caso:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx.$$

Operiamo quindi un cambio di variabile $y = 1 + x^2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} 2x \, dx &\overset{y=1+x^2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\, dy \\ = \frac{\ln y}{2} &= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\end{aligned}$$

da cui, in conclusione:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

□

***Osservazione* 6.32.** Se si applica il metodo di integrazione per parti nella ricerca della primitiva della funzione $\frac{1}{x \ln x}$, integrando il fattore $\frac{1}{x}$ e derivando il fattore $\frac{1}{\ln x}$ si ottiene un fenomeno a prima vista sconcertante:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x \ln x}\, dx &= \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} - \int \ln x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{-\ln^2 x}\, dx \\ &= 1 + \int \frac{1}{x \ln x}\, dx.\end{aligned}$$

Si potrebbe infatti pensare di poter semplificare gli integrali ai due lati dell'uguaglianza per ottenere $0 = 1$. Questo non si può fare perché, ricordiamolo, l'integrale indefinito è un insieme di funzioni (le primitive della funzione $\frac{1}{x \ln x}$ in questo caso) e sappiamo che sommando una costante ad una primitiva si ottiene un'altra primitiva. Quindi non ci deve stupire il fatto che sommando 1 all'insieme delle primitive questo rimanga invariato.

Per la cronaca: l'integrale in questione può essere calcolato per sostituzione, ponendo $y = \ln x$ trovando $F(x) = \ln |\ln x|$ come una delle primitive.

6.3 INTEGRALE DI UNA FUNZIONE RAZIONALE

funzione razionale

Definizione 6.33 (funzione razionale). *Una funzione f si dice essere* razionale *se si può scrivere*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

con P e Q funzioni polinomiali a coefficienti reali.

In questa sezione cercheremo di trovare un metodo per calcolare esplicitamente l'integrale $\int P(x)/Q(x)\, dx$ di una qualunque funzione razionale. Per fare ciò vogliamo scrivere il rapporto $P(x)/Q(x)$ come combinazione lineare di funzioni più semplici, di cui saremo in grado di calcolare l'integrale.

Teorema 6.34 (decomposizione complessa in fratti semplici). *Siano $u_1, \dots, u_n$ funzioni complesse della forma*

$$u_k(z) = \frac{1}{(z - \lambda_k)^{p_k}} \tag{7}$$

con $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $p_k \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$. Supponiamo che le u_k siano tra loro distinte (cioè se $\lambda_k = \lambda_j$ allora $p_k \neq p_j$). Sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ cosicché tutte le funzioni u_k sono elementi dello spazio vettoriale complesso $V = \mathbb{C}^\Omega$ cioè sono funzioni complesse definite su tutto Ω.

Allora le funzioni u_k sono linearmente indipendenti come vettori di V ovvero se esistono dei coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$\forall z \in \Omega \colon \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(z) = 0$$

allora ogni $\alpha_k = 0$ *per* $k = 1, \dots, n$.

Di conseguenza se P *e* Q *sono due polinomi con* $\deg P < \deg Q = N$ *allora si può scrivere*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} \frac{A_{kj}}{(z-\lambda_k)^j}. \tag{8}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *sono le radici complesse distinte del polinomio* Q, $p_1, \dots, p_n$ *sono le rispettive molteplicità con* $p_1 + \dots + p_n = \deg Q = N$ *e* $A_{kj} \in \mathbb{C}$ *sono opportuni coefficienti.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$ abbiamo una unica funzione che non può essere identicamente nulla (anzi: non si annulla mai).

Supponiamo allora di avere un insieme di n funzioni $u_1, \dots, u_n$ della forma (7). Eventualmente riordinando le funzioni possiamo supporre che p_n (l'esponente associato alla funzione u_n) sia il massimo degli esponenti: $p_n \geq p_k$ per $k = 1, \dots, n$. Supponiamo allora di avere una combinazione lineare identicamente nulla: $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$ e consideriamo la funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = (z-\lambda)^{p_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(z-\lambda_k)^{p_k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \frac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{(z-\lambda_k)^{p_k}} + \alpha_n. \tag{9}$$

Questa funzione è identicamente nulla (in quanto ottenuta moltiplicando la combinazione lineare identicamente nulla per il fattore $(z-\lambda)^p$). Ma si osserva che si ha

$$\lim_{z \to \lambda_n} f(z) = \alpha_n$$

in quanto

$$\lim_{z \to \lambda_n} \frac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{(z-\lambda_k)^{p_k}} = 0$$

visto che se essendo $u_k \neq u_n$ per $k < n$, deve essere $\lambda_k \neq \lambda_n$ oppure, se $\lambda_k = \lambda_n$ deve essere $p_k < p_n$. Dunque $\alpha_n = 0$ e quindi $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1} = 0$. Ci siamo dunque ricondotti ad una combinazione lineare nulla di $n-1$ funzioni. Per ipotesi induttiva si ottiene quindi $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, concludendo la dimostrazione.

Per dimostrare la seconda parte osserviamo che l'insieme dei polinomi

$$V_N = \{P \colon P \text{ polinomio}, \deg P < N\}$$

è un sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{C}^\Omega$ ed ha dimensione N (una base è data dai monomi $1, z, z^2, \dots, z^{N-1}$). Di conseguenza è facile verificare che anche lo spazio vettoriale

$$W = V_N \cdot \frac{1}{Q} = \left\{ \frac{P}{Q} \colon \deg P < N \right\}$$

delle funzioni razionali che stanno al lato sinistro di (8), ha la stessa dimensione N. D'altra parte il lato destro di (8) è una combinazione lineare di funzioni $u_{kj} = 1/(z-\lambda_k)^j$ che sono anch'esse elementi di W in quanto $(z-\lambda_k)^j$ divide $Q(x)$. Ma per quanto visto prima i vettori u_{kj} sono N vettori indipendenti e quindi sono una base di W. Significa allora che ogni elemento di W può essere scritto come combinazione lineare degli u_{kj} cioè, per ogni polinomio P con $\deg P < \deg Q$ si può ottenere l'uguaglianza (8). □

Teorema 6.35 (fattorizzazione dei polinomi a coefficienti reali). *Sia $Q(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Allora*

$$Q(x) = a \cdot (x-x_1)\cdots(x-x_k)\cdot Q_1(x)\cdots Q_m(x) \tag{10}$$

dove $a \in \mathbb{R}$, $x_1, \dots, x_k$ sono le radici (complesse) non reali di Q (eventualmente ripetute con la loro molteplicità) e

$$Q_j(x) = x^2 + \alpha_j x + \beta_j$$

per $j = 1, \dots, m$ sono polinomi monici di grado due con coefficienti α_j e β_j reali e con discriminante $\alpha_j^2 - 4\beta_j$ negativo i cui zeri (complessi coniugati) sono le radici non reali di Q.

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale dell'algebra sappiamo che

$$Q(x) = a \cdot (x-x_1)\cdots(x-x_k)\cdot(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n) \tag{11}$$

dove $x_1, \dots, x_k$ sono le radici reali del polinomio Q mentre $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici non reali.

Osserviamo che avendo Q coefficienti reali, per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $\overline{Q(z)} = Q(\bar{z})$ in quanto il coniugio lascia invariati i coefficienti del polinomio Q. In particolare se λ è una radice complessa di Q allora $Q(\bar{\lambda}) = \overline{Q(\lambda)} = \bar{0} = 0$ cioè anche $\bar{\lambda}$ è radice di Q. Dunque essendo λ_1 una radice non reale, anche $\overline{\lambda_1} \neq \lambda_1$ deve essere una radice di Q e senza perdita di generalità (riordinando le radici) possiamo supporre che sia $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Osserviamo allora che si ha

$$\begin{aligned}(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) &= (x-\lambda_1)(x-\overline{\lambda_1})\\ &= x^2 - (\lambda_1 + \overline{\lambda_1})x + \lambda_1\overline{\lambda_1}\\ &= x^2 - 2(\operatorname{Re}\lambda_1)x + |\lambda_k|^2\\ &= Q_1(x)\end{aligned}$$

se poniamo $\alpha_1 = -2\operatorname{Re}\lambda_{k+1}$ e $\beta_1 = |\lambda_{k+1}|^2$. Si osservi che α_1 e β_1 sono reali. Si itera quindi il procedimento finché non si esauriscono tutte le radici e si completa quindi la decomposizione. A posteriori dunque dovrà essere $n = 2m$ cosicchè $\deg Q = k + 2m = k + n$. □

Teorema 6.36 (decomposizione reale in fratti semplici). *Sia Q un polinomio monico a coefficienti reali che si fattorizzi nella forma:*

$$\begin{aligned}Q(x) = {}&(x-\lambda_1)^{p_1}\cdots(x-\lambda_n)^{p_n}\\ &\cdot(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\cdots(x^2+\alpha_m x+\beta_m)^{q_m}\end{aligned}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *le radici reali distinte di* Q *di molteplicità rispettivamente* $p_1, \dots, p_n$ *e* $(x^2 + \alpha_k x + \beta_k)$ *polinomi monici distinti di grado* 2 *con discriminante negativo* $\alpha_k^2 < 4\beta_k$ *con molteplicità* q_k *per* $k = 1, \dots, m$.

Se P *è un polinomio a coefficienti reali con* $\deg P < \deg Q$ *allora esistono dei coefficienti reali* A_{kj} *con* $k = 1, \dots, n$ *e* $j = 1, \dots, p_k$ *e coefficienti reali* B_{kj}*,* C_{kj} *con* $k = 1, \dots, m$ *e* $j = 1, \dots, q_k$ *tali che*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k} \frac{A_{kj}}{(x-\lambda_k)^j} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{q_k} \frac{B_{kj} + C_{kj}x}{(x^2+\alpha_k x + \beta_k)^j}.$$

Dimostrazione. Diamo un nome alle funzioni coinvolte nell'enunciato del teorema:

$$\begin{aligned} u_\lambda^j(z) &= \frac{1}{(z-\lambda)^j}, \\ v_\lambda^j(z) &= \frac{1}{(z-\lambda)^j(z-\bar\lambda)^j}, \\ w_\lambda^j(z) &= z \cdot v_\lambda^j(z). \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$(z-\lambda)(z-\bar\lambda) = z^2 - 2(\operatorname{Re}\lambda)z + |\lambda|^2$$

dunque si ha

$$\frac{B + Cx}{(x^2+\alpha x+\beta)^j} = B \cdot v_\lambda^j(x) + C \cdot w_\lambda^j(x)$$

per un opportuna scelta del numero complesso λ (per la cronaca: $\lambda = \alpha/2 + i\sqrt{\beta - \alpha^2/4}$).

Nella versione complessa di questo teorema abbiamo già mostrato che le funzioni u_λ^j sono indipendenti. Vogliamo ora mostrare che anche le funzioni u_λ^j, v_λ^j, w_λ^j sono indipendenti e per fare ciò cercheremo di dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fissato, lo spazio generato dalle funzioni

$$u_\lambda^1, u_{\bar\lambda}^1, u_\lambda^2, u_{\bar\lambda}^2, \dots, u_\lambda^p, u_{\bar\lambda}^p \tag{12}$$

coincide con lo spazio generato dalle funzioni

$$v_\lambda^1, w_\lambda^1, v_\lambda^2, w_\lambda^2, \dots, v_\lambda^p, w_\lambda^p. \tag{13}$$

Visto che le funzioni in (12) abbiamo già dimostrato essere indipendenti, sarà sufficiente mostrare che ogni combinazione lineare delle funzioni in (12) si può esprimere come combinazione lineare delle funzioni in (13).

La dimostrazione si può fare per induzione su p. Nel caso $p = 1$ si osserva che

$$
\begin{aligned}
au^1_\lambda(z) + bu^1_{\bar\lambda}(z) &= \frac{a}{z-\lambda} + \frac{b}{z-\bar\lambda} = \frac{az - a\bar\lambda + bz - b\lambda}{z^2 - (\lambda+\bar\lambda)z + \lambda\bar\lambda} \\
&= \frac{(a+b)z - a\bar\lambda - b\lambda}{z^2 - (\lambda+\bar\lambda)z + \lambda\bar\lambda} \\
&= (a+b)\cdot w^1_\lambda(z) - (a\bar\lambda + b\lambda)v^1_\lambda(z).
\end{aligned}
$$

Supponendo ora di aver fatto la dimostrazione fino a $p-1$, dimostriamo il caso generico p. Una qualunque combinazione lineare delle funzioni (12) si scrive nella forma

$$
\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{(z-\lambda)^j} + \sum_{j=1}^{p} \frac{b_j}{(z-\bar\lambda)^j} = \frac{R(Z)}{(z-\lambda)^p(z-\bar\lambda)^p}
$$

dove $R(Z)$ è un polinomio di grado al più $2p-1$. Facendo la divisione tra polinomi possiamo scrivere

$$
R(z) = S(z)(z-\lambda)(z-\bar\lambda) + \alpha z + \beta
$$

con S opportuno polinomio di grado al massimo $2p-3$. Dunque

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{(z-\lambda)^j} + \sum_{j=1}^{p} \frac{b_j}{(z-\bar\lambda)^j} = {}& \frac{S(z)}{(z-\lambda)^{p-1}(z-\bar\lambda)^{p-1}} \\
&+ \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^p(z-\bar\lambda)^p}.
\end{aligned}
$$

Il primo addendo con numeratore $S(z)$ è una funzione razionale che può essere quindi espressa come combinazione lineare delle funzioni in (12) con $p-1$ al posto di p. Dunque per ipotesi induttiva tale addendo è combinazione lineare delle funzioni in (13) con $p-1$ al posto di p. Il secondo addendo non è altro che $\alpha w^p_\lambda + \beta v^p_\lambda$. Abbiamo quindi mostrato che qualunque combinazione lineare delle (12) si scrive come combinazione lineare delle (13), come ci eravamo ripromessi di fare.

Ora, per il caso complesso che abbiamo già dimostrato, sappiamo che la funzione razionale P/Q ammette una decomposizione in fratti semplici complessi cioè può essere scritta come combinazione lineare a coefficienti complessi delle funzioni u^j_λ facendo variare λ su tutte le radici, reali e complesse, del polinomio Q e facendo variare j fino alla molteplicità di ogni radice. Ma sappiamo ora che è possibile rimpiazzare le funzioni u^j_λ e $u^j_{\bar\lambda}$ quando λ non è reale con le funzioni v^j_λ e w^j_λ in quanto lo spazio generato da tali funzioni è lo stesso.

Questo ci permette di concludere che la decomposizione cercata esiste, se ammettiamo di avere coefficienti A_{kj}, B_{kj} e C_{kj} nel campo complesso.

Per concludere ci basta verificare che in realtà tali coefficienti non possono che essere reali. Questo dipende da un semplice fatto generale.

Supponiamo che $u_1, \dots, u_n$ siano funzioni reali indipendenti e sia

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

una loro combinazione lineare a coefficienti complessi α_k. Se la combinazione u è anch'essa una funzione reale allora possiamo concludere che necessariamente tutti i coefficienti α_k sono reali. Infatti se prendiamo la parte immaginaria della combinazione lineare precedente si avrà

$$0 = (\operatorname{Im} \alpha_1) u_1 + \cdots + (\operatorname{Im} \alpha_n) u_n.$$

Ma essendo le $u_1, \dots, u_n$ funzioni indipendenti, una combinazione lineare è nulla solamente quando tutti i coefficienti sono nulli: significa che la parte immaginaria di ogni α_k è nulla, cioè che gli α_k sono reali. □

In base ai teoremi precedenti, se $P(x)/Q(x)$ è una qualunque funzione razionale reale, possiamo innanzitutto eseguire la divisione tra polinomi e trovare quindi un quozionte $S(x)$ e un resto $R(x)$ con $\deg R < \deg Q$ cosicché

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Dopodiché possiamo decomporre $R(x)/Q(x)$ in fratti semplici. L'integrale di P/Q si potrà quindi ricondurre (tramite combinazione lineare) agli integrali di S e di ognuno dei fratti semplici. L'integrale di S è banale, in quanto S è un polinomio e quindi è combinazione lineare di potenze di x.

Non ci resta quindi che trovare l'integrale dei fratti semplici, cosa che faremo nel seguente teorema.

Teorema 6.37 (integrale dei fratti semplici). *Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 - 4\beta < 0$, si ha:*

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-\lambda}\,dx &= \ln|x-\lambda| \\
\int \frac{1}{(x-\lambda)^p}\,dx &= -\frac{1}{(p-1)(x-\lambda)^{p-1}} \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \operatorname{arctg} x \\
\int \frac{1}{(1+x^2)^p}\,dx &= \frac{x}{2n(1+x^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2p-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{p-1}}\,dx \\
\int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx &= \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \\
\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}\,dx &= \left(\frac{4}{4\beta-\alpha^2}\right)^{p-\frac{1}{2}} \left[\int \frac{1}{(1+y^2)^p}\,dy\right]_{y=\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}} \\
\int \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}\,dx &= -\frac{a}{2(p-1)(x^2+\alpha x+\beta)^{p-1}} \\
&\quad + \frac{2b-a\alpha}{2}\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}\,dx
\end{aligned}
$$

Osserviamo che non è rilevante ricordarsi le formule enunciate nel teorema, converrà piuttosto ricordarsi i metodi di integrazione utilizzati nella dimostrazione.

Dimostrazione. I primi tre integrali sono immediati. Per il quarto si ha:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^p}\,dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^p}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(1+x^2)^{p-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^p}\,dx.
\end{aligned}
$$

Osservando che

$$
\int \frac{2x}{(1+x^2)^p}\,dx = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{(1+x^2)^{p-1}}.
$$

si ottiene, integrando per parti,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(1+x^2)^p}\,dx &= \int \frac{2x}{(1+x^2)^p}\cdot\frac{x}{2}\,dx \\
&= -\frac{1}{p-1}\frac{1}{(1+x^2)^{p-1}}\frac{x}{2} + \frac{1}{2p-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{p-1}}\,dx
\end{aligned}
$$

da cui segue il risultato enunciato nel teorema.

Per quanto riguarda il quinto e il sesto integrale si opera il *completamento del quadrato*:

$$\begin{aligned} x^2+\alpha x+\beta &= \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4} \\ &= \frac{4\beta-\alpha^2}{4}\left(\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^2+1\right) \end{aligned}$$

da cui, facendo il cambio di variabile

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \\ dx &= \frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}dy \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}\,dx &= \frac{4^p}{(4\beta-\alpha^2)^p}\int\frac{1}{(y^2+1)^p}\,\frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}dy \\ &= \left(\frac{4}{4\beta-\alpha^2}\right)^{p-\frac{1}{2}}\int\frac{1}{(1+y^2)^p}\,dy \end{aligned}$$

che per $p=1$ può essere calcolato immediatamente, e per $p>1$ si riconduce agli integrali già calcolati.

Nell'ultimo integrale dell'enunciato abbiamo semplicemente utilizzato l'integrale immediato:

$$\int\frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}\,dx = -\frac{1}{(p-1)(x^2+\alpha x+\beta)^{p-1}}$$

utilizzandolo per eliminare il termine di grado uno al numeratore della funzione integranda. □

6.4 integrali che si riconducono a funzioni razionali

E' importante sapere che di qualunque funzione razionale è possibile scriverne la primitiva utilizzando i metodi della sezione precedente. Allo stesso modo è utile sapere che ci sono altre casistiche che si riconducono all'integrazione di una funzione razionale.

Funzioni razionali in e^x. Se la funzione integranda $f(x)$ si scrive nella forma

$$f(x) = R(e^{\lambda x})$$

con R funzione razionale e $\lambda \neq 0$, allora si può risolvere l'integrale tramite la sostituzione $t=e^{\lambda x}$. Infatti si ha

$$\begin{cases} e^{\lambda x} = t \\ x = \frac{\ln t}{\lambda} \\ dx = \frac{1}{\lambda t} \end{cases}$$

e la funzione integranda diventa una funzione razionale:

$$\int R(e^{\lambda x})\,dx = \left[\int \frac{R(t)}{\lambda t}\,dt\right]_{t=e^{\lambda x}}$$

***Esempio* 6.38.** Si voglia risolvere l'integrale

$$\int \frac{2\sqrt{e^x}+e^{2x}}{e^x-4}\,dx.$$

Soluzione. Scriviamo la funzione integranda in funzione di $e^{\frac{x}{2}}$:

$$\frac{2\sqrt{e^x}+e^{2x}}{e^x-4} = \frac{2e^{\frac{x}{2}}+e^{4\frac{x}{2}}}{e^{2\frac{x}{2}}-4}.$$

Facendo il cambio di variabile $t = e^{\frac{x}{2}}$, $x = 2\ln t$, $dx = \frac{2}{t}\,dt$ si ottiene una funzione razionale in t:

$$\int \frac{2\sqrt{e^x}+e^{2x}}{e^x-4}\,dx = \int \frac{2t+t^4}{t^2-4}\cdot\frac{2}{t}dt = 2\int \frac{2+t^3}{t^2-4}\,dt.$$

Facendo la divisione tra i polinomi e la riduzione ai fratti semplici si ottiene

$$\int 2t\,dt + \int \frac{5}{t-2}\,dt + \int \frac{3}{t+2}\,dt = t^2 + 5\ln|t-2| + 3\ln|t+2|$$

e quindi sostituendo $t = e^{\frac{x}{2}}$ si ottiene il risultato

$$e^x + 5\ln\left|\sqrt{e^x}-2\right| + 3\ln\left(\sqrt{e^x}+2\right).$$

□

Funzioni razionali in $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x\cdot\cos x$. Se la funzione integranda $f(x)$ si scrive nella forma

$$f(x) = R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cdot\cos x)$$

con R funzione razionale (cioè rapporto di polinomi nelle tre variabili indicate) allora si può risolvere l'integrale tramite la sostituzione $t = \operatorname{tg} x$. Infatti osservando che risulta

$$1+\operatorname{tg}^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

da cui

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$
$$\sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^2 x$$
$$\sin x\cdot\cos x = \operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x$$

ponendo $t = \operatorname{tg} x$ si ha:

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2} \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{cases} \tag{14}$$

e la funzione integranda diventa una funzione razionale.

***Esempio* 6.39.** Si voglia calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x \cdot (\sin x + \cos x)}\, dx.$$

Soluzione. La funzione integranda si può scrivere nella forma

$$\frac{1}{\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x}.$$

Effettuando la sostituzione (14) si ottiene

$$\int \frac{1}{\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{t+1}\, dt = \ln|t+1| = \ln|\operatorname{tg} x + 1|.$$

□

Più in generale funzioni razionali di $\sin x$ *e* $\cos x$. Se la funzione integranda $f(x)$ si scrive nella forma

$$f(x) = R(\sin x, \cos x)$$

con R funzione razionale, allora si può risolvere l'integrale tramite la sostituzione $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Infatti con tale sostituzione si ha (usando le formule di bisezione e riconducendosi al caso precedente)

$$\begin{cases} \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = 2 \sin x \cos x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt. \end{cases} \tag{15}$$

Di nuovo con questa sostituzione la funzione integranda diventa razionale.

***Osservazione* 6.40.** Si osservi che la sostituzione (15) potrebbe essere sempre utilizzata al posto della (14) in quanto più generale. Ma, usualmente, se è possibile usare la sostituzione (14) l'integrale risulta poi più semplice da calcolare. Si faccia la prova con l'integrale dell'esempio 6.39!

***Esempio* 6.41.** Si voglia calcolare

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx.$$

Soluzione. Utilizzando la sostituzione (15) si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\, dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt \\ &= \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.\end{aligned}$$

□

Funzioni razionali con radicali. Se la funzione $f(x)$ si scrive nella forma:

$$f(x) = R(\sqrt[n]{x})$$

con R funzione razionale, allora si può risolvere l'integrale tramite la sostituzione $t = x^n$. Infatti con tale sostituzione si ha

$$\begin{cases} \sqrt[n]{x} = t \\ dx = nt^{n-1}\, dt. \end{cases} \tag{16}$$

***Esempio* 6.42.** Si voglia calcolare

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Soluzione. Si osservi che la funzione integranda può essere scritta come funzione razionale di $t = \sqrt[12]{x}$ (abbiamo scelto il minimo comune multiplo tra i radicandi in gioco: $12 = mcm(4,2,3)$)

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{x^6} + \sqrt[12]{x^4}}.$$

Dunque utilizzando la sostituzione (16) con $n = 12$ si ha

$$\int \frac{t^3}{t^6 + t^4} \cdot 12t^{11}\, dt = 12 \int \frac{t^{14}}{t^4 + t^4}\, dt = 12 \int \frac{t^{10}}{t^2 + 1}\, dt.$$

Procedendo con la divisione tra polinomi si ottiene

$$\begin{aligned}12 \int &\left[t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1}\right] dt \\ &= 12\left[\frac{t^9}{9} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{t} - \frac{t^3}{3} + t - \operatorname{arctg} t\right] \\ &= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7} + \frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} - 4\sqrt[4]{x} + 12\sqrt[12]{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x}.\end{aligned}$$

□

6.5 INTEGRALI IMPROPRI

La definizione di integrale di Riemann è stata data solamente per funzioni limitate definite su un intervallo limitato. Vogliamo ora estendere la definizione di integrale alle funzioni illimitate e agli intervalli illimitati. Lo faremo riconducendoci, tramite un limite, al caso già studiato.

Definizione 6.43 (integrabilità locale)**.** *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che f è* localmente Riemann-integrabile *se per ogni intervallo chiuso e limitato $[\alpha, \beta] \subseteq A$ risulta che f sia limitata e Riemann-integrabile su $[\alpha, \beta]$.*

***Osservazione* 6.44.** Osserviamo che se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora su ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subseteq A$ la funzione f risulta essere continua e quindi Riemann-integrabile per il teorema 6.10. Dunque ogni volta che ci viene richiesta l'integrabilità locale sarà sufficiente verificare la continuità della funzione. Lo stesso vale per le funzioni monotone: grazie al teorema 6.11 sappiamoe che una funzione monotona e Riemann-integrabile su ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ dunque anch'essa è localmente Riemann-integrabile.

Definizione 6.45 (integrale improprio)**.** *Se f è una funzione localmente Riemann-integrabile sull'intervallo $[a, b)$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$ definiamo l'integrale improprio di f su $[a, b)$ come:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

se il limite a lato destro esiste (finito o infinito).

Se f è una funzione localmente Riemann-integrabile sull'intervallo $(a, b]$ con $b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty, b)$ definiamo l'integrale improprio di f su $(a, b]$ come:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

se il limite esiste (finito o infinito).

Se f è una funzione localmente Riemann-integrabile sull'intervallo (a, b) con $a \in [-\infty, +\infty)$, $b \in (a, +\infty]$ preso un qualunque punto $c \in (a, b)$ definiamo l'integrale improprio di f su (a, b) come:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta \to b^-} \int_c^\beta f(x)\,dx\end{aligned}$$

sempre che entrambi i limiti esitano (finiti o infiniti) e non siano infiniti di segno opposto (cosicché la loro somma è ben definita). In base all'osservazione 6.46 l'integrale non dipende dal punto c scelto.

Se I è un intervallo di estremi $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$ ed esistono un numero finito di punti $x_0, \ldots, x_n \in I$ tali che $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e se f risulta essere localmente Riemann-integrabile sull'insieme $A = I \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ allora definiamo l'integrale improprio di f su A come:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

se ogni integrale improprio $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ esiste (finito o infinito) e se la somma è ben definita in quanto tutti gli integrali infiniti hanno lo stesso segno.

integrabile
convergente
divergente
indeterminato

Se l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è finito (in base ad una delle definizioni precedenti), diremo che la funzione f è integrabile in senso improprio *e diremo che l'integrale* converge*. Se invece l'integrale esiste ma non è finito, diremo che l'integrale* diverge*. Negli altri casi diremo che l'integrale è* indeterminato.

carattere

Determinare il carattere *dell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ significa dire se tale integrale è convergente, divergente o indeterminato.*

Se gli estremi di integrazione sono scambiati, $a > b$, risulta utile utilizzare anche per gli integrali impropri la convenzione già introdotta per gli integrali di Riemann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

***Osservazione* 6.46.** Nella definizione di integrale improprio sull'intervallo aperto (a, b) la scelta del punto $c \in (a, b)$ non influenza la definizione. Se infatti scegliamo due diversi punti $c, c' \in (a, b)$ per ogni $\alpha, \beta \in (a, b)$ si ha, grazie alla additività dell'integrale di Riemann:

$$\int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^\beta f(x)\,dx.$$

E quindi i limiti, se esistono, sono uguali.

***Esempio* 6.47.** La funzione $f(x) = \ln x$ può essere integrata in senso improprio sull'intervallo $[1, +\infty)$ e si ha:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \ln(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} [x\ln x - x]_1^\beta \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} (\beta\ln\beta - \beta + 1) = +\infty.\end{aligned}$$

Anche sull'intervallo $(0, 1]$ la funzione $\ln x$ ha integrale improprio

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\alpha\to0^+} [x\ln x - x]_\alpha^1 = \lim_{\alpha\to0^+} (-1 - \alpha\ln\alpha + \alpha) = -1.$$

Dunque sull'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione $\ln x$ ha integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \ln x\,dx = \int_0^1 \ln x\,dx + \int_1^{+\infty} \ln x\,dx = -1 + (+\infty) = +\infty.$$

Per abbreviare le notazioni intenderemo:

$$[F(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

osservando che se F è definita e continua agli estremi a e b questa notazione coincide con l'usuale

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Potremo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 &= 1\cdot \ln 1 - 1 - \lim_{x\to 0^+}(x\ln x - x)\\ &= -1 - 0 = -1.\end{aligned}$$

Osserviamo che se $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ è continua e $F\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ è una sua primitiva allora si avrà

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b^-}\int_c^B dx\\ &= \lim_{x\to a}(F(c) - F(x)) + \lim_{x\to b}(F(x) - F(c))\\ &= \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x) = [F(x)]_a^b.\end{aligned}$$

Dunque la formula fondamentale del calcolo integrale rimane formalmente identica per gli integrali impropri.

***Esempio* 6.48.** Per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

possiamo scegliere un qualunque punto $c\in\mathbb{R}$ e calcolare

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^c \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_c^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^c + [\operatorname{arctg} x]_c^{+\infty}\\ &= \operatorname{arctg} c - (-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} c = \pi.\end{aligned}$$

Ma più semplicemente possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

***Osservazione* 6.49.** Se $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ è limitata e Riemann-integrabile su $[a,b]$ allora, in base al teorema 6.13 si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Dunque in questo caso gli integrali impropri su $[a, b)$ e su $(a, b]$ coincidono con l'usuale integrale di Riemann (e sono quindi convergenti). Allo stesso modo se f è localmente integrabile su $[a, b)$ l'integrale improprio su $[a, b)$ e l'integrale improprio su (a, b) coincidono. Lo stesso succede se la funzione è localmente integrabile su (a, b) e consideriamo l'insieme $A = (a, b) \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. L'integrale su (a, b) coincide con l'integrale su A grazie all'additività dell'integrale rispetto al dominio.

Questo giustifica l'aver utilizzato la stessa notazione $\int_a^b$ sia per l'integrale di Riemann su $[a, b]$ sia per i diversi integrali impropri su $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) o $(a, b) \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$.

***Esempio* 6.50.** La funzione $\sin x$ pur essendo integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato (in quanto funzione continua) non ammette integrale improprio sull'intervallo $[0, +\infty)$ in quanto l'integrale:

$$\int_0^\beta \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^\beta = -\cos(\beta) + \cos(0) = 1 - \cos(\beta)$$

non ammette limite per $\beta \to +\infty$.

***Esempio* 6.51.** La funzione $\ln x$ ammette integrale improprio sull'intervallo $(0, +\infty)$ in quanto si ha:

$$\int_0^{+\infty} \ln x\, dx = [x \ln x - x]_0^{+\infty} = +\infty.$$

Ma visto che l'integrale diverge diremo che la funzione non è integrabile su tale intervallo.

***Esempio* 6.52.** La funzione $2x/(x^2 + 1)$ non è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$ in quanto si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^{+\infty} = +\infty$$
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \Big[\ln(1+x^2)\Big]_{-\infty}^{0} = -\infty$$

e $(+\infty) + (-\infty)$ è indefinito.

***Esempio* 6.53.** Si ha

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \\ &= \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_{0}^{2} = 0 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - 0 \\ &= \frac{3}{2}(1 + \sqrt[3]{4}).\end{aligned}$$

***Esempio* 6.54.** Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_0^{+\infty} = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

e

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x}\,dx = [\ln(-x)]_{-\infty}^0 = -\infty - (+\infty) = -\infty.$$

Allora l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

non è definito in quanto somma di infiniti di segno opposto.

***Osservazione* 6.55.** Attenzione a non dimenticare i punti "cattivi" all'interno dell'intervallo di integrazione. Se vogliamo valutare:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$$

Potremmo essere portati a pensare che questo integrale sia uguale a:

$$[\ln|x|]_{-1}^1 = \ln|1| - \ln|-1| = 0.$$

Invece questo integrale non è definito in quanto bisogna considerare che la funzione integranda non è definita e comunque non è limita in un intorno di $x = 0$ e quindi l'intervallo $[-1, 1]$ va spezzato nell'unione dei due intervalli $[-1, 0)$ e $(0, 1]$ da cui:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_{-1}^0 + [\ln|x|]_0^1 = -\infty + (+\infty)$$

ed essendoci una somma di infiniti con segno opposto la somma non ha senso e l'integrale improprio non è definito.

Teorema 6.56 (proprietà dell'integrale improprio)**.** *Se $f \le g$ e se entrambi gli integrali sono definiti, risulta:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Siano $a, b, c \in \bar{\mathbb{R}}$ con $a \le c \le b$. Allora nella seguente uguaglianza

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

se almeno uno dei due lati è definito allora anche l'altro lato lo è e l'uguaglianza è valida.

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x) + \mu \int_a^b g(x)$$

se il lato destro è ben definito (esistono gli integrali impropi di f e g e le operazioni hanno senso).

Sia $g\colon (a,b) \to (c,d)$ una funzione C^1 e $f\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e integrabile in senso improprio su (c,d). Siano $-\infty \le a < b \le +\infty$ e $-\infty \le c < d \le +\infty$ tali che

$$c = \lim_{x\to a^+} g(x), \qquad d = \lim_{x\to b^-} g(x).$$

Se f è integrabile in senso improprio su (c,d) allora $f \circ g$ è integrabile su (a,b) e si ha

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_c^d f(y)\,dy.$$

Se invece gli estremi sono scambiati:

$$d = \lim_{x\to a^+} g(x), \qquad c = \lim_{x\to b^-} g(x)$$

si avrà, nelle stesse ipotesi:

$$\int_a^b f(g(x))\,dx = \int_d^c f(y)\,dy.$$

Dimostrazione. Tutte queste proprietà sono già state dimostrate per l'integrale delle funzioni limitate su intervalli limitati. Si possono facilmente estendere all'integrale improprio laterale osservando che il limite mantiene le proprietà richieste. Di conseguenza le proprietà valgono per additività anche per l'integrale improprio bilaterale, facendo attenzione che non si produca una somma indeterminata $+\infty + (-\infty)$. Infine, sempre per additività, le formule sono valide per gli integrali impropri multilaterali. □

Teorema 6.57 (integrabilità delle funzioni positivi)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente Riemann-integrabile non negativa: $f \ge 0$. Allora l'integrale di f esiste (finito o infinito) ed è non negativo:* **

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Dimostrazione. Sia $c \in (a,b)$ un punto fissato e sia **

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Essendo f localmente Riemann-integrabile la funzione F è ben definita ed essendo $f \ge 0$ risulta che F è crescente in quanto se $x_2 > x_1$ essendo $f \ge 0$ si ha

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \ge \int_{x_1}^{x_2} 0\,dt = 0.$$

Dunque esistono i limiti:

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(\beta)$$
$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{x\to a^+} -F(\alpha)$$

ed essendo F crescente entrambi i limiti sono non negativi e quindi la somma dei due limiti è ben definita. □

Anche se non sappiamo calcolare esplicitamente un integrale, è spesso possibile determinarne la convergenza confrontandolo, tramite il teorema seguente, con un integrale noto.

** **Teorema 6.58** (criterio di confronto e confronto asintotico)**.** *Siano $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ (con $a \le b \le +\infty$) funzioni localmente Riemann-integrabili. Supponiamo inoltre che per ogni $x \in [a,b)$ si abbia $f(x) \ge 0$ e $g(x) \ge 0$. In queste ipotesi sappiamo che i due integrali:*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b g(x)\,dx \tag{17}$$

esistono entrambi (finiti o infiniti) e sono non negativi. Inoltre abbiamo i seguenti criteri di confronto.

1. Confronto puntuale "$\le$". *Supponiamo che per ogni $x \in [a,b)$ si abbia $f(x) \le g(x)$. Allora si ha:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{18}$$

   In particolare se l'integrale di g è convergente anche l'integrale di f è convergente mentre se l'integrale di f è divergente anche l'integrale di g è divergente.

2. Confronto asintotico "$\ll$". *Supponiamo che per $x \to b^-$ si abbia $f \ll g$ (cioè $f/g \to 0$). Allora risulta che se l'integrale di g è convergente allora anche l'integrale di f è convergente mentre se l'integrale di f è divergente anche l'integrale di g è divergente.*

3. Confronto asintotico "$\sim$". *Suponiamo che per $x \to b^-$ si abbia $f \sim g$ (cioè $f/g \to 1$). Allora i due integrali* (17) *hanno lo stesso carattere (entrambi convergenti oppure entrambi divergenti).*

Risultati analoghi valgono per funzioni definite su un intervallo aperto a sinistra: $(a,b]$ con $-\infty \le a \le b$, in tal caso nei criteri asontotici si faranno i limiti per $x \to a^+$.

** *Dimostrazione.* Gli integrali di f e g esistono grazie al teorema 6.57.

Se $f \le g$ la disuguaglianza (18) è garantità dalla proprietà di monotonia (teorema 6.56).

Se $f(x)/g(x) \to 0$ per $x \to b^-$ significa che esiste un punto $c \in [a,b)$ tale che per ogni $x \in [c,b)$ si ha $f(x)/g(x) \leq 1$ cioè $f(x) \leq g(x)$. Dunque, per l'additività e la monotonia dell'integrale, possiamo affermare che

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b g = \int_a^c f + \int_a^b g - \int_a^c g.$$

Sappiamo che gli integrali di f e g sull'intervallo $[a,c]$ sono convergenti in quanto f e g sono limitate e Riemann-integrabili su $[a,c]$. Dunque se l'integrale $\int_a^b g$ è convergente anche l'integrale $\int_a^b f$ è convergente. Viceversa se $\int_a^b f$ è divergente allora anche $\int_a^b g$ è divergente.

Nel caso in cui $f(x)/g(x) \to 1$ per $x \to b^-$ possiamo trovare un punto $c \in [a,b)$ tale per cui $\frac{1}{2} \leq f(x)/g(x) \leq 2$ per ogni $x \in [c,b)$. Si avrà allora per ogni $x \in [c,b)$

$$f(x) \leq 2g(x), \qquad g(x) \leq 2f(x)$$

e si potrà quindi procedere come nel caso precedente. □

Nei casi più frequenti il teorema precedente si applica confrontando la funzione con una potenza:

$$(x - x_0)^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sarà quindi utile sapere, come termine di paragone, per quali α queste funzioni hanno integrale convergente come nel seguente esempio.

***Esempio* 6.59.** Sia $a > 0$ e $p \in \mathbb{R}$. Gli integrali ***

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{x^p}\, dx$$

sono convergenti se e solo se $p > 1$.

Sia $x_0 \in [a,b]$ e $p \in \mathbb{R}$. Gli integrali

$$\int_a^{x_0} \frac{1}{(x-x_0)^p}, \qquad \int_{x_0}^b \frac{1}{(x-x_0)^p}$$

sono convergenti se e solo se $p < 1$.

La verifica si fa facilmente valutando il limite della primitiva $F(x) = x^{1-p}/(1-p)$ negli estremi dell'intervallo.

***Esempio* 6.60.** L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

è convergente in quanto per $x \to +\infty$ risulta $e^{-x^2} \ll 1/x^2$ e l'integrale di $1/x^2$ è convergente (esempio 6.59) in un intorno di $+\infty$ e di $-\infty$.

L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

è convergente in quanto per $x \to +\infty$ risulta $1/(1+x^2) \sim 1/x^2$.

L'integrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$$
è divergente perché per $x \to +\infty$ si ha $1/\ln x \gg 1/x$ e per $x \to 1^+$ si ha $1/\ln x \sim 1/(x-1)$. Per $p = 1$ gli integrali di $1/x$ a $+\infty$ e di $1/(x-1)$ in 1 sono entrambi divergenti.

Se $f\colon [a, +\infty)$ è una funzione localmente Riemann-integrabile e se $f(x) \to \ell \neq 0$ per $x \to +\infty$ allora l'integrale di f è divergente. Se $\ell > 0$ esisterà $c > a$ tale che per $x > c$ si abbia $f(x) \geq 0$ (permanenza del segno). Visto che $f(x) \sim \ell$ per $x \to +\infty$ possiamo quindi concludere che $\int_c^{+\infty} f(x) = +\infty$ e quindi anche $\int_a^{+\infty} f(x) = +\infty$. Se $\ell < 0$ si può cambiare segno ad f e ripetere l'argomento precedente si scopre quindi che in questo caso l'integrale di f è $-\infty$.

***Esercizio* 6.61.** Si mostri con un esempio che se una funzione f ha integrale convergente sull'intervallo $[0, +\infty)$ non è detto che $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

** **Teorema 6.62** (criterio di convergenza assoluta)**.** *Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente Riemann-integrabile. Allora anche $|f|$ è localmente Riemann-integrabile e se*
$$\int_a^b |f(x)| < +\infty$$
(cioè $|f|$ è integrabile in senso improprio) allora anche f è integrabile in senso improprio e
$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty$$

Dimostrazione. Poniamo $f = f^+ - f^-$ con $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$. Se f è localmente Riemann-integrabile f^+ e f^- sono localmente Riemann-integrabili (grazie al teorema 6.8). Osserviamo che si ha $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Visto che $0 \leq f^+ \leq |f|$ possiamo applicare i criteri di confronto e affermare che f^+ ha integrale convergente. Lo stesso vale per f^- e dunque per $f = f^+ - f^-$. Inoltre
$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b f^+ - \int_a^\beta f^-\right| \leq \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b |f|.$$
□

Definizione 6.63 (convergenza assoluta)**.** *Quando*
$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty$$
diremo che l'integrale di f è assolutamente convergente *o che f è* assolutamente integrabile *(in senso improprio). Il teorema precedente ci garantisce che una funzione assolutamente integrabile è integrabile.*

***Esempio* 6.64.** L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \cdot e^{-x} \, dx$$

è assolutamente convergente (e quindi convergente) in quanto la funzione integranda è continua, e si ha

$$\left| \sin(x^2) \cdot e^{-x} \right| \le e^{-x}$$

da cui, per confronto,

$$\int \left| \sin(x^2) \cdot e^{-x} \right| dx \le \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx < +\infty.$$

***Esempio* 6.65** *(funzione integrabile ma non assolutamente).* Si consideri la funzione $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da *

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Visto che $f(x) \to 1$ per $x \to 0^+$ la funzione f può essere estesa per continuità ad una funzione continua sull'intervallo $[0, +\infty)$ ponendo $f(0) = 1$. Dunque l'integrale converge sull'intervallo $(0, 1]$ e ci si riduce a considerare l'intervallo $[1, +\infty)$.

Integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx &= \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx \\ &= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx.\end{aligned}$$

Osserviamo ora che la funzione $\frac{\cos x}{x^2}$ è integrabile per il criterio della convergenza assoluta, in quanto:

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \le \frac{1}{x^2}$$

che è integrabile su $[1, +\infty)$. Dunque la nostra funzione ha integrale convergente anche in $[1, +\infty)$ e dunque ha integrale convergente su tutto $(0, +\infty)$.

Tale funzione non è però integrabile assolutamente. Infatti si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &\ge \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \, dx \\ &= \frac{\int_0^{\pi} \sin x \, dx}{(k+1)\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi}\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \ge \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(k+1)\pi} = +\infty.$$

I criteri che abbiamo visto fin'ora mettono in evidenza una notevole analogia tra serie e integrali. Determinare la convergenza di un integrale è però, in generale, più semplice che determinare la convergenza della corrispondente serie. Nell'esercizio seguente, ad esempio, è sufficiente trovare una primitiva delle funzioni integrande, per determinare il carattere dell'integrale.

***Esercizio* 6.66.** Si determini per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risultano convergenti gli integrali:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}\,dx, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx.$$

** **Teorema 6.67** (collegamento tra serie ed integrali impropri)**.** *Sia* $f\colon [1,+\infty)$ *una funzione decrescente non negativa e sia* $a_k = f(k)$*. Allora la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

è convergente se e solo se è convergente l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

E, più precisamente, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *si ha*

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} a_k - \int_1^n f(x)\,dx \le a_1. \tag{19}$$

** *Dimostrazione.* Visto che la funzione f, è non negativa e monotona, l'integrale improprio di f su $[1,+\infty)$ esiste (finito o infinito) per il teorema 6.57. Anche la serie $\sum f(k)$ essendo a termini non negativi risulta essere determinata.

Essendo f decrescente, per ogni $x \in [k, k+1]$ si ha

$$f(k+1) \le f(x) \le f(k)$$

integrando su $[k, k+1]$ si ottiene

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le f(k)$$

e sommando per $k = 1, \dots, n-1$ si ottiene:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

che implica la (19) se $n \in \mathbb{N}$. Facendo tendere $n \to +\infty$ la (19) rimane comunque verificata. La prima disequazione ci permette di stimare l'integrale con la serie e la seconda ci permette viceversa di stimare la serie con l'integrale. Dunque se uno dei due converge anche l'altro converge, come volevamo dimostrare. □

stima asintotica $n!$

***Esempio* 6.68** *(stima asintotica di* $\ln n!$*).* Osserviamo che

$$\ln(n!) = \ln \prod_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Applichiamo lo stesso procedimento utilizzato nel teorema precedente alla funzione $f(x) = \ln x$. Visto che il logaritmo è crescente (invece che decrescente) otterremo delle stime rovesciate, ma analoghe. Ripetendo con attenzione i conti, si ottiene:

$$\int_1^n \ln(x)\, dx \le \sum_{k=2}^{n} \ln k = \sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_1^{n+1} \ln(x)\, dx$$

e calcolando gli integrali: $\int \ln x = x \ln x - x$ si ottiene

$$n \ln n - n + 1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln(n+1) - n - \ln 2 + 2$$

da cui, dividendo ambo i membri per $n \ln n$ e facendo tendere $n \to +\infty$ si trova

$$\frac{\ln n!}{n \ln n} \to 1$$

ovvero

$$\ln(n!) \sim n \ln n \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Nella sezione seguente daremo la formula di Stirling: una stima asintotica più precisa (ma molto più complicata da dimostrare) del fattoriale.

6.6 ALCUNE APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE

***Esempio* 6.69** *(la funzione* Γ *Eulero).* Si definisce $\Gamma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ come

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

L'integrale converge per ogni $x > 0$ in quanto posto $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ per $t \to 0^+$ si ha $f(t) \sim t^{x-1}$ che ha integrale convergente in un intorno di 0 mentre per $t \to +\infty$ si ha $f(t) \ll e^{-t/2}$ che ha integrale convergente in un intorno di $+\infty$.

Integrando per parti si ottiene una interessante proprietà della funzione Γ:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x}\, dt &= \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} x t^{x-1}\, dt \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \end{aligned}$$

cioè $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Osservando che $\Gamma(1) = 1 = 0!$ si può quindi dimostrare, per induzione, che $\Gamma(n+1) = n!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo quindi trovato una funzione che estende il fattoriale da $\mathbb{N}$ a tutto l'intervallo di numeri reali $(-1, +\infty)$.

Teorema 6.70 (irrazionalità di π). *Il numero π è irrazionale.* *π è irrazionale*

Dimostrazione. Il nostro primo obiettivo è quello di trovare delle formule ricorsive per il calcolo del seguente integrale:

$$I_n = \int_0^\pi x^n(\pi - x)^n \sin x \, dx.$$

Per fare ciò osserviamo che se $n \geq 1$ la funzione $x^n(\pi - x)^n$ si annulla agli estremi di integrazione quindi integrando per parti si ottiene:

$$I_n = \int_0^\pi \left[nx^{n-1}(\pi - x)^n - nx^n(\pi - x)^{n-1} \right] \cos x \, dx$$

supponendo ora $n \geq 2$ di nuovo la funzione tra parentesi quadre si annulla agli estremi dell'intervallo di integrazione e quindi integrando nuovamente per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}
I_n = &- \int_0^\pi \big[n(n-1)x^{n-2}(\pi - x)^n - 2n^2 x^{n-1}(\pi - x)^{n-1} \\
&\quad + n(n-1)x^n(\pi - x)^{n-2} \big] \sin(x) \, dx \\
&= 2n^2 I_{n-1} - (n^2 - n) \int_0^\pi \left[(\pi - x)^2 + x^2 \right] x^{n-2}(\pi - x)^{n-2} \sin x \, dx \\
&= 2n^2 I_{n-1} - (n^2 - n) \int_0^\pi \left[\pi^2 - 2x(\pi - x) \right] x^{n-2}(\pi - x)^{n-2} \sin x \, dx \\
&= 2n^2 I_{n-1} - (n^2 - n)\pi^2 I_{n-2} + 2(n^2 - n) I_{n-1}
\end{aligned}$$

da cui

$$I_n = (4n^2 - 2n) I_{n-1} - (n^2 - n)\pi^2 I_{n-2}. \tag{20}$$

Supponiamo ora per assurdo che sia $\pi = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e consideriamo la successione

$$a_n = \frac{q^{2n}}{n!} I_n.$$

Possiamo calcolare i primi due termini della successione a_n:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{q^0}{0!} \int_0^\pi \sin x \, dx = 2 \in \mathbb{Z}, \\
a_1 &= \frac{q^2}{1!} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin x \, dx = q^2 \int_0^\pi (2x - \pi) \cos x \, dx \\
&= 2q^2 \int_0^\pi \sin x \, dx = 4q^2 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Inoltre la relazione di ricorrenza (20) si traduce in:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{q^{2n}}{n!} \left(-(n^2 - n) \frac{p^2}{q^2} \frac{(n-2)!}{q^{2n-4}} a_{n-2} + (4n^2 - 2n) \frac{(n-1)!}{q^{2n-2}} a_{n-1} \right) \\
&= -q^2 p^2 a_{n-2} + (4n - 2) q^2 a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Per induzione si trova quindi che $a_n \in \mathbb{Z}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

D'altra parte osservando che per $x \in [0, \pi]$ si ha

$$0 \leq x^n(\pi - x)^n \sin x \leq x^n(\pi - x)^n \leq \pi^n \pi^n = \pi^{2n}$$

otteniamo

$$0 \leq I_n \leq \pi^{2n+1}$$

cioè

$$0 \leq a_n \leq \frac{q^{2n}}{n!}\pi^{2n+1} \to 0.$$

Dunque abbiamo scoperto che $a_n \to 0$. D'altra parte abbiamo visto che $a_n \in \mathbb{Z}$ e certamente $a_n > 0$ in quanto $I_n \neq 0$ visto che f_n è una funzione continua, non negativa e non identicamente nulla. Ma non è possibile che una successione di numeri interi positivi converga a zero: abbiamo quindi ottenuto l'assurdo. □

prodotto di Wallis

Teorema 6.71 (prodotto di Wallis)**.** *Si ha* *

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

binomiale centrale

E si ottiene di conseguenza la seguente stima asintotica per il coefficiente binomiale centrale

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \qquad \textit{per } n \to +\infty.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione di integrali:

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n(x)\,dx.$$

Essendo $0 \leq \sin^n(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0, \pi]$ ed essendo $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$ per ogni $x \in [0, \pi]$ è chiaro che I_n è una successione decrescente di numeri positivi.

Da un calcolo diretto troviamo che

$$I_0 = \int_0^\pi 1\,dx = \pi, \qquad I_1 = \int_0^\pi \sin(x)\,dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

Se $n \geq 0$, integrando per parti troviamo invece una relazione ricorsiva

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^\pi \sin^{n+1}(x)\sin(x)\,dx \\
&= \Big[-\sin^{n+1}(x)\cos(x)\Big]_0^\pi + (n+1)\int_0^\pi \sin^n \cos^2(x)\,dx \\
&= 0 + (n+1)\int_0^\pi \sin^n(1 - \sin^2(x))\,dx \\
&= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

da cui
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
Ricordando che I_n è decrescente si ottiene (mettendo $2n$ al posto di n)
$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot I_{2n} = I_{2n+2} \le I_{2n+1} \le I_{2n}$$
Cioè
$$1 \le \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \le \frac{2n+2}{2n+1} \to 1$$
da cui ottieniamo che $I_{2n+1}/I_{2n} \to 1$.

Ma la formula ricorsiva ci permette di calcolare separatamente i termini pari e dispari della successione:
$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) \cdot \pi$$
$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \right) \cdot 2.$$
In conclusione, visto che π compare nella formula dei termini pari, ma non in quella dei termini dispari, e visto che le due espressioni sono asintotiche possiamo ottenere la formula per il calcolo di π:
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}. \end{aligned}$$

Per ottenere una stima sul binomiale centrale cerchiamo di riscrivere le formule precedenti tramite il fattoriale. Denotiamo con $n!!$ (doppio fattoriale) il prodotto dei numeri fino a n e con la stessa parità di n (cioè un numero ogni due):
$$\begin{cases} 0!! = 1 \\ 1!! = 1 \\ (n+2)!! = (n+2) \cdot n!! \end{cases}$$
Più esplicitamente possiamo scrivere il doppio fattoriale distinguendo tra i pari i dispari:
$$(2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \ldots 4 \cdot 2 = \prod_{k=1}^{n} 2k,$$
$$(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \ldots 4 \cdot 3 = \prod_{k=1}^{n} (2k+1).$$

Osserviamo dunque che

$$(2n)!! = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$$

ma anche

$$(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$$

Dunque la stima asintotica di Wallis si può scrivere come

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{2}} &\sim \sqrt{\frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n)!} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{(2^n)^2(n!)^2}{(2n)!}\end{aligned}$$

da cui

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

□

***Osservazione* 6.72.** Non è difficile stimare l'errore che si commette nell'approssimare π tramite la formula di Wallis. Posto

$$P_n = 2\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

la successione P_n converge crescendo a π e si ha

$$\begin{aligned}\ln\frac{\pi}{P_n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\frac{(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{4k^2-1}\right)\\ &\le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{4n-2}\end{aligned}$$

da cui, usando il fatto che per x piccolo vale $e^{2x}-1 \le x$, si ha

$$0 \le \pi - P_n = P_n\left(\frac{\pi}{P_n}-1\right) \le \pi\left(e^{\frac{1}{4n-2}}-1\right) \le \frac{\pi}{2n} \le \frac{1}{n}.$$

Si scopre dunque che la convergenza è piuttosto lenta, per calcolare N cifre decimale bisogna moltiplicare tra loro 10^N termini. Tramite calcolatore siamo comunque in grado di ottenere le prime cifre di π: 3.14159 (si veda il codice a pagina 366).

formula di Stirling

Teorema 6.73 (formula di Stirling). *Si ha* *

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n} \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Dimostrazione. Si osservi che la tesi:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot n^n}{n!\cdot e^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
è equivalente, passando ai logaritmi, a dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln n + n\ln n - \ln(n!) - n\right) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi).$$
La prima parte della dimostrazione sarà volta a dimostrare che il limite precedente esiste ed è finito. Alla fine, per trovare il valore esatto, si utilizzerà la formula di Wallis. La quantità $n\ln n - n$ è, a meno di una costante additiva, l'integrale del logaritmo sull'intervallo $[1, n]$. Abbiamo già visto nell'esempio 6.68 che $\ln(n!)$ si ottiene approssimando tale integrale con dei rettangoli. Se procediamo invece con una approssimazione tramite trapezi, otteniamo una stima più precisa che ci darà il termine aggiuntivo $\frac{1}{2}\ln n$, necessario per far convergere il limite.

Osserviamo in generale che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione concava allora il grafico di f è compreso tra la retta passante per gli estremi $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (retta secante) e una qualunque retta tangente, ad esempio la retta tangente in $((a+b)/2, f((a+b)/2))$. Di conseguenza l'area sotto il grafico, cioè $\int_a^b f(x)\,dx$ è compreso tra le aree dei due corrispondenti trapezi rettangoli. L'altezza di entrambi i trapezi è pari a $(b-a)$ e l'area si calcola moltiplicando l'altezza per la media delle basi. Nel caso del trapezio con lato obliquo sulla secante, la media delle basi è $(f(a)+f(b))/2$, nel caso del trapezio con lato obliquo sulla retta tangente nel punto medio, la media delle basi è uguale alla sezione nel punto medio: $f((a+b)/2)$. Si ottiene dunque, per ogni f concava:
$$(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2} \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Applicando queste stime alla funzione $f(x) = \ln x$ nell'intervallo $[k, k+1]$ si ottiene:
$$\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2} \le \int_k^{k+1} \ln x\,dx \le \ln\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Chiamiamo a_k la differenza tra le prime due quantità. Chiaramente $a_k \ge 0$ e risulta
$$\begin{aligned}
a_k &= \int_k^{k+1} \ln x\,dx - \frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2} \\
&\le \ln\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{4(k^2+k)}\right) \\
&= \frac{1}{8k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{per } k\to+\infty.
\end{aligned}$$

La serie $\sum a_k$ è dunque convergente ovvero la successione

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

è convergente. Chiamiamo ℓ il limite di A_n. Si ha:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln x \, dx - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} \\ &= \int_1^n \ln x \, dx - \sum_{k=2}^{n-1} \ln k - \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln n}{2} \\ &= [x \ln x - x]_1^n - \sum_{k=1}^{n} \ln k + \frac{\ln n}{2} \\ &= n \ln n - n + 1 - \ln(n!) + \frac{\ln n}{2} \to \ell \end{aligned}$$

da cui

$$e^{A_n} = \frac{n^n \cdot e \cdot \sqrt{n}}{e^n \cdot n!} \to e^\ell$$

ovvero, posto $c = e/e^\ell$,

$$n! \sim c \cdot \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n}.$$

Per determinare la costante incognita c possiamo sfruttare la formula di Wallis sul coefficiente binomiale centrale:

$$\begin{aligned} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} &\sim \frac{c \dfrac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}}}{\left(c \dfrac{n^n \sqrt{n}}{e^n}\right)^2} \\ &= \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{c\sqrt{n}} = \frac{4^n \sqrt{2}}{c\sqrt{n}} \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{2}}{c}$$

e quindi $c = \sqrt{2\pi}$. □

7 SPAZI DI FUNZIONI

L'astrazione è una attività tipica della matematica. I risultati che abbiamo visto fin'ora riguardano per lo più lo spazio $\mathbb{R}$ dei numeri reali e in parte lo spazio $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. E' però evidente che molti di questi risultati si estendono ad altre situazioni più generali. Identificare le proprietà fondamentali che stanno alla base di un teorema è forse l'attività più importante svolta dalla matematica. Tipicamente l'identificazione di queste proprietà oltre a generalizzare un risultato ne rende anche più semplice la dimostrazione. Infatti una volta identificate le ipotesi minime del teorema gli strumenti a nostra disposizione pure si riducono e sarà più facile capire quali andranno utilizzati. D'altra parte non potremo portare all'estremo questo tentativo di generalizzazione in quanto ci si accorge presto che la fauna composta dagli spazi che vanno via via a coprire tutte le possibili tipologie diventa subito enorme e avere in mente tutte le definizioni diventa troppo oneroso.

Si veda la figura 1 per avere un quadro relazionale degli spazi che andremo ora ad introdurre. Gli insiemi sono dati per noti (si vedano gli appunti di logica [5]). Anche gli spazi vettoriali (algebra lineare) li diamo per noti, in quanto sono usualmente oggetto del corso di geometria. Gli spazi topologici verranno solamente accennati in quanto non saranno direttamente utili ai nostri scopi e una trattazione completa richiederebbe molto tempo. Per lo stesso motivo mancano completamente da questa classificazione anche altri spazi molto rilevanti (ad esempio i gruppi e le varietà differenziali).

** **Definizione 7.1** (spazio metrico). *Diremo che $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è una* distanza *su X se per ogni $x, y, z \in X$ valgono le seguenti proprietà* *distanza*

1. $d(x, y) \geq 0$ *(positività);*
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(disuguaglianza triangolare);*
3. $d(x, y) = 0$ *se e solo se* $x = y$ *(separazione);*
4. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simmetria).*

Se d è una distanza diremo che X è uno spazio metrico *(metrizzato da d).* *spazio metrico*

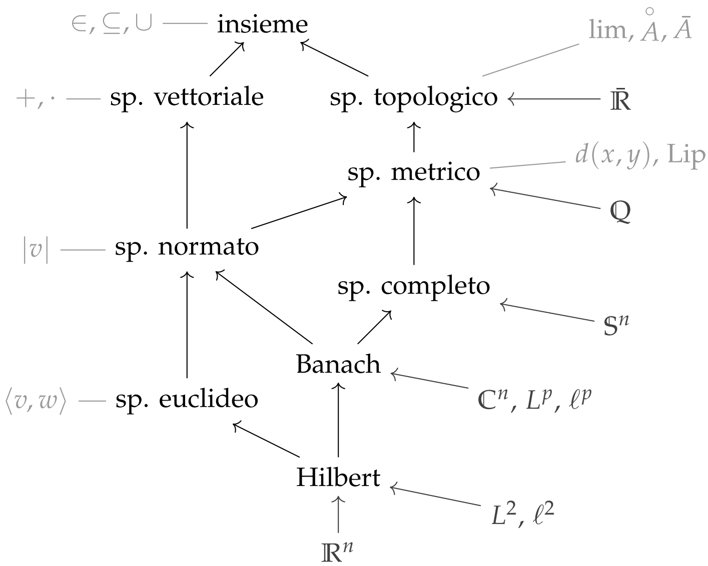


Figura 1: Strutture matematiche che astraggono lo spazio $\mathbb{R}^n$. La freccia nera significa: "è un", la freccia scura: "è un esempio di", la linea chiara: "è una operazione tipica di".

Osserviamo che dalle disuguaglianze triangolari:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \qquad d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z)$$

disuguaglianza triangolare inversa

si ottiene la *disuguaglianza triangolare inversa*:

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|.$$

Definizione 7.2 (convergenza). *Se $x_n \in X$ è una successione di punti di uno spazio metrico X e $x \in X$ diremo che x_n converge a x e scriveremo* *

$$x_n \to x$$

se $d(x_n, x) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Si noti che l'usuale convergenza in $\mathbb{R}$ non è altro che la convergenza di $\mathbb{R}$ visto come spazio metrico con la distanza euclidea $d(x,y) = |x-y|$.

Con l'artificio $d(x_n,y_n) - d(x,y) = d(x_n,y_n) - d(x_n,y) + d(x_n,y) - d(x,y)$ e utilizzando la disuguaglianza triangolare inversa si può facilmente risolvere il seguente.

***Esercizio* 7.3** *(continuità della distanza).* Dimostrare che se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ allora $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.

Definizione 7.4 (spazio normato). *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.* *

norma

Una funzione $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ si dice essere una norma *su V se per ogni $v, w \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:*

1. *$\varphi(v) \geq 0$ (positività);*

2. *$\varphi(\lambda v) = |\lambda| \cdot \varphi(v)$ (omogeneità e simmetria);*

3. *$\varphi(v + w) \leq \varphi(v) + \varphi(w)$ (disuguaglianza triangolare);*

4. *$\varphi(v) = 0$ se e solo se $v = 0$ (separazione).*

Se φ è una norma su V diremo che V è uno spazio vettoriale normato *da φ.* normato

Se φ è una norma la funzione $d(v, w) = \varphi(v - w)$ è chiaramente una distanza che si chiama distanza indotta *da φ. In particolare ogni spazio normato è anche uno spazio metrico rispetto alla distanza indotta dalla norma.* distanza indotta

Usualmente si utilizzano le notazioni $|v|$ o $\|v\|$ per indicare una norma $\varphi(v)$.

Visto che uno spazio normato è anche uno spazio metrico, negli spazi normati è definita una convergenza. E' facile verificare che la norma risulta essere continua rispetto a tale convergenza, nel senso che se $v_k \to v$ (ovvero $\varphi(v_k - v) \to 0$) allora $\varphi(v_k) \to \varphi(v)$.

Definizione 7.5 (spazio euclideo)**.** *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Una funzione $b \colon V \times V \to \mathbb{R}$ si dice essere un* prodotto scalare *su V se b è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva, ovvero se per ogni $u, v, w \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:* prodotto scalare

1. *$b(v, v) \geq 0$ (positività);*

2. *$b(\lambda u + \mu v, w) = \lambda b(u, w) + \mu b(v, w)$ e $b(u, \lambda v + \mu w) = \lambda b(u, v) + \mu b(u, w)$ (bilinearità);*

3. *$b(v, w) = b(w, v)$ (simmetria);*

4. *$b(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0$ (non degenerazione).*

Se b è un prodotto scalare su V diremo che V è uno spazio euclideo *(con prodotto scalare b).*

Usualmente si utilizzano le notazioni $v \cdot w$, (v, w), $\langle v, w\rangle$ o $\langle v|w\rangle$ per denotare un prodotto scalare $b(v, w)$.

Se b è un prodotto scalare su V il teorema seguente ci garantisce che che la funzione $\varphi(v) = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ è una norma su V.

Dunque uno spazio euclideo ha, in modo naturale, una struttura di spazio normato e di spazio metrico.

Teorema 7.6 (proprietà del prodotto scalare)**.** *Sia V uno spazio euclideo con prodotto scalare $\langle v, w\rangle$. Si definisca $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Allora $|v|$ è una norma su V e per ogni $v, w \in V$ valgono le seguenti proprietà:*

1. sviluppo del binomio sviluppo del binomio

$$|v + w|^2 = |v|^2 + 2\langle v, w\rangle + |w|^2;$$

teorema di Pitagora

2. teorema di Pitagora

$$\langle v, w\rangle = 0 \implies |v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2 : \tag{1}$$

disuguaglianza di Young

3. disuguaglianza di Young

$$\langle v, w\rangle \leq \frac{|v|^2 + |w|^2}{2}; \tag{2}$$

disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

4. disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\langle v, w\rangle \leq |v| \cdot |w|; \tag{3}$$

proprietà del parallelogramma

5. proprietà del parallelogramma

$$|v+w|^2 + |v-w|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2. \tag{4}$$

6. continuità

$$\textit{se } v_k \to v \textit{ e } w_k \to w \textit{ allora } \langle v_k, w_k\rangle \to \langle v, w\rangle.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $|v|$ è ben definita per ogni $v \in V$ in quanto il prodotto scalare $\langle v, v\rangle$ per definizione non è mai negativo. Allora in generale si ha, sfruttando la bilinearità, l'usuale sviluppo del quadrato del binomio:

$$\begin{aligned} |v+w|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle = \langle v+w, v\rangle + \langle v+w, w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = |v|^2 + 2\langle v, w\rangle + |w|^2. \end{aligned}$$

Il teorema di Pitagora segue immediatamente. Ma allora si ottiene facilmente la disuguaglianza di Young:

$$0 \leq |v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2\langle v, w\rangle$$

e la proprietà del parallelogramma:

$$|v+w|^2 + |v-w|^2 = |v| + 2\langle v, w\rangle + |w| + |v| - 2\langle v, w\rangle + |w|.$$

Ora se $|v| = |w| = 1$ la disuguaglianza di Young ci dice che

$$\langle v, w\rangle \leq 1.$$

Ma allora per ogni $v \neq 0$ e $w \neq 0$ si ottiene la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\frac{\langle v, w\rangle}{|v| \cdot |w|} = \langle \frac{v}{|v|}, \frac{w}{|v|}\rangle \leq 1.$$

Se invece $v = 0$ o $w = 0$ la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è ovvia in quanto per ogni $u \in V$ si ha $\langle 0, u\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$ per bilinearità.

Per quanto riguarda la continuità ricordiamoci che $v_k \to v$ significa $\|v_k - v\| \to 0$. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}\langle v_k, w_k\rangle - \langle v, w\rangle &= \langle v_k, w_k\rangle - \langle v, w_k\rangle + \langle v, w_k\rangle - \langle v, w\rangle \\ &= \langle v_k - v, w_k\rangle + \langle v, w_k - w\rangle\end{aligned}$$

e, utilizzando Cauchy-Schwarz se $v_k \to v$ e $w_k \to w$ otteniamo

$$\begin{aligned}|\langle v_k, w_k\rangle - \langle v, w\rangle| &\le |v_k - v| \cdot |w_k| + |v| \cdot |w_k - w| \\ &\to 0 \cdot |w| + |v| \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ha una struttura euclidea canonica, come nella seguente.

* **Definizione 7.7** (struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$). *Un vettore $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ è definito come una n-upla di numeri reali:*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Su $\mathbb{R}^n$ possiamo allora definire il prodotto scalare:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Questo prodotto scalare induce la norma euclidea:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

La distanza indotta da tale norma si chiama distanza euclidea*:* *distanza euclidea*

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Nel caso $n = 1$ la norma coincide con il valore assoluto e questo giustifica l'aver utilizzato la stessa notazione.

Se identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ associando al numero complesso $z = x + iy$ il punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ possiamo osservare che la norma euclidea coincide con il modulo del numero complesso:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|.$$

Dunque $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, sono spazi euclidei, spazi normati e spazi metrici rispetto alla struttura euclidea canonica.

Esempio 7.8 *(distanza Manhattan).* Su $\mathbb{R}^2$ possiamo definire una norma, chiamata *norma Manhattan*, come segue: norma Manhattan

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = |x_1| + |x_2|.$$

La distanza indotta $d(p, q)$ rappresenta la lunghezza del percorso più breve per andare da p a q muovendosi solamente in orizzontale o verticale (come se fossimo sulle strade di Manhattan).

La norma Manhattan non è euclidea nel senso che non è possibile definire un prodotto scalare che induca tale norma. Infatti se esistesse un tale prodotto scalare dovrebbe essere valida la proprietà del parallelogramma (4) e invece osserviamo che scelto $v = (1, 0)$ e $w = (0, 1)$ si ha

$$\varphi(v + w)^2 + \varphi(v - w)^2 = 8 \neq 4 = 2\varphi(v)^2 + 2\varphi(w)^2.$$

L'insieme $B_R(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) < R\}$ dei punti di $\mathbb{R}^2$ che distano meno di R dal punto $\boldsymbol{x}_0$ (si veda la definizione 7.12) è un quadrato con le diagonali, di lunghezza $2R$, parallele agli assi coordinati. Se come norma φ avessimo scelto la norma euclidea canonica di $\mathbb{R}^2$ l'insieme $B_R(\boldsymbol{x}_0)$ sarebbe risultato essere un cerchio di raggio R centrato in $\boldsymbol{x}_0$. In generale le norme indotte da un prodotto scalare si riconoscono dalla forma di questi insiemi: solo quando si ottengono ellissi (o ellissoidi se siamo in dimensione più alta) la norma è euclidea. Per le altre norme si potranno ottenere dei generici insiemi convessi simmetrici rispetto al centro $\boldsymbol{x}_0$.

Esempio* 7.9** *(norma p).** Per ogni $p \geq 1$ si può definire su $\mathbb{R}^n$ la norma

$$|\boldsymbol{x}|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}.$$

Si può inoltre definire

$$|\boldsymbol{x}|_\infty = \lim_{p \to +\infty} |\boldsymbol{x}|_p = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Per $p = 2$ si ottiene la norma euclidea della definizione 7.7 $|v|_2 = |v|$. Per $p = 1$ su $\mathbb{R}^2$ si ottiene la norma Manhattan. Per $p = +\infty$ si ottiene di nuovo la norma Manhattan a meno di una rotazione di 45 gradi e di un riscalamento di fattore $\sqrt{2}$:

$$|(x_1, x_2)|_\infty = \left| \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right|_1$$

Si potrebbe dimostrare che solo per $p = 2$ la norma $|\boldsymbol{x}|_p$ è indotta da un prodotto scalare in quanto solo per $p = 2$ è valida la proprietà del parallelogramma (4).

7.1 SPAZI METRICI E TOPOLOGIA

Definizione 7.10 (distanza indotta)**.** *Se $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ è una distanza su X e $A \subseteq X$ allora restringendo d a $A \times A$ si ottiene ancora (ovviamente) una distanza. Tale restrizione si chiama* distanza indotta *da X su A. Dunque se A è un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d) anche A ha una struttura di spazio metrico.*

distanza indotta

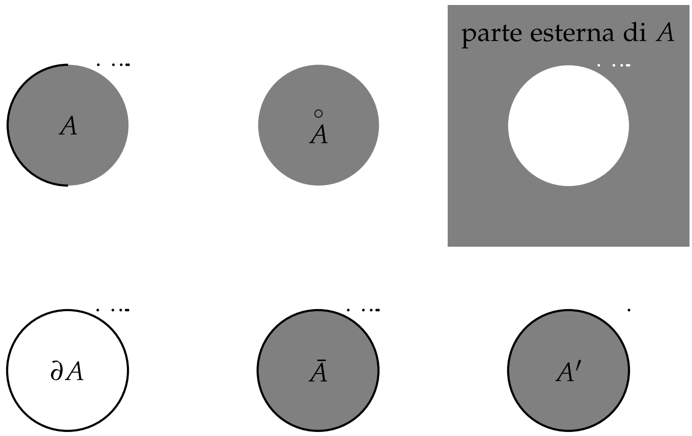


Figura 2: Un insieme A e la sua parte interna $\mathring{A}$, parte esterna, frontiera ∂A, chiusura $\bar{A}$ e punti di accumulazione A'.

***Esempio* 7.11** *(sfera).* Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ la distanza euclidea di $\mathbb{R}^n$ induce su X una struttura di spazio metrico. Se X non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ abbiamo quindi esempi di spazi metrici che non sono spazi normati. Ad esempio la *sfera n-dimensionale*

sfera n-dimensionale

$$\mathbb{S}^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |\boldsymbol{x}| = 1\}$$

è uno spazio metrico con la distanza indotta da $\mathbb{R}^n$.

Per $n = 1$ si osserva che $\mathbb{S}^1$ è la circonferenza unitaria nel piano, per $n = 2$ si ottiene l'usuale sfera unitaria nello immersa nello spazio tridimensionale.

* **Definizione 7.12** (palla). *Sia (X, d) uno spazio metrico. Per ogni $r > 0$ e per ogni $x_0 \in X$ definiamo la* palla *di raggio r centrata in x_0 come l'insieme*

palla

$$B_r(x_0) = \{x \in X \colon d(x, x_0) < r\}.$$

* **Definizione 7.13** (relazioni e proprietà topologiche). *Sia (X, d) uno spazio metrico. Un insieme $A \subseteq X$ si dirà essere un insieme* aperto *in X se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$. Un insieme $A \subseteq X$ si dirà essere un insieme* chiuso *in X se il suo complementare $X \setminus A$ è aperto.*

aperto

chiuso

La famiglia di tutti gli insiemi aperti si chiama topologia *dello spazio metrico X. Tutte le definizioni che seguono non dipendono dalla distanza d ma solamente dalla topologia: basterà usare aperti qualunque al posto delle palle $B_r(x)$.*

topologia

Se $A \subseteq X$ è un insieme qualunque $x \in X$ è un punto qualunque diremo che:

1. *x è* punto interno *ad A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$; chiameremo* parte interna *di A l'insieme dei punti interni di A e la denoteremo con $\mathring{A}$;*

punto interno

parte interna

intorno

2. *A è un* intorno *di x se x è punto interno ad A ovvero esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$;*

punto esterno
parte esterna

3. *x è* punto esterno *ad A se è interno al complementare di A ovvero esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap A = \emptyset$; chiameremo* parte esterna *di A l'insieme dei punti esterni ad A;*

punto di frontiera
frontiera

4. *x è* punto di frontiera *per A se non è né interno né esterno ad A ovvero per ogni $r > 0$ l'insieme $B_r(x)$ contiene punti di A e di $X \setminus A$; chiameremo* frontiera *(o bordo) di A l'insieme dei punti di frontiera che denoteremo con ∂A.*

punto di aderenza
chiusura

5. *x è* punto di aderenza *di A se è interno o di frontiera ovvero se per ogni $r > 0$ si ha $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$; chiameremo* chiusura *di A l'insieme dei punti di aderenza, che denoteremo con $\bar{A}$;*

punto di accumulazione
derivato

6. *x è* punto di accumulazione *di A se è punto di aderenza per $A \setminus \{x\}$ ovvero se per ogni $r > 0$ l'insieme $A \cap B_r(x)$ contiene punti diversi da x, chiameremo* derivato *di A l'insieme dei punti di accumulazione (che si potrebbe denotare con A');*

punto isolato

7. *x è* punto isolato *di A se è un punto di A ma non di accumulazione per A cioè se esiste $r > 0$ per cui $B_r(x) \cap A = \{x\}$.*

Teorema 7.14 (le palle sono aperte)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $x \in X$ e $r > 0$. Allora la palla $B_r(x)$ è un insieme aperto in X.*

Dimostrazione. Sia $y \in B_r(x)$: è sufficiente trovare $\rho > 0$ tale che $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$. Prendendo $\rho = r - d(y, x)$ si osserva che $\rho > 0$ e, per la disuguaglianza triangolare, dato $z \in B_\rho(y)$ si ha

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \rho + d(y, x) = r$$

da cui $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$ come volevamo dimostrare. □

Teorema 7.15 (chiusura sequenziale)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico. Un insieme $A \subseteq X$ è chiuso se e solo se per ogni successione $a_n \in A$ se $a_n \to a \in X$ allora $a \in A$ (il limite di punti di A, se esiste, è un punto di A).*

Dimostrazione. Supponiamo che A sia chiuso e sia $a_k \in A$ una successione convergente ad un punto di X: $a_k \to a$. Dobbiamo mostrare che $a \in A$. Per definizione di convergenza sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K \in \mathbb{N}$ tale per ogni $k > K$ si ha $d(a_k, a) < \varepsilon$ e quindi $a_k \in B_\varepsilon(a)$. In particolare $A \cap B_\varepsilon(a) \neq \emptyset$. Risulta quindi che a non è esterno ad A e quindi, essendo A chiuso, $a \in A$.

Supponiamo che A non sia chiuso e verifichiamo che in tal caso si può trovare una successione a_k di punti di A che converge $a_k \to a$ ad un punto $a \notin A$. Se A non è chiuso significa che c'è un punto $a \in X \setminus A$ che non è esterno ad A. Ciò vuol dire che per ogni $r > 0$ l'insieme $B_r(y) \cap A$ è non vuoto. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ posso allora scegliere $r = 1/k$ e quindi so che esiste un punto $a_k \in B_r(a) \cap A$ ovvero $a_k \in A$ e $d(a_k, a) < 1/k$. Dunque $a_k \to a$ con $a_k \in A$ ma $a \notin A$, come volevamo dimostrare. □

** **Definizione 7.16** (continuità). *Una funzione* $f: X \to Y$ *definita tra due spazi metrici si dice essere* sequenzialmente continua *nel punto* $x \in X$ *se per ogni successione convergente* $x_n \to x$ *in risulta che* $f(x_n) \to f(x)$. *Diremo che* f *è* sequenzialmente continua *se è sequenzialmente continua in ogni punto* x *del suo dominio* X. *sequenzialmente continua*

Una funzione $f: X \to Y$ *definita tra due spazi metrici si dice essere* continua *in un punto* $x \in X$ *se* *continua*

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \delta > 0 \colon \forall y \in X \colon d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{5}$$

Diremo che f *è* continua *se è continua in ogni punto* x *del suo dominio.*

Anche in questo caso abbiamo considerato due diverse nozioni di continuità che in generale (in spazi topologici) potrebbero non coincidere ma nel caso degli spazi metrici sono equivalenti, come dimostriamo nel seguente teorema.

Teorema 7.17 (definizioni equivalenti di continuità). *Sia* $f: X \to Y$ *una funzione definita tra due spazi metrici* X *e* Y. *Allora* f *è sequenzialmente continua in un punto* $x \in X$ *se e solo se è continua nel punto* x.

Inoltre f *è continua se e solo se per ogni* A *aperto in* Y *risulta che* $f^{-1}(A)$ *è aperto in* X *(la controimmagine di un aperto è aperta).*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia sequenzialmente continua in x e, per assurdo, supponiamo che f non sia continua nello stesso punto x. Allora negando (5) otteniamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ in particolare per ogni $\delta = \frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{N}$ esiste un punto y_k tale che $d(y_k, x) < \frac{1}{k}$ ma $d(f(y_k), f(x)) \geq \varepsilon$. Significa che $y_k \to x$ e quindi, se f è sequenzialmente continua, dovrebbe essere $f(y_k) \to f(x)$. Ma questo è in contraddizione con la condizione $d(f(y_k), f(x)) \geq \varepsilon$.

Viceversa supponiamo che f sia continua in x e consideriamo una qualunque successione $x_k \to x$. Per dimostrare che $f(x_k) \to f(x)$ dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > K$ si ha $d(f(x_k), f(x)) < \varepsilon$. Ma dalla continuità di f, dato $\varepsilon > 0$ sappiamo esistere $\delta > 0$ per cui se $d(y, x) < \delta$ allora $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$. Visto che $x_k \to x$ certamente esiste $K \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > K$ si ha $|x_k - k| < \delta$ e quindi $|f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ come volevamo dimostrare.

Mostriamo ora che se f è continua e A è aperto in Y allora $f^{-1}(A)$ è aperto in X. Dato un punto qualunque $x_0 \in f^{-1}(A)$ sappiamo che $f(x_0) \in A$ dunque, essendo A aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq A$. Per la continuità di f esiste allora $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ e quindi $f(x) \in A$. Significa che $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(A)$. Questo è vero per ogni $x_0 \in f^{-1}(A)$ quindi tale insieme è aperto.

Viceversa supponiamo che la controimmagine di ogni aperto sia un aperto e dimostriamo che la funzione è continua in ogni punto. Preso un punto $x_0 \in X$ e un $\varepsilon > 0$ consideriamo l'aperto $B_\varepsilon(f(x_0))$. La sua controimmagine è l'insieme $\{x \colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ e per ipotesi sappiamo che è aperto. Significa allora che esiste $\delta > 0$ tale $B_\delta(x_0)$ è contenuto in tale insieme, ovvero per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ cioè $|x - x_0| < \delta$ risulta $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$ cioè $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Abbiamo quindi verificato la definizione di continuità nel punto x_0. □

Definizione 7.18 (spazi limitati)**.** *Sia X uno spazio metrico o un sottoinsieme di uno sottospazio metrico. Si dirà che X è* limitato *se è contenuto in una palla ovvero se esiste $x_0 \in X$ e $R > 0$ tale che $X \subseteq B_R(x_0)$.* *

limitato

Definizione 7.19 (compattezza sequenziale)**.** *Sia X uno spazio metrico o un sottoinsieme di uno spazio metrico. Si dirà che X è* sequenzialmente compatto *se da ogni successione $x_k \in X$ è possibile estrarre una sottosuccessione $x_{k_j} \to x$ convergente ad un punto $x \in X$.* **

sequenzialmente compatto

La definizione più generale di compattezza viene data negli spazi topologici. Nel contesto generale compattezza e compattezza sequenziale sono concetti diversi ma nell'ambito degli spazi metrici i due concetti coincidono. Per questo potremo scrivere più brevemente *compatto* al posto di *sequenzialmente compatto* quando lavoriamo negli spazi metrici.

compatto

Il teorema di Bolzano-Weierstrass afferma che gli intervalli $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ sono compatti. Più in generale si può dimostrare che tutti gli insiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ sono compatti. In generale questo risultato non è vero in qualunque spazio metrico (un esempio negativo è dato dalla convergenza uniforme, come vedremo più avanti) ma l'implicazione inversa è sempre vera, come enunciato nel seguente teorema.

Teorema 7.20. *Se A è un sottoinsieme sequenzialmente compatto di uno spazio metrico X allora A è chiuso e limitato.* **

Dimostrazione. Chiaramente A è chiuso in quanto presa una successione $x_k \in A$ convergente a punto $x \in X$ sappiamo che esiste una sottosuccessione convergente ad un punto di A. Ma necessariamente ogni sottosuccessione converge ad x quindi $x \in A$. Se A non fosse limitato fissato $a \in A$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ dovrebbe esistere un punto $x_k \in A$ tale che $x_k \notin B_k(a)$ cioè $d(x_k, a) > k$. Supponiamo allora che esista una sottosuccessione convergente $x_{k_j} \to x \in A$. Allora per la disuguaglianza triangolare inversa si avrebbe

$$d(x, a) \geq d(x_{k_j}, a) - d(x_{k_j}, x) \geq k_j - d(x_{k_j}, x) \to +\infty - 0 = +\infty.$$

Ma questo è assurdo in quanto $d(x, a) \in \mathbb{R}$. □

Teorema 7.21 (Weierstrass: le funzioni continue mandano compatti in compatti)**.** *Sia $f: X \to Y$ una funzione continua tra due spazi metrici X e Y. Se $K \subseteq X$ è sequenzialmente compatto allora anche $f(K)$ è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $y_k \in f(K)$ una qualunque successione. Allora esiste $x_k \in K$ tale che $f(x_k) = y_k$. Essendo K compatto possiamo estrarre una sottosuccessione convergente: $x_{k_j} \to x$. Essendo f continua si ha

$$y_{k_j} = f(x_{k_j}) \to f(x) \in f(K).$$

□

Nel caso $X = Y = \mathbb{R}$ recuperiamo l'usuale teorema di Weierstrass, in quanto se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua essendo $[a,b]$ compatto risulta che $f([a,b])$ è compatto. Ma i compatti di $\mathbb{R}$ sono chiusi e limitati quindi hanno massimo e minimo in quanto l'estremo superiore e l'estremo inferiore sono finiti e sono punti di aderenza dell'insieme.

7.2 COMPLETEZZA

*** **Definizione 7.22** (successioni di Cauchy). *Sia (X,d) uno spazio metrico e x_k una successione di punti di X. Diremo che x_k è una* successione di Cauchy *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists n \in \mathbb{N} \colon \forall j > n \colon \forall k > n \colon d(x_j, x_k) < \varepsilon.$$

successione di Cauchy

La proprietà che definisce le successioni di Cauchy si potrebbe anche scrivere così:

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{j\geq k} d(x_j, x_k) = 0.$$

** **Teorema 7.23** (le successioni convergenti sono di Cauchy). *Sia $x_k \to x$ una successione convergente in uno spazio metrico (X,d). Allora x_k è di Cauchy.*

** *Dimostrazione.* Per definizione se $x_k \to x$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists n \in \mathbb{N} \colon \forall k > n \colon d(x_k, x) < \varepsilon.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare, per ogni $j, k > n$ si ottiene il risultato desiderato:

$$d(x_j, x_k) \leq d(x_k, x) + d(x, x_j) \leq 2\varepsilon.$$

□

*** **Definizione 7.24** (completezza). *Uno spazio metrico (X,d) si dice essere* completo *se ogni successione di Cauchy è convergente.*

completezza
completo

Definizione 7.25 (spazio di Banach). *Uno spazio vettoriale normato si dice essere uno* spazio di Banach *se, come spazio metrico, risulta essere completo. Se la norma è euclidea, cioè deriva da un prodotto scalare, lo spazio si dirà* spazio di Hilbert.

spazio di Banach
spazio di Hilbert

Lemma 7.26. *Ogni successione di Cauchy è limitata (più precisamente: se x_n è una successione di Cauchy in uno spazio metrico X allora l'insieme $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme limitato).*

Dimostrazione. Sia $x_k \in \mathbb{R}$ una successione di Cauchy. Fissato $\varepsilon = 1$ sappiamo che esiste $N \in \mathbb{N}$ per cui per ogni $k, j > N$ si ha $d(x_k, x_j) < 1$. In particolare per ogni $k > N$ si ha

$$d(x_k, x_{N+1}) < 1.$$

Dunque posto

$$R = \max\{d(x_0, x_1), d(x_0, x_2), \dots, d(x_0, x_N), d(x_0, x_{N+1}) + 1\}$$

si osserva che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $d(x_0, x_k) \leq R < R + 1$ in quanto se $k \leq N$ abbiamo scelto appositamente R in modo che sia più grande di $d(x_0, x_k)$ e se $k > N$ allora

$$d(x_0, x_k) \leq d(x_0, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, x_k) \leq d(x_0, x_{N+1}) + 1 \leq R.$$

Significa quindi che per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha $x_k in B_{R+1}(x_0)$ che è la definizione di limitatezza in uno spazio metrico. □

Lemma 7.27. *Se una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, allora l'intera successione è convergente.*

Dimostrazione. Sia x_k la successione di Cauchy e sia $x_{k_j} \to x$ una sottosuccessione convergente. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che se $k, j > m$ allora $d(x_k, x_j) < \varepsilon$. Visto che $x_{k_j} \to x$ possiamo trovare j tale che $k_j > m$ e tale che $d(x_{k_j}, x) < \varepsilon$. Ma allora

$$d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{k_j}) + d(x_{k_j}, x) \leq 2\varepsilon.$$

E questo è vero per ogni $k > m$ da cui risulta verificata la definizione di limite $x_k \to x$. □

$\mathbb{R}$ *è completo*

Teorema 7.28 (completezza di $\mathbb{R}$)**.** $\mathbb{R}$ *è completo.* ***

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che se x_k è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ allora x_k converge. Per il lemma 7.26 sappiamo che x_k è limitata. Ma allora per il teorema di Bolzano-Weierstrass sappiamo che x_k ha una estratta convergente. Grazie al lemma 7.27 possiamo quindi concludere che la successione x_k è essa stessa convergente. □ ***

Corollario 7.29 (completezza di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}$)**.** *Gli spazi* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C}$ *(con la usuale distanza euclidea) sono completi.*

Dimostrazione. Basta osservare che la convergenza (o la condizione di Cauchy) di una successione in $\mathbb{R}^n$ si ha se e solo se ogni componente è convergente (o di Cauchy) in $\mathbb{R}$. Dunque essendo $\mathbb{R}$ completo anche $\mathbb{R}^n$ lo è. Come spazio metrico $\mathbb{C}$ è isomorfo ad $\mathbb{R}^2$ dunque anch'esso è completo. □

Teorema 7.30 (completezza dei compatti)**.** *Ogni spazio metrico compatto è completo.*

Dimostrazione. Visto che lo spazio è compatto ogni successione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente. Ma allora, grazie al lemma 7.27, l'intera successione converge e dunque lo spazio è completo. □

Teorema 7.31 (chiusi in spazi compatti e in spazi completi). *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso in X. Se X è compatto allora anche A è compatto, se X è completo allora anche A è completo.*

Dimostrazione. Se X è compatto da ogni successione in A si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di X. Ma siccome A è chiuso il punto sta in A e dunque la sottosuccessione è convergente in A.

Una successione di Cauchy in A è di Cauchy anche in X. Se X è completo tale successione converge ad un punto di x. Se A è chiuso tale punto è in A e dunque la successione converge in A.- □

*** **Definizione 7.32** (lipschitz). *Sia $f: X \to Y$ una funzione definita tra due spazi metrici e sia $L \geq 0$. Dato $L \geq 0$ diremo che f è L-lipschitziana se per ogni $x, y \in X$ si ha*

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y).$$

Diremo che f è lipschitziana se esiste $L \geq 0$ tale che f sia L-lipschitziana.

* **Teorema 7.33.** *Se $f: X \to Y$ è lipschitziana allora f è sequenzialmente continua, cioè*

$$x_k \to x \implies f(x_k) \to f(x).$$

Dimostrazione. Se $x_k \to x$ significa che $d(x_k, x) \to 0$, quindi

$$d(f(x_k), f(x)) \leq L \cdot d(x_k, x) \to 0.$$

□

Osserviamo che la distanza $d(x, y)$ di uno spazio metrico X risulta sempre essere una funzione 1-lipschitziana rispetto ad ognuna delle due variabili x e y. Infatti per la disuguaglianza triangolare inversa si ha

$$|d(x_1, y) - d(x_2, y)| \leq d(x_1, x_2).$$

Di conseguenza la norma di uno spazio normato è anch'essa 1-lipschitziana. In particolare la distanza e la norma risultano essere funzioni continue.

*** **Teorema 7.34** (delle contrazioni o punto fisso di Banach-Caccioppoli). *teor. contrazioni*
Sia X uno spazio metrico completo non vuoto e sia $f: X \to X$ una funzione L-lipschitziana con $L < 1$ (diremo che f è una contrazione*). Allora esiste ed è unico un punto $x \in X$ tale che $f(x) = x$.*

*** *Dimostrazione.* Si consideri un qualunque punto $p \in X$ e si definisca la successione $x_k \in X$ tramite la definizione ricorsiva

$$\begin{cases} x_0 = p \\ x_{k+1} = f(x_k). \end{cases}$$

Visto che f è L-lipschitziana si avrà

$$\begin{aligned}
d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \leq L \cdot d(x_1, x_0) \\
d(x_3, x_2) &= d(f(x_2), f(x_1)) \leq L \cdot d(x_2, x_1) \leq L^2 \cdot d(x_1, x_0) \\
d(x_4, x_3) &= d(f(x_3), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_3, x_2) \leq L^3 \cdot d(x_1, x_0) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

possiamo quindi dimostrare induttivamente che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq L^m \cdot d(x_1, x_0).$$

Ma allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $j > k$ utilizzando la disuguaglianza triangolare e facendo la somma della progressione geometrica si ha

$$d(x_k, x_j) \leq \sum_{m=k}^{j-1} d(x_m, x_{m+1}) \leq \sum_{m=k}^{j-1} L^m \cdot d(x_1, x_0) = \frac{L^k - L^j}{1 - L} d(x_1, x_0).$$

Visto che $L < 1$ se $k \to +\infty$ e $j > k$ questa quantità tende a zero e quindi risulta che x_k è una successione di Cauchy. Essendo per ipotesi X completo sappiamo che la successione converge $x_k \to x$ ad un punto $x \in X$. Per la continuità di f, passando al limite nell'equazione $x_{k+1} = f(x_k)$ si ottiene $x = f(x)$. Abbiamo quindi trovato un punto fisso. Se $y \in X$ fosse un altro punto fisso si avrebbe:

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

che è assurdo se $L < 1$ e $x \neq y$. □

7.3 CONVERGENZA UNIFORME

norma uniforme

Definizione 7.35 (convergenza uniforme). *Sia A un insieme non vuoto e $f \colon A \to \mathbb{R}$. Definiamo la* norma uniforme *(o norma del* sup*) di f come* ***

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

distanza uniforme

Se anche $g \colon A \to \mathbb{R}$ definiamo la distanza uniforme *tra f e g come*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

convergenza uniforme

Se f_k è una successione di funzioni e f è una funzione, diremo che f_k converge uniformemente *a f e scriveremo*

$$f_k \rightrightarrows f$$

se $d_\infty(f_k, f) \to 0$.

***Esempio* 7.36.** La successione
$$f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$$
converge uniformemente (su tutto $\mathbb{R}$) alla funzione $f(x) = |x|$. Infatti sia $g_k(x) = f_k(x) - f(x)$. La funzione g_k è derivabile per $x \neq 0$ e per $x > 0$ si ha
$$g_k'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}} - 1 < 0.$$
Dunque la funzione g_k è decrescente su $[0, +\infty)$. Per simmetria (è una funzione pari) è crescente su $(-\infty, 0]$. Risulta quindi che il massimo di g_k è in $x = 0$. Chiaramente $g_k \geq 0$ quindi si ha:
$$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} g_k(x) = g_k(0) = \frac{1}{k} \to 0.$$
Dunque $f_k \rightrightarrows f$.

Osserviamo che in generale $\|f\|_\infty$ e $d_\infty(f, g)$ possono assumere il valore $+\infty$ (ad esempio se $A = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $g(x) = 0$) e quindi non è detto che siano effettivamente una norma e una distanza.

Teorema 7.37 (proprietà della norma uniforme)**.** *La norma uniforme soddisfa tutte le proprietà di una norma (Definizione 7.4), salvo il fatto che può assumere valori in* $[0, +\infty]$ *invece che in* $[0, +\infty)$*.*

Dimostrazione. Chiaramente la norma uniforme non assume valori negativi in quanto estremo superiore di un insieme (non vuoto) di numeri reali non negativi. Inoltre se $\|f\|_\infty = 0$ significa che $|f(x)| = 0$ per ogni x e dunque $f = 0$ (proprietà di separazione).

L'omogenità segue dall'omogeneità del valore assoluto, in quanto si ha
$$\sup_{x\in A} |(\lambda \cdot f)(x)| = \sup_{x\in A} |\lambda \cdot f(x)| = \sup_{x\in A} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x\in A} |f(x)|.$$

La disuguaglianza triangolare segue dalla disuguaglianza triangolare del valore assoluto, che viene preservata facendone l'estremo superiore:
$$\sup_{x\in A} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x\in A} [|f(x)| + |g(x)|] \leq \sup_{x\in A} |f(x)| + \sup_{x\in A} |g(x)|.$$
$\square$

Teorema 7.38. *Sia A un insieme. Lo spazio vettoriale delle funzioni limitate $f \colon A \to \mathbb{R}$ (cioè delle funzioni con norma uniforme finita)*
$$\mathcal{B}(A) = \{f \in \mathbb{R}^A \colon \|f\|_\infty < +\infty\}$$
dotato della norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ risulta essere uno spazio di Banach (ovvero uno spazio vettoriale normato e completo). Su tale spazio di Banach la distanza indotta dalla norma è la distanza uniforme d_∞ e la convergenza indotta dalla distanza è la convergenza uniforme.

Dimostrazione. Per definizione risulta verificato che la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ assume valori finiti su $\mathcal{B}(A)$. Dunque, in base al teorema precedente, $\|\cdot\|_\infty$ è effettivamente una norma e $\mathcal{B}(A)$ risulta quindi essere uno spazio normato. Dimostriamo ora che esso è completo, cioè che le successioni di Cauchy convergono.

Sia f_k una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(A)$. Allora per ogni $x \in A$ risulta che $f_k(x)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ in quanto si ha (per definizione di sup)

$$\left|f_k(x) - f_j(x)\right| \leq \left\|f_k - f_j\right\|_\infty$$

e quindi se $\left\|f_k - f_j\right\| < \varepsilon$ a maggior ragione per $x \in A$ fissato si ha $\left|f_k(x) - f_j(x)\right| < \varepsilon$.

Dunque per ogni $x \in A$ la successione numerica $f_k(x)$ converge in quanto $\mathbb{R}$ è completo. Posto $f(x) = \lim f_k(x)$ abbiamo dunque trovato un candidato limite della successione. Dovremo ora mostrare che $f \in \mathcal{B}(A)$ e che f_k converge uniformemente a f. Per ogni $\varepsilon > 0$ per la condizione di Cauchy dovrà esistere $N \in \mathbb{N}$ tale che se $k, j > N$ allora

$$d_\infty(f_k, f_j) < \varepsilon.$$

Ma allora per ogni $x \in A$, per ogni $k > N$ e per ogni $j > N$ si avrà:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \left|f_k(x) - f_j(x)\right| + \left|f_j(x) - f(x)\right| < \varepsilon + \left|f_j(x) - f(x)\right|.$$

Visto che per ogni x si ha $f_j(x) \to f(x)$, per ogni x esiste un j tale che $\left|f_j(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ e quindi possiamo concludere che

$$|f_k(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Facendo il sup per $x \in A$ si ottiene dunque

$$\|f_k - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Abbiamo quindi verificato la definizione di limite $\|f_k - f\|_\infty \to 0$. In particolare $\|f\|_\infty < +\infty$ in quanto vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_k\|_\infty + \|f_k\|_\infty < +\infty$$

essendo $\|f - f_k\|_\infty \to 0$ e $\|f_k\|_\infty < +\infty$. □

Definizione 7.39 (convergenza puntuale)**.** *Sia $f_k\colon A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione. Se per ogni $x \in A$ si ha $f_k(x) \to f(x)$ diremo che la successione f_k* converge puntualmente *ad f.* ***

convergenza puntuale

Teorema 7.40 (convergenza uniforme implica convergenza puntuale)**.** *Sia $f_k\colon A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni. Se f_k converge uniformemente ad una funzione f allora f_k converge puntualmente ad f.* ***

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che per ogni $x \in A$ si ha

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in A} |f_k(y) - f(y)| = \|f_k - f\|_\infty \to 0.$$

□

*** **Esempio 7.41** *(successione che converge puntualmente ma non uniformemente)***.** Sia $f_k \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni definita da $f_k(x) = x^k$. Se $x \in [0,1)$ si ha $x^k \to 0$ mentre se $x = 1$ si ha $x^k \to 1$. Dunque la successione f_k converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Osserviamo però che

$$d_\infty(f_k, f) = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| \geq \lim_{x \to 1^-} |f_k(x) - f(x)| = 1.$$

dunque non ci può essere convergenza uniforme di f_k verso f.

E' facile convincersi che la successione f_k dell'esempio precedente, oltre a non convergere uniformemente non ammette nessuna estratta convergente uniformemente. Perciò tale successione non può essere contenuta in nessun compatto di $C^0([0,1])$. In particolare il disco unitario

$$D = \{f \in C^0([0,1]) \colon \|f\|_\infty \leq 1\}$$

risulta essere un insieme chiuso e limitato che però non è compatto.

*** **Teorema 7.42** (continuità del limite uniforme)**.** *Sia X uno spazio metrico e siano $f_k \colon X \to \mathbb{R}$ funzioni continue che convergono uniformemente ad una funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$. Allora anche f è continua.*

*** *Dimostrazione.* Fissato $x_0 \in X$ basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$. Per definizione di convergenza uniforme dato $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ (in realtà ne esistono infiniti) per cui $d_\infty(f_N, f) < \varepsilon$. Per la continuità di f_N in corrispondenza dello stesso ε esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ allora $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$. Ma allora se $d(x, x_0) < \delta$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f - f_N\|_\infty + \varepsilon + \|f - f_N\|_\infty \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

*** **Teorema 7.43** (completezza di $C^0([a,b])$)**.** *Lo spazio $C^0([a,b])$ delle funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato, dotato della norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ risulta essere uno spazio di Banach (ovvero uno spazio vettoriale normato e completo).* *$C^0([a,b])$ è completo*

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass ogni funzione continua definita sul compatto $[a,b]$ è limitata. Dunque $C^0([a,b])$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}([a,b])$. Inoltre il teorema precedente (continuità del limite) ci dice che $C^0([a,b])$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{B}([a,b])$. Ma $\mathcal{B}([a,b])$ è completo e quindi anche $C^0([a,b])$ essendo chiuso in $\mathcal{B}([a,b])$ è completo. $\square$

La norma uniforme è la norma naturale su $C^0([a,b])$ in quanto lo rende uno spazio completo. Per questo motivo la norma uniforme sulle funzioni continue viene anche chiamata *norma* C^0 e si può denotare nel modo seguente:

$$\|f\|_{C^0} = \|f\|_{C^0([a,b])} = \|f\|_\infty \qquad \text{per } f \in C^0([a,b]).$$

7.3.1 *limite uniforme di derivate e integrali*

Teorema 7.44 (scambio del limite con l'integrale)**.** *Siano $a,b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Siano $f_k \in C^0([a,b])$ funzioni che convergono uniformemente ad una funzione $f \in C^0([a,b])$. Allora* ***

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\right) dx.$$

Inoltre scelto qualunque $x_0 \in [a,b]$ e posto

$$F_k(x) = \int_{x_0}^x f_k(t)\,dt, \qquad F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

si ha che F_k converge uniformemente a F.

Dimostrazione. Banalmente si ha ***

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &\le \int_a^b |f_k(x) - f(x)|\,dx \\ &\le \int_a^b \|f_k - f\|_\infty\,dx \\ &= (b-a)\|f_k - f\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Se poi definiamo F e F_k come nell'enunciato, si ha

$$\begin{aligned}\|F_k - F\| &= \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_c^x f_k(t) - f(t)\,dt\right| \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} |x-c| \cdot \|f_k - f\|_\infty \\ &\le (b-a)\cdot\|f_k - f\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

$\square$

Il teorema precedente è equivalente a dire che l'operatore integrale $S\colon C^0([a,b]) \to C^0([a,b])$

$$S(f)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

che fissato $x_0 \in [a,b]$ associa ad una funzione $f \in C^0([a,b])$ la sua funzione integrale, è un operatore continuo rispetto alla norma uniforme.

In realtà le ipotesi per garantire la possibilità di scambiare il limite con l'integrale sono molto più deboli, per avere un teorema con ipotesi ottimali sarebbe però necessario introdurre l'integrale di Lebesgue, cosa che non vogliamo fare in questo corso. Un enunciato più generale che possiamo dimostrare facilmente con gli strumenti a nostra disposizione è il seguente.

convergenza dominata

Teorema 7.45 (convergenza dominata quasi uniforme)**.** *Siano $f_k\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, funzioni continue sull'intervallo $[a,b)$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,+\infty]$ e supponiamo che esista $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile in senso improprio su $[a,b)$ con integrale finito e tale che*

$$|f_k(x)| \le g(x)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in [a,b)$.

Supponiamo inoltre che per ogni $x \in [a,b)$ esista e sia finito il limite

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$$

e che per ogni $\beta < b$ la successione f_k converga uniformemente ad f sull'intervallo $[a,\beta]$.

Allora f_k ed f sono integrabili in senso improprio su $[a,b)$ e si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ovviamente, per simmetria, vale un risultato analogo per funzioni definite su intervalli aperti a sinistra $(a,b]$ e su unioni finite di tali intervalli.

Dimostrazione. Ogni f_k è assolutamente integrabile in senso improprio in quanto $|f_k| \le g$ dove g ha integrale finito per ipotesi. Visto che f_k converge uniformemente a f su ogni intervallo $[a,\beta]$ la funzione f è anch'essa continua su ogni $[a,\beta] \subseteq [a,b)$ e quindi è continua su tutto $[a,b)$. Inoltre passando al limite (puntuale) nella stima $|f_k(x)| \le g(x)$ si trova che vale anche $|f(x)| \le g(x)$ e quindi anche f è integrabile su $[a,b)$ con integrale finito.

Su ogni $[a,\beta] \subseteq [a,b)$ possiamo applicare il teorema precedente in quanto abbiamo convergenza uniforme:

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^\beta f_k(x)\, dx = \int_a^\beta f(x)\, dx.$$

razie alla continuità della funzione integrale, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\beta < b$ per cui risulta
$$\int_\beta^b g(x)\,dx < \varepsilon.$$
Allora si ha
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = &\left|\int_a^\beta f_k(x)\,dx - \int_a^\beta f(x)\,dx\right| \\ &+ \left|\int_\beta^b (f_k(x) - f(x))\,dx\right|.\end{aligned} \tag{6}$$
Il primo addendo tende a zero per $k \to +\infty$ in quanto sull'intervallo $[a, \beta]$ c'è convergenza uniforme di f_k a f e quindi possiamo applicare il teorema precedente di scambio del limite con l'integrale. Per il secondo addendo si ha invece
$$\begin{aligned}\left|\int_\beta^b (f_k(x) - f(x))\,dx\right| &\leq \int_\beta^b |f_k(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq \int_\beta^b |f_k(x)|\,dx + \int_\beta^b |f(x)|\,dx \\ &\leq 2\int_\beta^b g(x)\,dx \leq \varepsilon.\end{aligned}$$
Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\beta < b$ tale che per k abbastanza grande la quantità in (6) risulta essere inferiore a 2ε. Abbiamo quindi verficato la tesi tramite la definizione di limite. □

***Esempio* 7.46.** La successione $f_k(x) = \sin(x^k)$ converge puntualmente a $f(x) = 0$ sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[0, \beta]$ con $\beta < \frac{\pi}{2}$ (verificare!). Inoltre $|f_k(x)| = \sin(x^k) \leq 1$ per ogni $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2} < +\infty$. Dunque possiamo applicare il teorema di convergenza dominata e, scambiando il limite con l'integrale possiamo dedurre che
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^k)\,dx \to 0, \qquad \text{per } k \to +\infty.$$

Teorema 7.47 (scambio del limite con la derivata)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f_k \in C^1(I)$ funzioni tali che $f_k(x_0)$ converge per almeno un punto $x_0 \in I$ e la successione delle derivate f_k' converge ad una funzione $g\colon I \to \mathbb{R}$ uniformemente su ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq I$. Allora esiste $f \in C^1(I)$ tale che $f' = g$ e f_k converge a f uniformemente su ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq I$. In queste ipotesi si può quindi scambiare la derivata con il limite:* ***
$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{d}{dx} f_k(x)\right) = f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\right), \qquad \forall x \in I.$$

*** *Dimostrazione.* Per ipotesi esiste $y_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f_k(x_0) \to y_0$. Definiamo

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Per la continuità del limite uniforme sappiamo che g è continua, dunque possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo per dedurre che $f' = g$. Mostriamo ora che su ogni intervallo $[a, b] \subseteq I$ si ha $f_k \rightrightarrows f$. Per la formula fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$\int_{x_0}^{x} f_k'(t) dt = f_k(x) - f_k(x_0)$$

dunque

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[a,b]} \left| f_k(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_k'(t) - y_0 - \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \right| \\ &\le |f_k(x_0) - y_0| + \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_{x_0}^{x} \left|f_k'(t) - g(t)\right| dt \right| \\ &\le |f_k(x_0) - y_0| + (b-a)\left\|f_k' - g\right\| \to 0.\end{aligned}$$

□

Lo spazio $C^1([a, b])$ è un sottospazio vettoriale di $C^0([a, b])$ ma non è chiuso, come si deduce dall'esempio 7.36 (si potrebbe anzi dimostrare che C^1 è denso in C^0) dunque C^1 non è completo rispetto alla norma uniforme. Per trasformare lo spazio $C^1([a, b])$ in uno spazio di Banach possiamo definire una norma più forte, come ad esempio questa:

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty.$$

* **Teorema 7.48** (C^1 spazio di Banach)**.** *Lo spazio vettoriale $C^1([a, b])$ dotato della norma $\|\cdot\|_{C^1}$ risulta essere uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. E' facile verificare che $\|\cdot\|_{C^1}$ è una norma su $C^1([a, b])$, dobbiamo solo verificare che lo spazio risulta completo. Sia dunque f_k una successione di Cauchy rispetto alla norma C^1. Allora f_k' e f_k sono entrambe successioni di Cauchy in C^0 in quanto $\|f_k\|_\infty \le \|f_k\|_{C^1}$ e $\left\|f_k'\right\|_\infty \le \|f_k\|_{C^1}$. Dunque, per la completezza di C^0, sappiamo che esistono $f, g \in C^0([a, b])$ tali che $f_k \rightrightarrows f$ e $f_k' \rightrightarrows g$. In base al teorema di scambio del limite con la derivata possiamo affermare che $f \in C^1$ e $f' = g$, dunque

$$\|f_k - f\|_{C^1} = \|f_k - f\|_\infty + \left\|f_k' - g\right\|_\infty \to 0.$$

□

Il teorema di scambio del limite con l'integrale ci dice che l'operatore integrale $S\colon C^0 \to C^1$ è continuo tra i due spazi di Banach. Anche l'operatore differenziale $D\colon C^1 \to C^0$ $f \mapsto Df = f'$ è ovviamente continuo.

7.3.2 *serie di funzioni*

Se $f_k\colon A \to \mathbb{R}$ è una successione di funzioni definite su uno stesso insieme A, possiamo considerare (come abbiamo già fatto per le successioni numeriche) la successione delle somme parziali:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad x \in A.$$

Tale successione si chiama *serie* corrispondente alla successione di funzioni f_k e si indica a volte come $\sum f_n$. Per ogni x in cui la serie è convergente si può quindi definire la *somma* della serie

somma

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

La somma S è dunque il limite puntuale della successione delle somme parziali S_n.

I teoremi che abbiamo dimostrato per le successioni di funzioni sono quindi validi anche per le serie di funzioni. Basterà ricordare che la *convergenza uniforme della serie* è la convergenza uniforme delle somme parziali. Dunque $\sum f_k$ converge uniformemente a S se $S_n \rightrightarrows S$ ovvero se

convergenza uniforme di una serie

$$\|S - S_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_\infty \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

integrazione di una serie

Teorema 7.49 (integrale di una serie di funzioni)**.** *Sia $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue definite sull'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Se la serie $\sum f_k$ converge uniformemente allora si può scambiare l'integrale con la somma della serie:* **

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_k(t)\, dt \right) \qquad \forall x \in I.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una semplice conseguenza del fatto che lo scambio può essere fatto sulle somme finite e il passaggio al limite può essere fatto grazie al teorema di scambio del limite con l'integrale. **

Sia $S_n = \sum f_n$ la successione delle somme parziali e sia S il limite delle somme parziali. Per ipotesi $S_n \rightrightarrows S$. Applicando il teorema di scambio dell'integrale con il limite si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(t)\, dt = \int_a^b S(t)\, dt.$$

Ma da un lato, sfruttando l'additività dell'integrale sulle somme finite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right) dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b f_k(t)\,dt\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(t)\,dt\right)
\end{aligned}$$

e dall'altro lato:

$$\int_a^b S(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\right) dt.$$

□

** **Teorema 7.50** (derivata di una serie di funzioni)**.** *Sia $f_k\colon I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue definite sull'intervallo I. Se le funzioni f_k sono di classe C^1 e la serie delle derivate $\sum f_k'$ converge uniformemente su ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq I$ e se c'è almeno un punto $x_0 \in I$ tale che la serie $\sum f_k(x_0)$ converge, allora*

derivazione di una serie

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dx} f_k(x) \qquad \forall x \in I.$$

** *Dimostrazione.* Sia S_n la successione delle somme parziali. Per ipotesi sappiamo che esiste una funzione $T\colon I \to \mathbb{R}$ tale che $S_n' \rightrightarrows T$ in ogni intervallo $[a,b] \subseteq I$. Sappiamo inoltre che $S_n(x_0)$ converge. Dunque possiamo applicare il teorema di scambio del limite con la derivata per ottenere che esiste $S \in C^1(I)$ tale che $S_n(x) \to S(x)$ per ogni $x \in I$ e

$$S'(x) = T(x) \qquad \forall x \in I.$$

Ma da un lato

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \frac{d}{dx}\lim_{n\to+\infty} S_n(x) \\
&= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)
\end{aligned}$$

e dall'altro lato

$$\begin{aligned}
T(x) &= \lim_{n\to+\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x).
\end{aligned}$$

□

La convergenza uniforme di una serie non è molto semplice da verificare. Più semplice è la seguente condizione, che vedremo essere più forte.

Definizione 7.51 (convergenza totale di una serie di funzioni). *Siano $f_k\colon A \to \mathbb{R}$ funzioni definite su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che la serie di funzioni $\sum f_k$* converge totalmente *se la serie numerica $\sum \|f_k\|_\infty$ è convergente.* ***

convergenza totale

Teorema 7.52 (convergenza totale). *Se la serie $\sum f_n$ converge totalmente allora converge uniformemente.* ***

Dimostrazione. A x fissato la serie $\sum f_n(x)$ converge assolutamente in quanto ***
$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty.$$
Dunque la serie converge e posto
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$
si ha che $S_n \to S$ puntualmente. Per mostrare che $S_n \rightrightarrows S$ basta osservare che per $n \to +\infty$ si ha:
$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \to 0.$$
□

Teorema 7.53 (convergenza totale delle serie di potenze). *Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenze e sia $R \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza. Allora la serie converge totalmente su ogni disco D_r con $r < R$.* ***

Dimostrazione. Ora osserviamo che sul disco di raggio r si ha $\left\|a_k z^k\right\|_\infty = |a_k| r^k$ e dunque
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|a_k z_k\|_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k < +\infty$$
in quanto la serie $\sum a_k z^k$ converge assolutamente per $z = r$ essendo $r < R$. □

Corollario 7.54. *La serie di potenze* **
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$
ha lo stesso raggio di convergenza R della serie delle derivate
$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

e per $x \in (-R, R)$ si ha

$$f'(x) = g(x).$$

Dimostrazione. Che le due serie abbiano lo stesso raggio di convergenza l'abbiamo già dimostrato nel Teorema 3.41. Nel teorema precedente abbiamo mostrato che su ogni intervallo $[-r, r]$ con $r < R$ la serie di potenze con somma f converge totalmente. Dunque converge uniformemente e possiamo scambiare la derivata con la somma per ottenere $f'(x) = g(x)$. □

***Esempio* 7.55.** Sappiamo che la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$$

ha raggio di convergenza $R = 1$ (si usi ad esempio il criterio del rapporto). La serie delle derivate è

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Dunque per $|x| < 1$ si ha

$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{1-x}$$

da cui

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x).$$

Abbiamo quindi scoperto che vale

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \qquad \text{per ogni } x \in (-1, 1).$$

Osserviamo ora che la serie con somma $f(x)$ non converge per $x = 1$ (serie armonica) ma converge per $x = -1$ (criterio di Leibniz). Per il Teorema 3.43 (lemma di Abel) sappiamo che la funzione $f(x)$ è continua nel punto $x = -1$ e dunque possiamo concludere che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \qquad \forall x \in [-1, 1).$$

In particolare abbiamo trovato la somma della serie armonica a serie alterni:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -f(x) = \ln 2.$$

Osserviamo che queste informazioni sono coerenti con lo sviluppo di Taylor di $\ln(1+x)$ che avevamo già determinato. Ma non sono conseguenza di esso, in quanto lo sviluppo di Taylor ci dà informazioni solamente per $x \to 0$ mentre ora abbiamo ottenuto informazioni per ogni x in $[-1, 1)$.

***Esempio* 7.56.** Applichiamo l'idea precedente alla funzione arctg. Si ha

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}(x^{2k+1})'.$$

La serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$

ha raggio di convergenza $R = 1$ e dunque per ogni $x \in (-1, 1)$ sappiamo che la serie delle derivate converge alla derivata della serie da cui

$$f'(x) = \operatorname{arctg}' x.$$

Visto che $f(0) = 0 = \operatorname{arctg} 0$ possiamo concludere che $f(x) = \operatorname{arctg} x$ per ogni $x \in (-1, 1)$. La serie è convergente anche per $x = 1$, per il criterio di Leibniz. Per continuità (Lemma di Abel) si ottiene che $f(1) = \operatorname{arctg} 1$. Dunque

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} \qquad \forall x \in (-1, 1].$$

Gregory-Leibniz

In particolare per $x = 1$ si ottiene la formula di *Gregory-Leibniz*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

7.4 CONVERGENZA INTEGRALE

Motivati da come viene definita la norma di un vettore in $\mathbb{R}^n$ risulta naturale dare la seguente definizione di *norma euclidea* per una funzione $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}.$$

Questa definizione ha senso, come integrale improprio, se la funzione f è localmente Riemann-integrabile sull'intervallo (a, b) (definizione 6.43). In tal caso l'integrale esiste, ma potrebbe assumere il valore $+\infty$. Definiamo allora

$$\mathcal{H}(a, b) = \{f \text{ localmente R.-integrabile su } (a, b) \colon \|f\|_2 < +\infty\}.$$

Cercheremo ora di dimostrare che la norma che abbiamo introdotto è effettivamente un norma (nel senso della definizione 7.4) che rende $\mathcal{H}(a, b)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione infinita.

Innanzitutto è chiaro che qualunque sia f si ha $\|f\|_2 \geq 0$. Inoltre è banale osservare che la norma è omogenea: se $t \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\|t \cdot f\|_2 = |t| \cdot \|f\|_2.$$

Dunque se $f \in \mathcal{H}(a,b)$ anche $tf \in \mathcal{H}(a,b)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se $f, g \in \mathcal{H}(a,b)$ per la proprietà del parallelogramma (4) valida in $\mathbb{R}$ si ha

$$(f(x) + g(x))^2 \leq 2f^2(x) + 2g^2(x)$$

e dunque se $f, g \in \mathcal{H}(a,b)$ anche $f + g \in \mathcal{H}(a,b)$. Dunque $\mathcal{H}(a,b)$ è uno spazio vettoriale.

Per $f, g \in \mathcal{H}(a,b)$ possiamo ora definire il prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx. \tag{7}$$

La disuguaglianza di Young (2) valida in $\mathbb{R}$ ci dice che

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$$

e dunque garantisce che l'integrale (7) sia assolutamente convergente. Dunque se $f, g \in \mathcal{H}(a,b)$ il prodotto scalare $\langle f, g \rangle$ è ben definito ed è un numero finito. A questo punto è facile verificare che $\langle f, g \rangle$ è una forma bilineare simmetrica non negativa. Dunque soddisfa tutte le proprietà formali date nella definizione 7.5 di prodotto scalare salvo il fatto che non è garantito che $\langle f, f \rangle = 0$ implichi $f = 0$. In effetti questa proprietà è falsa perché se la funzione $f^2(x)$ ha integrale nullo non è detto che sia identicamente nulla: l'integrale, infatti, non cambia se la funzione viene modificata in un singolo punto.

Per ovviare a questo problema bisogna che identifichiamo due funzioni $f, g \in \mathcal{H}(a,b)$ se $\|f - g\|_2 = 0$:

$$f \sim g \iff \|f - g\|_2 = 0.$$

Chiamiamo $H(a,b)$ il quoziente:

$$H(a,b) = \mathcal{H}(a,b)/\sim$$

cioè lo spazio vettoriale delle funzioni in $\mathcal{H}(a,b)$ dove due funzioni vengono identificate se la norma della differenza è nulla (si vedano gli appunti di logica [5] per la definizione di insieme quoziente).

Lo spazio quoziente $H(a,b)$ risulta finalmente essere uno spazio euclideo. Mantiene infatti la struttura vettoriale (in quanto l'insieme $\{f \in \mathcal{H}(a,b) \colon \|f\|_2 = 0\}$ è uno spazio vettoriale) e il prodotto scalare $\langle f, g \rangle$ (e di conseguenza la norma $\|f\|_2$) è ben definito su $H(a,b)$ e oltre alle proprietà che già abbiamo dimostrato possiamo ora affermare che $\langle f, f \rangle = \|f\|_2 = 0$ se e solo se $f = 0$.

***Osservazione* 7.57.** La notazione $H(a,b)$ che scegliamo di utilizzare per definire questo spazio non è standard. La lettera H rimanda ad Hilbert in quanto lo studio di questo spazio in particolare ha spinto verso l'astrazione del concetto di spazio di Hilbert. Quello che vedremo nel seguito è che questo spazio non risulta essere completo e dunque in realtà non è uno spazio di Hilbert. In effetti l'utilizzo degli integrali impropri è un tentativo, di estendere l'integrale di Riemann in modo da rendere completo questo spazio. Solo con la definizione di integrale di Lebesgue (1875–1941) si è riusciti ad estendere l'integrale di Riemann ad una classe più amplia di funzioni fino a completare lo spazio. L'analogo dello spazio $H(a,b)$ definito tramite integrale di Lebesgue viene usualmente chiamato L^2. L'esponente 2 è dovuto al fatto che sarebbe possibile definire gli spazi L^p in maniera analoga a quanto fatto nell'esempio 7.9. Si avrebbe ancora che solo per $p = 2$ questi spazi normati sono euclidei, cioè solo per $p = 2$ la norma è indotta da un prodotto scalare. Tutti gli spazi L^p sono completi e dunque sono spazi di Banach. Ma L^2 è anche uno spazio di Hilbert, in quanto è dotato di prodotto scalare. Anzi potremmo dire che L^2 è lo spazio di Hilbert per antonomasia e viene denotato anche con il nome H^0 (in questo caso l'esponente denota la derivabilità delle funzioni, come in C^0).

Gli elementi di $H(a,b)$ non sono funzioni, ma classi di equivalenza di funzioni. Nel seguito, però, tratteremo $f \in H(a,b)$ come se fosse $f \in \mathcal{H}(a,b)$ facendo attenzione che le nostre affermazioni rimangano valide se al posto di una funzione f si prende una funzione a lei equivalente. In particolare avrà senso considerare gli integrali di queste funzioni, perché il valore dell'integrale non dipende dal rappresentante scelto, ma non avrà senso considerare il valore che le funzioni assumono in un singolo punto, perché questo dipende dal rappresentante.

7.4.1 *serie di Fourier*

Lo spazio $H(a,b)$ è uno spazio vettoriale reale su cui siamo riusciti a definire un prodotto scalare e quindi una norma. Vorremmo trovare su $H(a,b)$ una base ortonormale rispetto alla quale sia possibile scrivere le coordinate dei vettori (cioè delle funzioni) di $H(a,b)$. Visto che $H(a,b)$ non ha dimensione finita non potremo sperare di trovare una base con un numero finito di elementi. Introduciamo quindi la seguente.

sistema ortonormale
base hilbertiana

Definizione 7.58 (base hilbertiana)**.** *Sia V uno spazio euclideo. Siano $e_k \in H(a,b)$ con $k \in \mathbb{N}$. Diremo che e_k è un* sistema ortonormale *se $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ quando $k \neq j$ e $\langle e_k, e_k \rangle = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Diremo che e_k è una* base hilbertiana *se è un sistema ortonormale e inoltre per ogni $v \in V$ esistono $c_k \in \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{N}$ per cui si abbia*

$$v = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e_k. \tag{8}$$

Teorema 7.59 (disuguaglianza di Bessel)**.** *Sia $e_0, e_1, e_2, \dots$ un sistema orto-*

normale in uno spazio euclideo V. Per ogni $v \in V$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ponga $c_k = \langle v, e_k \rangle$. Allora vale la disuguaglianza di Bessel*:*

disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \leq |v|^2. \tag{9}$$

Inoltre possiamo affermare che il sistema ortonormale $e_0, e_1, e_2, \ldots$ è una base hilbertiana se e solo se per ogni $v \in V$ vale l'uguaglianza:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 = |v|^2. \tag{10}$$

Dimostrazione. Dato $v \in V$ poniamo $c_k = \langle v, e_k \rangle$ e

$$v_N = \sum_{k=0}^{N} c_k e_k, \qquad w_N = v - v_N.$$

Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\langle v_N, w_N \rangle = 0$ (w_N è ortogonale a v_N) in quanto se $n \leq N$:

$$\langle w_N, e_n \rangle = \langle v, e_n \rangle - \sum_{k=0}^{N} c_k \langle e_k, e_n \rangle = \langle v, e_n \rangle - c_n = 0$$

e quindi

$$\langle w_N, v_N \rangle = \sum_{k=0}^{N} c_k \langle w_N, e_k \rangle = 0.$$

dunque possiamo concludere, grazie al teorema di Pitagora (1)

$$\begin{aligned} |v|^2 &= |v_N + w_N|^2 = |v_N|^2 + |w_N|^2 \\ &\geq |v_N|^2 = \left| \sum_{k=0}^{N} c_k e_k \right|^2 = \sum_{k=0}^{N} c_k^2. \end{aligned}$$

Passando al limite per $N \to +\infty$ si ottiene la disuguaglianza di Bessel.

Il sistema è hilbertiano, per definizione, se e solo se $v_N \to v$ ovvero se $w_N \to 0$. Ma abbiamo visto che $|w_N|^2 = |v|^2 - |v_N|^2$ dunque la condizione $|w_N|^2 \to 0$ è equivalente all'uguaglianza di Bessel: $|v_N|^2 \to |v|^2$. $\square$

Il nostro obiettivo è ora quello di produrre una base hilbertiana di $H(-\pi,\pi)$. Consideriamo le seguenti funzioni trigonometriche[1]:

$$\begin{aligned} e_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ e_{2k+1}(x) &= \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \qquad k = 0, 1, \dots \\ e_{2k}(x) &= \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \qquad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Ovviamente

$$\|e_0\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) dx} = 1$$

ma è anche facile verificare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\, dx = \frac{1}{k}\int_{-k\pi}^{k\pi} \cos^2 y\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y\, dy = \pi$$

da cui si ottiene $\|e_{2k}\|_2 = 1$. Visto che la funzione sin è la traslata di cos si ottiene analogamente che $\|e_{2k+1}\|_2 = 1$. Dunque i vettori $e_0, e_1, \dots$ sono tutti di modulo unitario. Utilizzando la formula di Eulero si può trovare la formula di Werner:

$$\begin{aligned} \sin(mx)\cos(nx) &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \cdot \frac{e^{imx} - e^{-imn}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(m+n)x}}{4i} + \frac{e^{-i(m+n)x}}{4i} + \frac{e^{i(m-n)x}}{4i} - \frac{e^{-i(m-n)x}}{4i} \\ &= \frac{\sin((m+n)x)}{2} + \frac{\sin((m-n)x)}{2} \end{aligned}$$

da cui se $m \neq n$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\, dx = &-\frac{1}{2(m+n)}[\cos((m+n)x)]_{-\pi}^{\pi} \\ &- \frac{1}{2(m-n)}[\cos((m-n)x)]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

e se $m = n$ si arriva comunque allo stesso risultato. Questo significa che $\langle e_{2n}, e_{2m+1}\rangle = 1$. Discorso analogo si può fare per le funzioni $\sin(mx)\sin(nx)$ e $\cos(mx)\cos(nx)$ trovando, anche in quei casi, che tali

1 Dal punto di vista algebrico sarebbe molto più semplice considerare le funzioni a valori complessi:

$$e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Preferiamo però rimanere nell'ambito delle funzioni reali per non dover introdurre la struttura hermitiana degli spazi vettoriali complessi.

prodotti hanno integrale nullo nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Per nostra memoria le formule di Werner che si trovano in questi ultimi casi sono:

$$\begin{aligned}\cos(mx)\cos(nx) &= \frac{\cos((m+n)x)}{2} + \frac{\cos((m-n)x)}{2}\\ \sin(mx)\sin(nx) &= \frac{\cos((m-n)x)}{2} - \frac{\cos((m+n)x)}{2}.\end{aligned}$$

Risulta dunque che le funzioni $e_0, e_1, e_2, \dots$ definite da (11) formano un sistema ortonormale in $H(-\pi, \pi)$ in quanto si ha:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Di conseguenza le funzioni $e_0, e_1, e_2, \dots$ sono tra loro indipendenti in $H(-\pi, \pi)$ in quanto se una loro combinazione lineare è nulla:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k = 0$$

allora, facendone il prodotto scalare con e_j si ottiene:

$$0 = \langle \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_j \rangle = \lambda_j$$

e dunque tutti i coefficienti λ_j sono nulli. Possiamo in particolare dedurre che $H(-\pi, \pi)$ ha dimensione infinita.

Definizione 7.60 (polinomi trigonometrici)**.** *Una funzione f si dice essere un* polinomio trigonometrico *se esiste un polinomio in due variabili $P(X, Y)$ tale che* *polinomio trigonometrico*

$$f(x) = P(\cos x, \sin x).$$

Possiamo verificare che f è un polinomio trigonometrico se e solo se è possibile scrivere f come combinazione lineare finita delle funzioni e_k appena introdotte, cioè se esistono $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$f = \sum_{k=0} c_k e_k.$$

Basta infatti ricondurre le funzioni trigonometriche all'esponenziale complesso, tramite la formula di Eulero:

$$\begin{aligned}\cos(nx) + i\sin(nx) &= e^{inx} = (e^{in})^k = (\cos x + i \sin x)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin x)^k (\cos x)^{n-k}\end{aligned}$$

da cui, prendendo parte reale, e parte immaginaria si riesce ad esprimere $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ come polinomio in $\sin x$ e $\cos x$. Più precisamente per il coseno si ottengono solo i termini con k pari:

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (\sin x)^{2k} (\cos x)^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(\cos^2 x - 1\right)^k (\cos x)^{n-2k}\end{aligned}$$

ovvero

$$\cos(nx) = T_n(\cos x)$$

dove

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(x^2 - 1\right)^k x^{n-2k}$$

si chiama *polinomio di Chebyshev di prima specie*. Questo significa che ognuna delle funzioni e_k che abbiamo introdotto in (11) è un polinomio trigonometrico e quindi ogni combinazione finita di tali funzioni è ancora un polinomio trigonometrico.

Viceversa per verificare che ogni polinomio trigonometrico può essere rappresentato come combinazione lineare finita degli elementi e_k possiamo osservare che se $f(x) = P(\cos x, \sin x)$ è un polinomio trigonometrico allora usando le formule di Eulero si può scrivere $f(x) = Q(e^{ix}, e^{-ix})$ dove Q è un polinomio a coefficienti complessi. Ma osservando che

$$\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$$

si ottiene che $f(x)$ può essere scritta come combinazione lineare complessa delle funzioni e^{ikx} e e^{-ikx}. Utilizzando nuovamente le fomule di Eulero si deduce che $f(x)$ può essere scritta come combinazione lineare complessa delle funzioni $\cos(ikx)$ e $\sin(ikx)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (z_k \cos(ikx) + w_k \sin(ikx)).$$

Ma visto che sappiamo che $f(x)$ è una funzione reale, la somma delle parti immaginarie di questa combinazione lineare è nulla e dunque abbiamo ottenuto che $f(x)$ è combinazione lineare a coefficienti reali delle funzioni e_n.

coefficienti di Fourier

Definizione 7.61 (serie di Fourier). *Se $f \in \mathcal{H}(a,b)$ i coefficienti $c_k = \langle f, e_k \rangle$ si chiamano* coefficienti di Fourier *di f e la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e_k$$

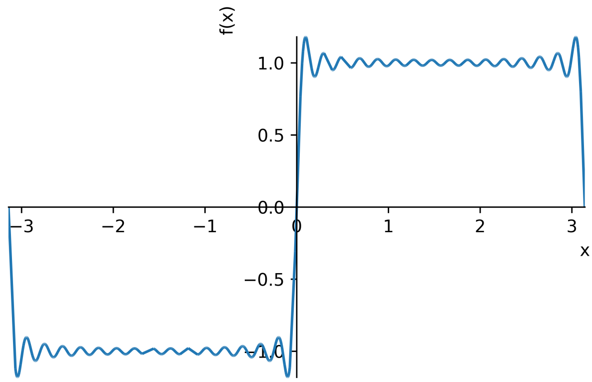


Figura 3: Lo sviluppo di Fourier della funzione che vale 1 su $[0, \pi]$ e -1 su $[-\pi, 0]$: $f_{61}(x) = \frac{4\sin(x)}{\pi} + \frac{4\sin(3x)}{3\pi} + \frac{4\sin(5x)}{5\pi} + \frac{4\sin(7x)}{7\pi} + \frac{4\sin(9x)}{9\pi} + \frac{4\sin(11x)}{11\pi} + \frac{4\sin(13x)}{13\pi} + \frac{4\sin(15x)}{15\pi} + \frac{4\sin(17x)}{17\pi} + \frac{4\sin(19x)}{19\pi} + \frac{4\sin(21x)}{21\pi} + \frac{4\sin(23x)}{23\pi} + \frac{4\sin(25x)}{25\pi} + \frac{4\sin(27x)}{27\pi} + \frac{4\sin(29x)}{29\pi} + \frac{4\sin(31x)}{31\pi}$. Il codice python per calcolare i coefficienti e generare il grafico a pagina 369

si chiama serie di Fourier *di f. Il polinomio trigonometrico* *serie di Fourier*

$$f_N = \sum_{k=0}^{N} c_k e_k$$

è si chiama sviluppo di Fourier *di ordine N per f.* *sviluppo di Fourier*

Risulta naturale chiedersi se quella che abbiamo introdotto è una *base hilbertiana* perché solo in tal caso gli sviluppi di Fourier approssimano la funzione. Per ottenere questo risultato dobbiamo assumere la validità del seguente teorema, che sarebbe ora troppo lungo dimostrare.

Teorema 7.62 (densità dei polinomi trigonometrici)**.** *Per ogni funzione continua $f \in C^0([a,b])$ esiste una successione $g_k \in \mathcal{H}(a,b)$ di polinomi trigonometrici (cioè combinazioni lineari finite del sistema $\{e_k\}$) tale che g_k converge uniformemente a f.*

Detto in altri termini: l'insieme dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio $C^0([a,b])$ rispetto alla norma uniforme.

Osserviamo che la convergenza uniforme è più forte della convergenza in $H(a,b)$ in quanto si ha, banalmente:

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx \le \int_a^b \|f\|_\infty^2\,dx = (b-a)\cdot\|f\|_\infty^2.$$

Dunque il teorema precedente garantisce che ogni funzione continua in $\mathcal{H}(a,b)$ può essere approssimata, rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$, tramite polinomi trigonometrici. Il teorema seguente ci permette di estendere questa proprietà a tutte le funzioni di $\mathcal{H}(a,b)$.

Teorema 7.63 (densità delle funzioni continue)**.** *Data una qualunque $f \in H(a,b)$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.*

Detto in altri termini: $C^0([a,b])$ è un sottospazio denso in $H(a,b)$ cioè un insieme la cui chiusura (nella topologia di $H(a,b)$) è tutto $H(a,b)$.

Dimostrazione. Se $f \in H(a,b)$ si ha, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \le \|1\|_2 \cdot \|f\|_2 = \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2 < +\infty.$$

Dunque la funzione f è assolutamente integrabile su (a,b). Se f è limitata su (a,b) possiamo pensare che f sia definita su $[a,b]$ e l'integrale è un usuale integrale di Riemann (non improprio). Per le condizioni di integrabilità sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare una suddivisione $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ su cui l'integrale di f differisce dagli integrali superiore e inferiore per meno di ε. Possiamo prendere come funzione g una interpolazione lineare cioè una funzione tale che si abbia $g(x_k) = f(x_k)$ sui punti della suddivisione e che risulti lineare su ogni intervallino $[x_k, x_{k+1}]$. La funzione g così definita è compresa, su ogni intervallino, tra l'inf e il sup di f e dunque si avrà:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Visto però che f è limitata sappiamo esistere $M > 0$ per cui $\|f\|_\infty \le M$ e di conseguenza $\|g\|_\infty \le M$ e quindi $\|f-g\|_2 \le 2M$. Ma allora

$$\|f-g\|_2^2 = \int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx \le \int_a^b \|f-g\|_\infty \cdot |f(x)-g(x)|\,dx \le 2M\varepsilon.$$

Abbiamo quindi mostrato che una funzione limitata e integrabile può essere approssimata con funzioni continue.

Se la funzione è integrabile in senso improprio su (a,b) ma non è limitata, per definizione di integrale improprio per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un intervallo $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ per f risulta limitata su $[\alpha,\beta]$ e l'integrale di f su (a,b) differisce dall'integrale di f su $[\alpha,\beta]$ per meno di ε. Ci possiamo quindi ricondurre al passo precedente per trovare una funzione g che approssima bene f sull'intervallo $[\alpha,\beta]$. Estendendo g in modo costante su $(a,b) \setminus [\alpha,\beta]$ si troverà una funzione che approssima bene f su tutto (a,b). □

Grazie ai due teoremi precedenti sappiamo che ogni $f \in \mathcal{H}(a,b)$ può essere approssimata da polinomi trigonometrici $g_N \to f$ cioè da funzioni della forma:

$$g_N = \sum_{k=0}^{N} a_{k,N} e_k.$$

Stiamo qui assumendo che il polinomio trigonometrico g_N abbia ordine non superiore ad N, ma questo si può sempre assumere, scartando o ripetendo i termini della successione.

Se ora consideriamo gli sviluppi di Fourier:

$$f_N = \sum_{k=0}^{N} c_k e_k, \qquad c_k = \langle f, e_k \rangle$$

ci ricordiamo che per ogni $k \leq N$ risulta

$$\langle f - f_N, e_k \rangle = \sum k = 0^N (\langle f, e_k \rangle - c_k) = 0$$

e quindi

$$\langle f - f_N, g_N - f_N \rangle = \sum_{k=0}^{N} \langle f - f_N, (a_{k,N} - c_k) e_k \rangle = 0.$$

Dunque, applicando il teorema di Pitagora,

$$\|f - f_N\|_2^2 = \|f - g_N\|_2^2 - \|f_N - g_N\|_2^2 \leq \|f - g_N\|_2^2 \to 0.$$

Questo significa, dunque, che il sistema ortonormale che abbiamo introdotto è una base hilbertiana e quindi che ogni funzione $f \in \mathcal{H}(a,b)$ si approssima rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$ con gli sviluppi di Fourier.

Ricordiamo che se $\|f_N - f\|_2 \to 0$ non è detto che si abbia la convergenza puntuale $f_N(x) \to f(x)$ per ogni $x \in (a,b)$ in quanto il limite è unico in $H(a,b)$ ma non in $\mathcal{H}(a,b)$ e dunque è possibile (e in effetti può succedere) che il limite puntuale degli sviluppi di Fourier differisca, in alcuni punti, dalla funzione che si sta approssimando.

Purtroppo lo spazio $H(a,b)$ non risulta essere completo, come si può vedere nel seguente esempio.

Esempio* 7.64** *(razionali ingrassati).** Vogliamo dimostrare che lo spazio $H(0,1)$ non è completo.

Sappiamo che l'insieme $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ è numerabile, quindi esiste una successione q_k che elenca tutti i numeri razionali nell'intervallo $[0,1]$. Poniamo inoltre $r_k = \frac{1}{4 \cdot 2^k}$ e consideriamo gli intervalli $I_k = [q_k - r_k, q_k + r_k]$. Prendiamo la successione di funzioni $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \bigcup_{k=1}^{n} I_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A differenza di quanto uno potrebbe pensare, queste funzioni f_n non diventano mai identicamente uguali ad 1. Anzi, si può osservare che

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{q_k - r_k}^{q_k + r_k} 1\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 \cdot 2^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Si può mostrare che f_k è una successione di Cauchy in $H(0,1)$ e che però non converge in $H(0,1)$.

Dimostrazione. Per verificare che f_n è una successione di Cauchy possiamo semplicemente osservare che se $n \geq m$ risulta che f_n e f_m differiscono solamente sugli intervalli I_k con k compreso tra m ed n. Dunque:

$$\int_0^1 |f_n - f_m| \leq \sum_{k=m}^{+\infty} \int_{q_k-r_k}^{q_k+r_k} 1\, dx = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^k} = \frac{1}{2^m}.$$

Visto che f_n e f_m assumono solamente i valori 0 e 1 anche $|f_n - f_m|$ assume solamente i valori 0 e 1 quindi $|f_n - f_m|^2 = |f_n - f_m|$. Abbiamo quindi verificato che per $n \geq m$ si ha:

$$\|f_n - f_m\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{2^m}}.$$

E' dunque chiaro che comunque sia scelto $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere N tale che $1/2^N \leq \varepsilon^2$ da cui si ottiene che se $n, m \geq N$ allora $\|f_n - f_m\|_2 \leq \varepsilon$. Cioè: f_n è una successione di Cauchy.

Supponiamo ora, per assurdo, che esista $f \in H(0,1)$ tale che $\|f_n - f\|_2 \to 0$. Innanzitutto visto che ogni $f_k \leq 1$ possiamo supporre che sia anche $f \leq 1$ perché altrimenti potremmo prendere $g(x) = \min\{f(x), 1\}$ e avremmo chiaramente $\|f_n - g\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 \to 0$. In pratica stiamo dicendo che modificando la funzione f senza cambiarne l'integrale possiamo suppore che $f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$.

Fissato un intervallo I_n, per $k \to +\infty$ si ha:

$$0 \leq \int_{q_n-r_n}^{q_n+r_n} |f_k(x) - f(x)|^2\, dx \leq \int_0^1 |f_k(x) - f(x)|^2\, dx = \|f_k - f\|_2^2 \to 0.$$

Ma ora se $k \geq n$ risulta che $f_k = 1$ su I_n e quindi il valore dell'integrale precedente non dipende da k e dovrà quindi essere identicamente nullo:

$$\int_{q_n-r_n}^{q_n+r_n} f(x) - 1\, dx = 0$$

e quindi possiamo affermare che $\sup f(I_n) = 1$ in quanto se fosse $\sup f(I_n) = \lambda < 1$ l'integrale di $f(x) - 1$ sarebbe negativo sull'intervallo I_n.

Vogliamo ora dimostrare che su ogni intervallo $[a, b] \subseteq [0, 1]$ si ha $\sup f([a, b]) = 1$. Prendiamo N abbastanza grande in modo che $r_N < (b-a)/3$. Allora l'intervallo $[a + r_n, b - r_n]$ ha ampiezza r_n e contiene infiniti numeri razionali. Esistono quindi infiniti indici n per cui q_n sta in tale intervallo. Tra questi infiniti certamente ce n'è uno con indice $n \geq N$ (perché i q_n con $n < N$ sono in numero finito). Ma se $q_n \in [a + r_n, b - r_n]$ allora $I_n \subseteq [a, b]$ e quindi $\sup f([a, b]) \geq \sup f(I_n) = 1$.

Questo significa che per ogni suddivisione di Riemann dell'intervallo $[0, 1]$ risulta che il sup di f sugli intervallini della suddivisione è 1 e quindi l'integrale superiore di f è anch'esso 1. Dunque, essendo f integrabile,

$$\int_a^b f(x) = 1.$$

Vogliamo ora concludere che questo è in contraddizione con la disuguaglianza

$$\int_a^b f_n(x) \leq \frac{1}{2}$$

che abbiamo osservato all'inizio. Si ha infatti per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq \|f - f_n\|_2 \cdot \|1\|_2 \to 0$$

e quindi, per il criterio di convergenza assoluta,

$$\int_0^1 (f(x) - f_n(x))\, dx \to 0.$$

Ma abbiamo visto che

$$\int_0^1 (f(x) - f_n(x))\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 f_n(x)\, dx \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ottenendo quindi un assurdo. □

Il fatto di avere trovato una base hilbertiana di $H(a,b)$ ci permette di dire che ogni funzione in $H(a,b)$ può essere rappresentata dalle sue coordinate c_k in modo che valga l'uguaglianza di Bessel:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2}.$$

Abbiamo in effetti definito una corrispondenza:

$$\varphi\colon H(a,b) \to \ell^2, \qquad \ell^2 = \{c \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \colon \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 < +\infty\}$$

definita da

$$c_k = \varphi(f) = \langle f, e_k \rangle.$$

Chiaramente tale φ è lineare. Visto che e_k è una base hilbertiana è facile verificare che φ è anche iniettivo. Se su ℓ^2 definiamo il prodotto scalare e la norma corrispondente:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k, \qquad |x|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} x_k^2}$$

l'uguaglianza di Bessel ci dice che φ mantiene la norma e quindi la struttura di spazio euclideo. Si potrebbe dimostrare che ℓ^2 è completo e questo significa che φ non è suriettiva in quanto la successione f_n considerata nell'esempio 7.64 è di Cauchy in $H(a,b)$, dunque $\varphi(f_n)$ è di Cauchy in ℓ^2 e dunque converge in ℓ^2. Il limite c della successione $\varphi(f_n)$ rappresenta una successione di coefficienti di Fourier che non possono essere ottenuti da nessuna funzione $f \in H(a,b)$.

7.5 DIVAGAZIONE SUI FRATTALI AUTOSIMILI

In questo capitolo mostriamo una applicazione geometrica del teorema delle contrazioni. Considereremo uno spazio metrico i cui punti sono le figure geometriche e vedremo che i frattali autosimili non sono altro che punti fissi di opportune mappe contrattive.

distanza di Hausdorff

Definizione 7.65. *Siano A e B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^n$. Definiamo la* distanza di Hausdorff *tra A e B come:*

$$d_{\mathcal{H}}(A,B) = \max\left\{ \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} |a-b|, \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} |a-b| \right\}.$$

Definiamo

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \colon A \text{ chiuso, limitato, non vuoto}\}.$$

Teorema 7.66 (caratterizzazione della distanza di Hausdorff). *Se A e B sono compatti di $\mathbb{R}^n$ (cioè chiusi e limitati) allora per ogni $r \in \mathbb{R}$ si ha*

$$d_{\mathcal{H}}(A,B) \le r$$

se e solo se valgono entrambe le seguenti proprietà:

1. *per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ tale che $|a-b| \le r$;*
2. *per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $|a-b| \le r$.*

Dimostrazione. Per ogni compatto non vuoto A e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo la distanza tra il punto x e l'insieme A come:

$$d(x,A) = \min_{a\in A} |x-a|.$$

Il minimo esiste in quanto A è compatto e $a \mapsto d(x,a)$ è una funzione continua. Fissato A la funzione $x \mapsto d(x,A)$ è anch'essa continua, anzi è 1-lipschitziana. Infatti se $x' \in \mathbb{R}^n$ esiste $a' \in A$ tale che $d(x',A) = d(x',a')$ e dunque

$$d(x,A) = \min_{x\in A} |x-a| \le |x-a'| \le |x-x'| + |x'-a'| = |x-x'| + d(x',A)$$

da cui $d(x,A) - d(x',A) \le |x-x'|$. Scambiando x e x' si ottiene anche la disuguaglianza inversa da cui la 1-lipschitzianità di $d(x,A)$. Dunque sui compatti la funzione $d(x,A)$ assume sempre massimo e si ha:

$$d_{\mathcal{H}}(A,B) = \max\{\max_{a\in A} d(a,B), \max_{b\in B} d(b,A)\}.$$

In particolare se $d_{\mathcal{H}}(A,B) \le r$ per ogni $a \in A$ si deve avere $d(a,B) \le r$ e per ogni $b \in B$ si deve avere $d(b,A) \le r$. Ma allora valgono le due proprietà dell'enunciato.

Viceversa se vale la proprietà 1. allora $d(a,B) \le r$ e se vale la 2. $d(b,A) \le r$ e di conseguenza $D_{\mathcal{H}}(A,B) \le r$. □

Teorema 7.67 (distanza di Hausdorff). *La distanza di Hausdorff $d_{\mathcal{H}}$ è una distanza su $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ e lo spazio metrico $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ è completo.*

Dimostrazione. Chiaramente se A, B sono non vuoti si ha $d_{\mathcal{H}}(A, B) \geq 0$. Inoltre, in base alla caratterizzazione del teorema precedente è facile osservare che $d_{\mathcal{H}}(A, B) < +\infty$.

Se $d_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$ significa che per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ tale che $|a - b| = 0$. Cioè $b = a$. Dunque $A \subseteq B$. Scambiando i ruoli di A e B si ottiene anche $B \subseteq A$ da cui $A = B$.

Che sia $d_{\mathcal{H}}(A, B) = d_{\mathcal{H}}(B, A)$ è ovvio in quanto la definizione è simmetrica in A e B.

Verifichiamo ora la disuguaglianza triangolare. Siano A, B, C tre compatti non vuoti. Per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ tale che $|a - b| \leq d_{\mathcal{H}}(A, B)$ e per tale $b \in B$ esiste un $c \in C$ tale che $|b - c| \leq d_{\mathcal{H}}(B, C)$. Dunque per ogni $a \in A$ esiste un $c \in C$ tale che

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c| \leq d_{\mathcal{H}}(A, B) + d_{\mathcal{H}}(B, C).$$

Scambiando i ruoli di A e C si ottiene anche la condizione simmetrica e dunque, per la caratterizzazione della distanza di Hausdorff si ottiene la disuguaglianza triangolare:

$$d_{\mathcal{H}}(A, C) \leq d_{\mathcal{H}}(A, B) + d_{\mathcal{H}}(B, C).$$

Abbiamo quindi verificato che $d_{\mathcal{H}}$ è una distanza su $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Verifichiamo ora che $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ è completo.

Sia $A_k \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ una successione di Cauchy. Senza perdita di generalità possiamo supporre che

$$d_{\mathcal{H}}(A_k, A_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Infatti essendo A_k di Cauchy è possibile trovarne una sottosuccessione con tale proprietà, e se poi dimostriamo che la sottosuccessione converge allora l'intera successione, essendo di Cauchy, deve convergere.

Consideriamo come candidato limite l'insieme di tutti i possibili limiti di punti degli insiemi A_k:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists x_k \in A_k \colon x_k \to x\}.$$

Per prima cosa vogliamo verificare che A non è vuoto. Scelto un punto qualunque $a_0 \in A_0$ esiste $a_1 \in A_1$ tale che $|a_0 - a_1| = d_{\mathcal{H}}(A_0, A_1)$. Iterando otteniamo una successione di punti $a_k \in A_k$ tale che $|a_k - a_{k+1}| \leq d_{\mathcal{H}}(A_k, A_{k+1}) \leq 1/2^k$. Dunque a_k è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ ed essendo $\mathbb{R}^n$ completo dovrà convergere ad un punto a che quindi è un punto di A.

Avendo assunto $d_{\mathcal{H}}(A_k, A_{k+1}) < 1/2^k$ si ottiene (sommando la serie geometrica):

$$d_{\mathcal{H}}(A_k, A_n) \leq \sum_{j=k}^{n-1} d_{\mathcal{H}}(A_j, A_{j+1}) \leq \frac{2}{2^k} \qquad \text{se } n > k.$$

Questo ci permette di dimostrare che per ogni $a \in A$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $a_k \in A_k$ tale che $|a - a_k| \leq 4/2^k$. Infatti se a distanza $4/2^k$ non ci fossero punti di A_k allora a distanza $2/2^k$ non ci potrebbero essere punti di A_n per nessun $n > k$ in quanto visto che $d_{\mathcal{H}}(A_k, A_n) \leq 2/2^k$ se ci fosse un punto di A_n a distanza inferiore a $2/2^k$ ci dovrebbe anche essere un punto di A_k a distanza inferiore a $4/2^k$. Ma questo è impossibile perché per come è definito A deve esistere $x_n \in A_n$ tale che $x_n \to a$. Abbiamo quindi mostrato che

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in A_k} |a - b| \leq 4/2^k \to 0.$$

Viceversa ci proponiamo di mostrare che per ogni $p \in A_k$ esiste $a \in A$ tale che $|p - a| < 2/2^k$. Visto che $d_{\mathcal{H}}(A_{j+1}, A_j) \leq 1/2^j$ possiamo infatti costruire a partire da $a_k = p \in A_k$ una successione $a_j \in A_j$ con $j > k$, tale che $d(a_{j+1}, a_j) \leq 1/2^j$. Tale successione è di Cauchy quindi converge: $a_j \to a$ e il suo limite a è quindi un punto di A e si ha

$$|a - p| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |a_j - a_{j+1}| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\sup_{b \in a_k} \inf_{a \in A} |a - b| \leq 2/2^k \to 0$$

e quindi $d_{\mathcal{H}}(A_k, A) \to 0$.

Ci rimane solo da mostrare che A è un insieme chiuso. Presa una successione di punti $x_k \in A$ convergente $x_k \to x$, dobbiamo mostrare che $x \in A$. Per ogni $x_k \in A$ per quanto già detto sappiamo esistere $a_k \in A_k$ tale che $|a_k - x_k| \leq 4/2^k$. Ma allora $|a_k - a| \leq 4/2^k + |x_k - a| \to 0$ e quindi $a_k \to a$ da cui $a \in A$. □

Teorema 7.68 (frattali autosimilari)**.** *Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_N \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contrazioni (cioè funzioni lipschitziane con costante di lipschitz inferiore ad 1). Allora esiste un unico insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato tale che*

$$C = \bigcup_{k=1}^{N} \varphi_k(C).$$

Dimostrazione. Basterà dimostrare che la funzione $T \colon \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ definita da

$$T(A) = \bigcup_{k=1}^{N} \varphi_k(C)$$

è una contrazione: dopodiché sapendo che $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ è completo il risultato è conseguenza diretta del teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli.

Ogni φ_k per ipotesi è una contrazione, cioè per ogni $a, b \in X$

$$|\varphi_k(a) - \varphi_k(b)| \leq L_k |a - b|$$

con $L_k < 1$. Posto $L = \max\{L_1, \dots, L_N\} < 1$ vogliamo dimostrare che T è L-lipschitziana (e dunque una contrazione). Siano $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ e sia $d = d_{\mathcal{H}}(A, B)$. Preso $a' \in T(A)$ dovrà esistere k tale che $a' \in \varphi_k(A)$. Cioè $a' = \varphi_k(a)$ con $a \in A$. Ma allora esiste $b \in B$ con $|a - b| \le d_{\mathcal{H}}(A, B) = d$ e quindi $b' = \varphi_k(b) \in T(B)$ e $|a' - b'| = |\varphi_k(a) - \varphi_k(b)| \le L|a - b| \le L \cdot d$. Dunque abbiamo mostrato che

$$\sup_{a' \in T(A)} \inf_{b' \in T(B)} \left| a' - b' \right| \le L d_{\mathcal{H}}(A, B).$$

La stessa disuguaglianza rimane valida con A e B scambiati, ottenendo quindi:

$$d_{\mathcal{H}}(T(A), T(B)) \le L \cdot d_{\mathcal{H}}(A, B).$$

□

***Esempio* 7.69** *(insieme di Cantor)*. Si prendano $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$\varphi(x) = \frac{x}{3}, \qquad \psi(x) = \frac{2 + x}{3}.$$

Chiaramente φ e ψ sono $1/3$-lipschitziane e dunque, per il teorema precedente, esiste un unico insieme C chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ tale che

$$C = \frac{C}{3} \cup \frac{C + 2}{3}.$$

Tale insieme si chiama *insieme di Cantor*. insieme di Cantor

L'insieme di Cantor è un frattale autosimile in quanto si ottiene come l'unione di due copie riscalate di sé stesso.

E' facile mostrare che $C \subseteq [0, 1]$ in quanto T manda sottoinsiemi di $[0, 1]$ in sottoinsiemi di $[0, 1]$. Ogni $x \in [0, 1]$ può essere rappresentato in base 3 con una sequenza di cifre ternarie: $0, 1, 2$. La funzione $\varphi(x)$ aggiunge uno 0 in cima alla sequenza di cifre, mentre la funzione $\psi(x)$ aggiunge un 2 in cima alla sequenza. Vogliamo mostrare che C è l'insieme di tutti i numeri in $[0, 1]$ che possono essere scritti in base 3 utilizzando solamente le cifre 0 e 2. Osserviamo innanzitutto che C è chiuso: il suo complementare in $[0, 1]$ è formato da tutti i numeri che in base 3 si devono scrivere utilizzando almeno una cifra 1. Ma se c'è una cifra 1 posso modificare tutte le cifre successive rimanendo nel complementare di C: dunque il complementare di C è aperto. Si osservi che gli unici numeri che hanno una doppia rappresentazione in base 3 sono quelli che terminano con una sequenza infinita di 2,

***Esempio* 7.70** *(curva di Köch)*. Sia $R_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione con centro l'origine di θ radianti in senso antiorario. Sia $\alpha = \pi/3$, $p = (1, 0)$ e siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni definite da:

$$\varphi_1(v) = \frac{v}{3}, \qquad \varphi_2(v) = R_\alpha \frac{v}{3} + \varphi_1(p),$$
$$\varphi_3(v) = R_{-\alpha} \frac{v}{3} + \varphi_2(p), \qquad \varphi_4(v) = \frac{v}{3} + \varphi_3(p).$$

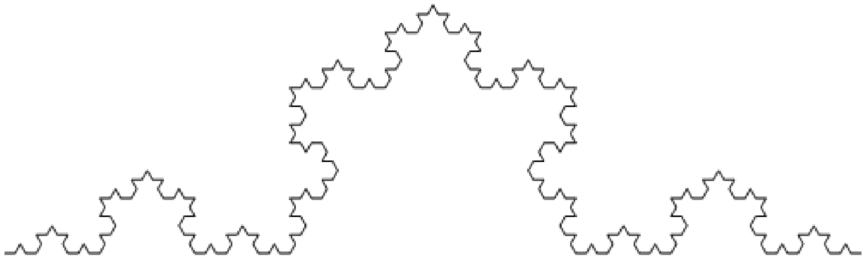


Figura 4: Chiamato $K_0 \in \mathbb{R}^2$ il segmento $[0,1] \times \{0\}$, in figura è rappresentata la quarta iterata $K_4 = T^4(K_0)$ della contrazione che definisce la curva di Köch. A pagina 368 il codice per generare la figura in copertina.

Allora esiste un unico insieme chiuso $K \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che

$$K = \varphi_1(K) \cup \varphi_2(K) \cup \varphi_3(K) \cup \varphi_4(K).$$

curva di Köch

L'insieme K si chiama *curva di Köch*. E' un frattale autosimile in quanto è composto da quattro copie riscalate di se stesso.

8 SUCCESSIONI RICORSIVE

In questo capitolo prenderemo in considerazione le successioni a_n definite *per ricorrenza* o *ricorsivamente* dalle condizioni:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \tag{1}$$

Fissato il termine iniziale α e la legge di ricorrenza f, c'è una unica successione che soddisfa (1) e i suoi termini sono:

$$\begin{aligned} &a_1 = \alpha, \\ &a_2 = f(a_1) = f(\alpha), \\ &a_3 = f(a_2) = f(f(\alpha)), \\ &a_4 = f(a_3) = f(f(f(\alpha))), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Il valore di a_n potrebbe rappresentare lo stato di un sistema che si evolve a partire da uno stato iniziale a_1 tramite la funzione f che rappresenta il cambiamento di stato. Il numero naturale n potrebbe quindi rappresentare un passo temporale. In tal senso (1) si chiama anche *sistema dinamico discreto*.

sistema dinamico discreto

L'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$ viene chiamata una *equazione autonoma del primo ordine*. Osserviamo infatti che ci sono altre tipologie di equazioni che però non considereremo in queste note. Ad esempio quando vogliamo definire il fattoriale: $a_n = n!$ diamo le condizioni:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n \end{cases}$$

ma l'equazione $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$ è della forma $a_{n+1} = f(n, a_n)$ e si dice essere *non autonoma* perché la funzione di ricorrenza f dipende esplicitamente da n oltre che dal termine precedente a_n.

Si potrebbero anche considerare equazioni di ordine maggiore del primo. Ad esempio la successione di *Fibonacci* F_n è definita da

Fibonacci

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases} \tag{2}$$

che è una relazione del secondo ordine in quanto ogni termine può essere definito utilizzando i valori dei *due* termini precedenti. Se l'equazione è lineare, come in questo caso, si possono trovare delle formule esplicite per scrivere l'n-esimo termine della successione. Lo faremo nella sezione 8.2

Si potrebbero anche considerare i sistemi di equazioni ricorsive. Ad esempio se f fosse una funzione complessa $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(x+iy) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$ con $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si potrebbe scrivere $a_n = x_n + iy_n$ con $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ l'equazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ diventerebbe un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = f_2(x_n, y_n). \end{cases}$$

Lo studio dei sistemi va oltre gli scopi di questo capitolo, ma accenneremo solamente ad un esempio nella sezione 8.3.

8.1 EQUAZIONI RICORSIVE AUTONOME DEL PRIMO ORDINE

***Esercizio* 8.1** *(algoritmo di Erone).* Fissato un numero reale $p > 1$ consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 = p \\ a_{n+1} = \frac{a_n + p/a_n}{2}. \end{cases}$$

Si dimostri che $a_n \to \sqrt{p}$.

Osserviamo, ad esempio, che per $p = 2$ i primi termini della successione sono:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= \frac{2 + 2/2}{2} = 3/2 = 1.5, \\ a_3 &= \frac{3/2 + 2/(3/2)}{2} = 17/12 \sim 1.4166666, \\ a_4 &= \frac{17/12 + 2/(17/12)}{2} = 577/408 \sim 1.4142157, \\ &\vdots \end{aligned}$$

che effettivamente *sembrano* avvicinarsi molto al numero

$$\sqrt{2} \sim 1.4142135.$$

Dimostrazione. Passo 1. Dimostriamo per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti per $n = 1$ osserviamo che $a_1 = p > 0$ mentre se supponiamo che $a_n > 0$ otteniamo che $a_{n+1} = (a_n + p/a_n)/2$ è positivo in quanto è la metà della somma di due quantità positive. Quindi, applicando il principio di induzione, possiamo concludere che $a_n > 0$ per ogni n.

Abbiamo in effetti identificato un insieme $A = \{x \colon x > 0\} = (0, +\infty)$ tale che la funzione $f(x) = \frac{x+p/x}{2}$ è definita su A e, contemporaneamente, ha valori in A. Quindi questo passaggio è fondamentale anche solo per garantire che la successione a_n sia ben definita.

Passo 2. Dimostriamo che la successione a_n è decrescente. Per fare questo osserviamo che essere decrescente significa: $a_{n+1} \leq a_n$ e cioé

$$\frac{a_n + p/a_n}{2} \leq a_n$$

ovvero (moltiplicando ambo i lati per $a_n > 0$)

$$a_n^2 + p \leq 2a_n^2$$

che è equivalente a $a_n^2 - p \geq 0$. E, in effetti, questa disuguaglianza è sempre vera in quanto per $n = 1$ si riduce a $a_1^2 - p = p^2 - p \geq 0$ che è soddisfatta nel caso $p > 1$. Mentre

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - p &= \left(\frac{a_n + p/a_n}{2}\right)^2 - p = \frac{a_n^4 + 2pa_n^2 + p^2 - 4pa_n^2}{4a_n^2} \\ &= \frac{a_n^2 - 2pa_n^2 + p^2}{4a_n^2} = \frac{\left(a_n^2 - p\right)^2}{4a_n^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Dunque $a_{n+1}^2 \geq p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e di conseguenza a_n è decrescente e inoltre $a_n > \sqrt{p}$.

Passo 3. Visto che a_n è una successione decrescente per il teorema sulle successioni monotòne possiamo affermare che a_n ammette limite, e cioé: $a_n \to \ell$ con $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Possiamo immediatamente escludere $\ell = +\infty$ in quanto la successione è decrescente, e possiamo anche escludere $\ell < \sqrt{p}$ in quanto sappiamo che $a_n > \sqrt{p}$ e quindi (per il teorema della permanenza del segno) $\ell \geq \sqrt{p}$. Inoltre

$$a_{n+1} = \frac{a_n + p/a_n}{2} \to \frac{\ell + p/\ell}{2}.$$

Ma sappiamo che se $a_n \to \ell$ anche $a_{n+1} \to \ell$ (visto che a_{n+1} è una sottosuccessione di a_n) e quindi (per l'unicità del limite)

$$\ell = \frac{\ell + p/\ell}{2} \tag{3}$$

da cui si ricava $\ell^2 = p$ ovvero (essendo $\ell \geq 0$) concludiamo $a_n \to \ell = \sqrt{p}$. □

Cominciamo ora a definire una terminologia e a fissare alcuni risultati generali che ci serviranno per trovare alcune proprietà delle successioni definite da (1).

punto fisso **Definizione 8.2** (punto fisso). *Diremo che x è un* punto fisso *per la funzione f se vale* **

$$f(x) = x.$$

Osserviamo che se α è un punto fisso per f la successione costante $a_n = \alpha$ soddisfa l'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$. Inoltre se $a_{n+1} = f(a_n)$, se a_n converge ad un limite ℓ e se $\lim_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ (diremo: f è continua in ℓ) allora

$$a_{n+1} = f(a_n) \to f(\ell)$$

ma visto che a_{n+1} ha lo stesso limite di a_n si trova che $f(\ell) = \ell$ ovvero il limite della successione è un punto fisso.

Nell'esercizio precedente la funzione $f(x) = (x + p/x)/2$ ha come punti fissi $\sqrt{p}$ e $-\sqrt{p}$ e l'equazione (3) non è altro che $f(x) = x$. E in effetti abbiamo mostrato che la successione a_n converge proprio ad un punto fisso.

Definizione 8.3 (insieme invariante). *Un insieme A si dice essere* invariante *per f se $f(A) \subseteq A$.* **

insieme invariante

Osserviamo che se A è un insieme invariante e $a_1 \in A$ allora la successione definita da $a_{n+1} = f(a_n)$ assume sempre valori in A.

Nell'esercizio 8.1 abbiamo dimostrato che gli insiemi $(0, +\infty)$ e $(\sqrt{p}, +\infty)$ sono invarianti.

Teorema 8.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme invariante per f e sia a_n una successione con $a_1 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$.* *

$f(x) \geq x$ *Se per ogni $x \in A$ vale $f(x) \geq x$ allora la successione a_n è crescente.*

$f(x) \leq x$ *Se per ogni $x \in A$ vale $f(x) \leq x$ allora la successione a_n è decrescente.*

Dimostrazione. In effetti se $f(x) \geq x$ si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$ *

$$a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$$

e quindi la successione a_n è crescente. Mentre se $f(x) \leq x$ si ha

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$$

e la successione è decrescente. □

***Esercizio* 8.5.** Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare il limite della successione a_n definita per ricorrenza dalle equazioni:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2. \end{cases}$$

** **Teorema 8.6.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme invariante per f e sia a_n una successione con $a_1 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$. Se f è crescente su A allora a_n è monotòna.* *f crescente*

** *Dimostrazione.* Osserviamo che se f è crescente allora

$$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow f(a_{n+1}) \geq f(a_n) \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$$
$$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow f(a_{n+1}) \leq f(a_n) \Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Dunque se per i primi due termini si ha $a_2 \geq a_1$ allora, per induzione, si ha $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n e quindi la successione è crescente. Se invece $a_2 \leq a_1$ si dimostra per induzione che $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n e quindi la successione è decrescente. □

** **Teorema 8.7.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme invariante per f e sia a_n una successione con $a_1 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$. Se f è decrescente su A allora le due successioni a_{2n} (termini di indice pari) e a_{2n+1} (termini di indice dispari) sono monotòne.* *f decrescente*

** *Dimostrazione.* Osserviamo che

$$a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = f(f(a_{2n})) = (f \circ f)(a_{2n})$$
$$a_{2n+3} = f(a_{2n+2}) = f(f(a_{2n+1})) = (f \circ f)(a_{2n+1})$$

cioé le sottosuccessioni dei termini di indice pari e di indice dispari soddisfano una relazione di ricorrenza tramite la funzione $f \circ f$ (invece che f).

Osserviamo anche che se f è decrescente allora $f \circ f$ è crescente. Infatti:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow f(f(x)) \leq f(f(y)).$$

Dunque possiamo applicare il teorema precedente e ottenere che le due sottosuccessioni sono entrambe monotòne. □

Utilizziamo la terminologia e i risultati precedenti nei seguenti esercizi.

***Esercizio* 8.8** *(Fibonacci).* Si consideri il rapporto $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ di due termini successivi della successione di Fibonacci: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Determinare il limite di a_n.

Soluzione. La successione a_n soddisfa la relazione:

$$a_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Inoltre $a_1 = F_2/F_1 = 1$. Dunque la successione a_n soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}. \end{cases}$$

Osserviamo che l'intervallo $A = (0, +\infty)$ è invariante per la funzione $f(x) = 1 + 1/x$. Infatti se $x \in A$ allora $x > 0$ ma anche $f(x) = 1 + 1/x$ lo è. Su tale intervallo, inoltre, la funzione f è decrescente. Infatti

$$0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Visto che $a_1 = 1 \in A$, A invariante, f decrescente su A, il Teorema 8.7 ci dice che le due successioni a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone e quindi ammettono limite: $a_{2n} \to \ell$, $a_{2n+1} \to \ell'$ con $\ell, \ell' \in [0, +\infty]$.

Se ℓ è finito si ha:

$$a_{2n+1} = f(a_{2n}) = 1 + \frac{1}{a_{2n}} \to 1 + \frac{1}{\ell}$$

e quindi dato che $a_{2n+1} \to \ell'$ si ha $\ell' = 1 + 1/\ell$. Inoltre

$$\begin{aligned} a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) &= 1 + \frac{1}{a_{2n+1}} \to 1 + \frac{1}{\ell'} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ell}} \\ &= 1 + \frac{\ell}{\ell + 1} = \frac{2\ell + 1}{\ell + 1} \end{aligned}$$

da cui, visto che $a_{2n+2} \to \ell$,

$$\ell = \frac{2\ell + 1}{\ell + 1}.$$

Moltiplicando ambo i membri per $\ell + 1$ si ottiene

$$\ell^2 + \ell = 2\ell + 1$$

ovvero $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ da cui, utilizzando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, e ricordando che $\ell \geq 0$, si trova:

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ma anche

$$\begin{aligned} \ell' &= 1 + \frac{1}{\ell} = \frac{\ell + 1}{\ell} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{5} - 5}{-4} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \ell. \end{aligned}$$

Dunque entrambe le sottosuccessioni dei termini di indice pari e di indice dispari convergono allo stesso valore ℓ e quindi l'intera successione ci converge: $a_n \to (1 + \sqrt{5})/2$.

Il caso $\ell = +\infty$ si può escludere in quanto ripetendo il ragionamento fatto sopra si otterrebbe $\ell' = 1$ da cui: $\ell = 1 + 1/\ell' = 2$ che è una contraddizione. $\square$

(interagisci)

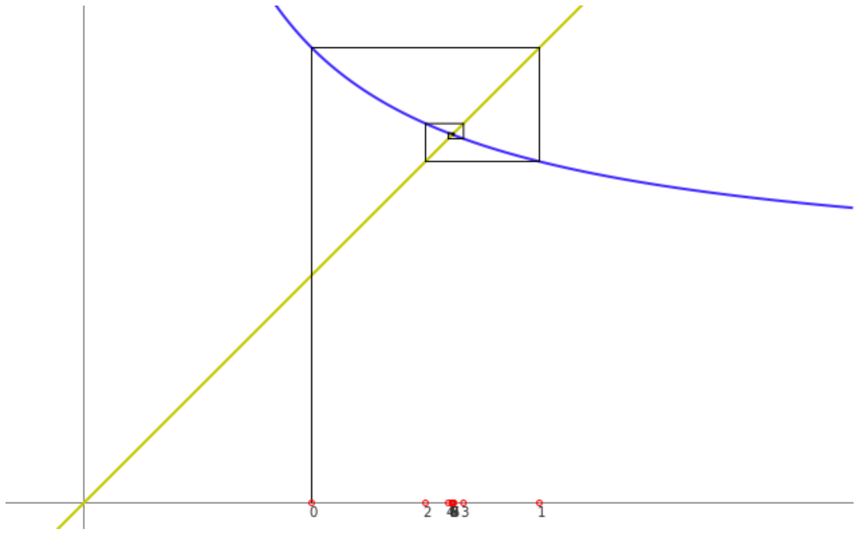


Figura 1: Diagramma a ragnatela relativo all'esercizio 8.8.

Un metodo grafico per visualizzare l'andamento dei termini della successione definita da (1) è il *diagramma a ragnatela*. Si disegna la curva $y = f(x)$ su un piano cartesiano. Partendo dal punto di coordinate $(\alpha, 0) = (a_1, 0)$ si procede lungo una retta verticale fino a raggiungere il grafico della funzione nel punto $(a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$. Dopodiché si procede in orizzontale fino ad incontrare la retta $y = x$ nel punto (a_2, a_2) e si ripete il procedimento in modo che le coordinate x (ma anche le y) dei vertici della spezzata mi danno la successione $a_1, a_2, a_3, \dots$. Ad esempio il diagramma a ragnatela corrispondente all'esercizio 8.8 è rappresentato in Figura 1.

***Esercizio* 8.9.** Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 1 + a_n^2. \end{cases}$$

Determinare il limite della successione.

Soluzione. L'equazione ricorsiva è $a_{n+1} = f(a_n)$ se poniamo $f(x) = 1 + x^2$. E' facile verificare che per ogni x si ha $f(x) > x$ e quindi, per il Teorema 8.4 otteniamo che la successione a_n è crescente. Dunque ammette limite: $a_n \to \ell$. Se il limite fosse finito si avrebbe

$$a_{n+1} = 1 + a_n^2 \to 1 + \ell$$

e quindi, visto che $a_{n+1} \to \ell$, si avrebbe $\ell = 1 + \ell^2$ (cioè ℓ dovrebbe essere un punto fisso di f). Questa equazione abbiamo già osservato

(interagisci)

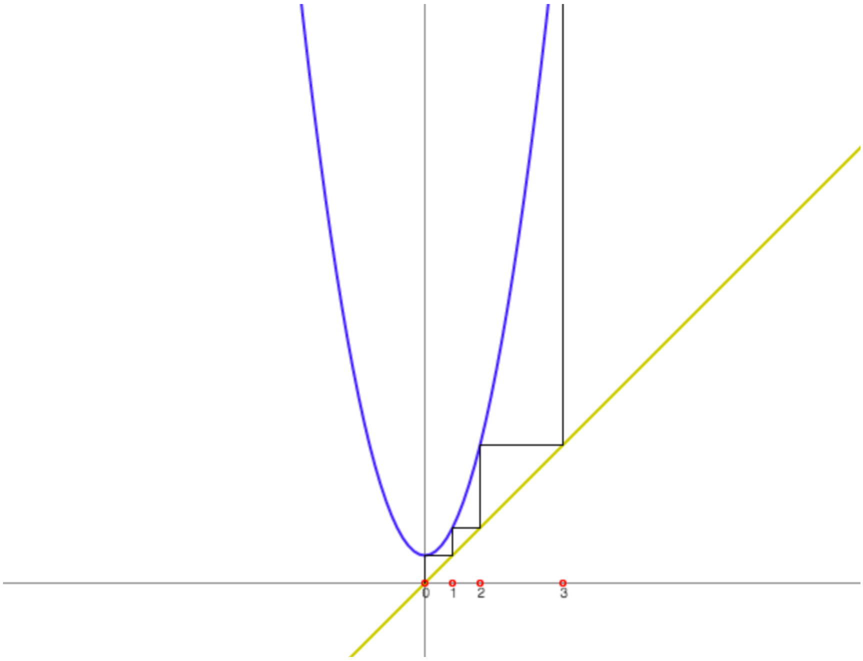


Figura 2: Diagramma a ragnatela relativo all'esercizio 8.9.

che non ha soluzioni ($x^2 + 1 > x$) e quindi ℓ non è finito. Visto che la successione a_n è crescente possiamo escludere che sia $\ell = -\infty$ e quindi l'unica possibilità che rimane è che $a_n \to +\infty$. $\square$

***Esercizio* 8.10.** Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}. \end{cases}$$

Determinare il limite della successione.

Soluzione. Si mostra che sull'intervallo $A = (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ vale $f(x) > x$, che gli estremi di A sono punti fissi e inoltre che la funzione f è crescente (lo è su tutto $(0, +\infty)$). Di conseguenza è facile verificare che A è invariante, in quanto si ha

$$\begin{aligned} 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3} &\Rightarrow f(2-\sqrt{3}) < f(x) < f(2+\sqrt{3}) \\ &\Rightarrow 2-\sqrt{3} < f(x) < 2+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Inoltre se $a_1 \in A$ allora per ogni $n \geq 1$ si ha $a_n \in A$ ed essendo $f(x) > x$ la successione sarà crescente. Dunque ammette limite: $a_n \to \ell \in \bar{A}$, $\ell \geq a_1$. Ma allora

$$a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \to 4 - \frac{1}{\ell} = f(\ell)$$

(interagisci)

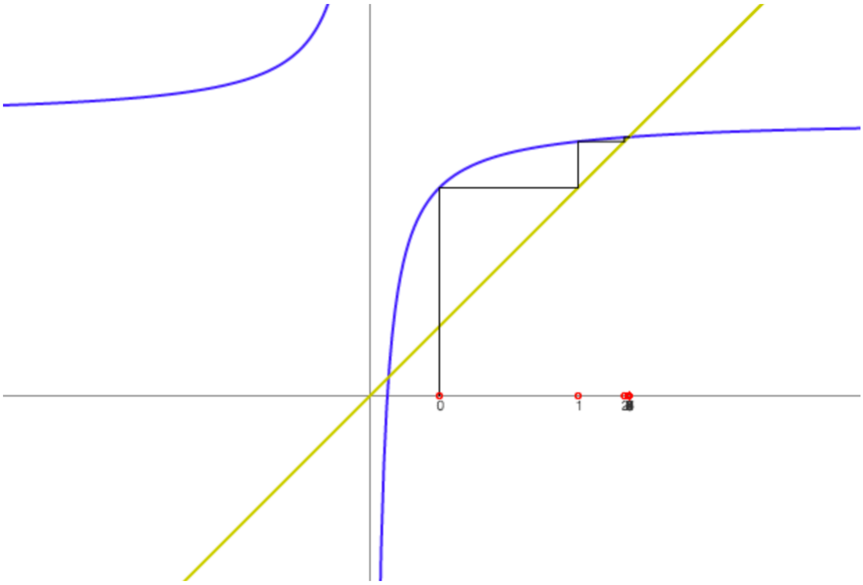


Figura 3: Diagramma a ragnatela relativo all'esercizio 8.10.

e visto che a_{n+1} ha lo stesso limite di a_n si ha $\ell = f(\ell)$ le cui uniche soluzioni sono $2 \pm \sqrt{3}$. Ma $2 - \sqrt{3}$ va scartata in quanto $\ell \geq a_1 > 2 - \sqrt{3}$ e quindi rimane $a_n \to \ell = 2 + \sqrt{3}$. $\square$

***Esercizio* 8.11.** Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

Determinare, se esiste, il limite della successione.

Soluzione. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= 1 - \frac{1}{1/2} = -1 \\ a_3 &= 1 - \frac{1}{-1} = 2 \\ a_4 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a_1 \end{aligned}$$

(interagisci)

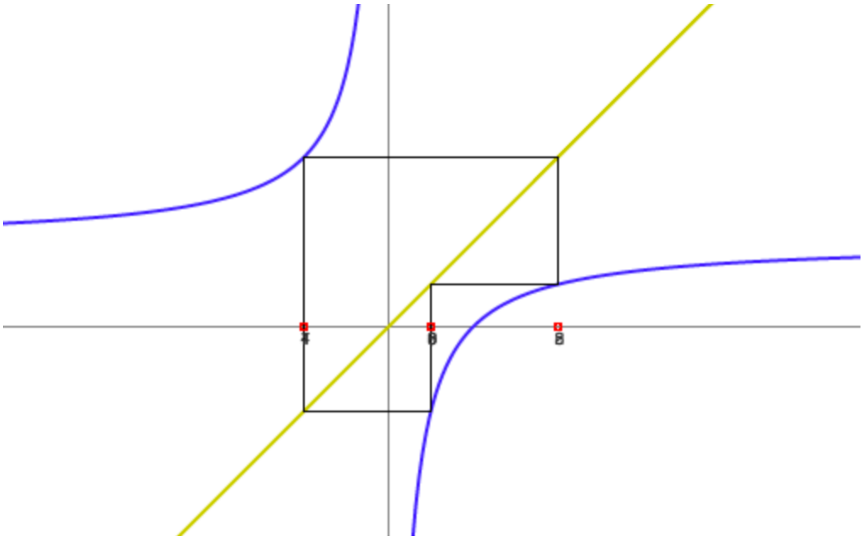


Figura 4: Diagramma a ragnatela relativo all'esercizio 8.11.

Essendo $a_4 = a_1$ la successione si ripete e, (per induzione) si dimostra che $a_{3n+k} = a_k$. Dunque si ha

$$\begin{aligned} a_{3n} &= a_3 = 2 \to 2 \\ a_{3n+1} &= a_1 = 1/2 \to 1/2 \\ a_{3n+2} &= a_2 = -1 \to -1 \end{aligned}$$

e la successione a_n non ammette limite. $\square$

(interagisci)

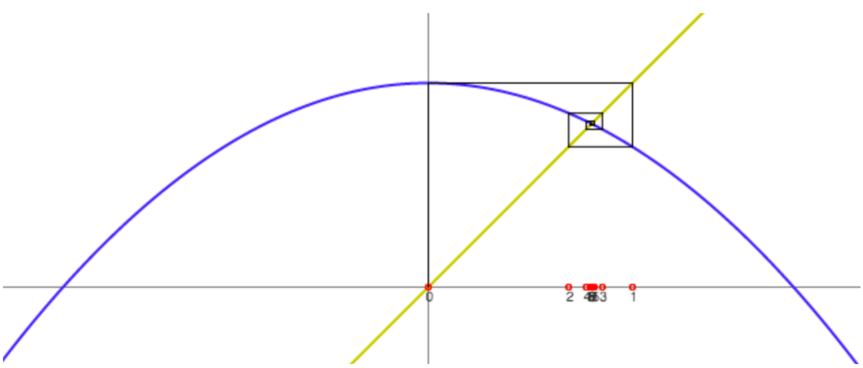


Figura 5: Diagramma a ragnatela relativo all'esercizio 8.12.

***Esercizio* 8.12.** Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{5-a_n^2}{4}. \end{cases}$$

Determinare il limite della successione.

Soluzione. Si ha $a_{n+1} = f(a_n)$ se scegliamo $f(x) = (5 - x^2)/4$. Osserviamo che la funzione f è decrescente per $x \geq 0$ (infatti $0 \leq x_1 < x_2$ implica $x_1^2 < x_2^2$ da cui $-x_1^2 > -x_2^2$ e quindi $f(x_1) > f(x_2)$). Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= f(a_1) = 5/4. \\ a_3 &= f(5/4) = \frac{5 - 25/16}{4} = \frac{55}{64} \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che l'intervallo $A = [0, 5/4]$ è invariante. Visto che f è decrescente su tale intervallo, si ha:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{5}{4} &\Rightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(5/4) \\ &\Rightarrow \frac{5}{4} \geq f(x) \geq \frac{55}{64} \geq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

cioè $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$, che è quanto volevamo dimostrare.

Per il Teorema 8.7 sappiamo dunque che $a_{2n} \to \ell$ e $a_{2n+1} \to \ell'$. Entrambi i limiti sono finiti in quanto essendo $a_n \in A$ per ogni n, si ha $\ell, \ell' \in \bar{A} = A$. Dunque, come al solito, osserviamo che si ha:

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= f(a_n) \to f(\ell) \\ a_{2n+2} &= f(a_{n+1}) \to f(\ell') \end{aligned}$$

ma sapendo che $a_{2n+1} \to \ell'$ e $a_{2n+2} \to \ell$ otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ell' = f(\ell) \\ \ell = f(\ell') \end{cases}$$

da cui si ottiene $f(f(\ell)) = \ell$ e $f(f(\ell')) = \ell'$. Dunque vogliamo scrivere e risolvere l'equazione $f(f(x)) = x$:

$$\frac{5 - \left(\frac{5-x^2}{4}\right)^2}{4} = x$$

cioè

$$5 - \frac{25 - 10x^2 + x^4}{16} = 4x$$

ovvero
$$x^4 - 10x^2 + 64x - 55 = 0.$$

Come facciamo a risolvere una equazione di quarto grado? In questo frangente dobbiamo fare una osservazione di carattere generale che ci sarà di grande aiuto. Osserviamo che se x è una soluzione di $f(x) = x$ allora x è anche soluzione di $f(f(x)) = x$ in quanto in tal caso si ha $f(f(x)) = f(x) = x$. Ma l'equazione $f(x) = x$ è una equazione di secondo grado, che quindi possiamo facilmente risolvere:
$$\begin{gathered}\frac{5-x^2}{4} = x \\ x^2 + 4x - 5 = 0 \\ x_{12} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3.\end{gathered}$$

Dunque abbiamo trovato due zeri del polinomio di quarto grado e quindi tale polinomio deve essere divisibile per
$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5).$$

Eseguiamo la divisione tra polinomi:
$$\begin{aligned}\frac{x^4 - 10x^2 + 64x - 55}{x^2 + 4x - 5} &= x^2 + \frac{x^4 - 10x^2 + 64x - 55 - x^2(x^2 + 4x - 5)}{x^2 + 4x - 5} \\ &= x^2 + \frac{-4x^3 - 5x^2 + 64x - 55}{x^2 + 4x - 5} \\ &= x^2 - 4x + \frac{-4x^3 - 5x^2 - 64x - 55 + 4x(x^2 + 4x - 5)}{x^2 + 4x - 5} \\ &= x^2 - 4x + \frac{11x^2 + 44x - 55}{x^2 + 4x - 5} \\ &= x^2 - 4x + 11.\end{aligned}$$

Come previsto la divisione non ha resto. Possiamo quindi completare la scomposizione cercando gli zeri del polinomio $x^2 - 4x + 11$ che però, da un rapido controllo, non ha soluzioni reali.

Dunque in questo caso i punti fissi di f coincidono con i punti fissi di $f \circ f$ e dunque i due limiti ℓ, ℓ' devono essere elementi dell'insieme dei punti fissi: $\{1, -5\}$. D'altra parte -5 deve essere escluso in quanto i limiti stanno entrambi nella chiusura dell'insieme invariante, che non comprende numeri negativi.

Concludiamo quindi che $\ell = \ell' = 1$ e dunque l'intera successione ha limite: $a_n \to 1$. □

***Esercizio* 8.13.** Si consideri la successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = 2 - a_n^2. \end{cases}$$

Determinare il limite della successione nei casi: $\alpha = -7$, $\alpha = 4$ e $\alpha = 1/42$.

(interagisci)

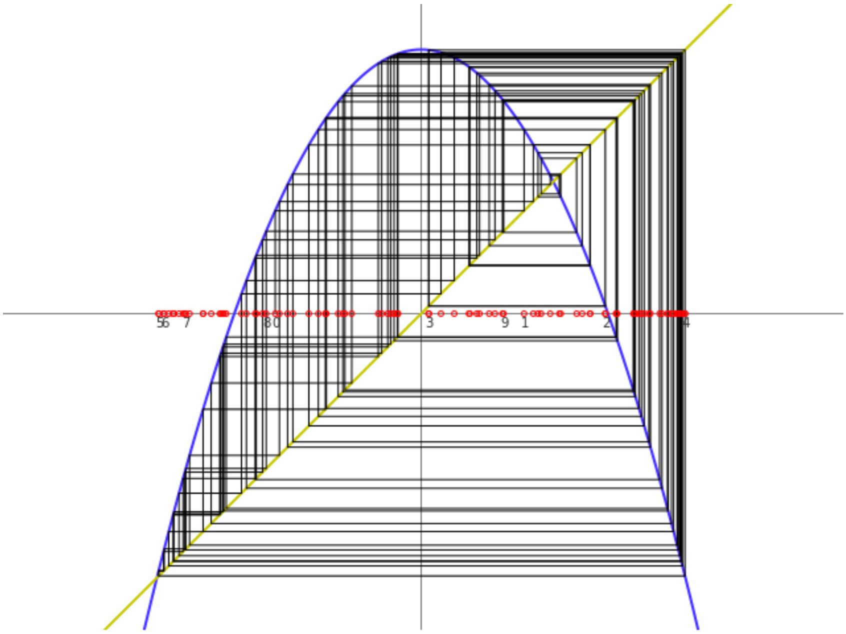


Figura 6: Diagramma a ragnatela relativo all'esercizio 8.13.

Soluzione. Abbiamo $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(x) = 2 - x^2$. Determiniamo i punti fissi di f:

$$2 - x^2 = x, \qquad x^2 + x - 2 = 0$$

che ha come soluzioni $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ cioé $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Tenendo conto anche dei segni si può osservare che all'interno delle due soluzioni si ha $f(x) > x$ mentre all'esterno si ha $f(x) < x$.

Osserviamo inoltre che $f(x)$ è crescente per $x \leq 0$ e decrescente per $x \geq 0$.

Caso $\alpha = -7$. In questo caso consideriamo l'intervallo $A = (-\infty, -2)$. Visto che f è crescente su questo intervallo, e visto che -2 è un punto fisso si ha:

$$x < -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow f(x) < -2$$

che significa che A è un intervallo invariante.

Su questo intervallo si ha $f(x) < x$ e quindi a_n è decrescente e di conseguenza ammette limite $a_n \to \ell$. Il limite può essere finito oppure $-\infty$. Ma se fosse finito allora avremmo

$$a_{n+1} = 2 - a_n^2 \to 2 - \ell^2$$

e siccome $a_{n+1} \to \ell$ avremmo $\ell = 2 - \ell^2$ cioè ℓ è un punto fisso di f. Ma visto che $\ell \leq a_1 = \alpha < x_1 < x_2$ otteniamo un assurdo.

Dunque l'unica possibilità è che $a_n \to -\infty$. Questo stesso ragionamento vale per ogni $\alpha < -2$.

Caso $\alpha = 4$. In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha = 4 \\ a_2 &= f(a_1) = 2 - 4^2 = -14. \end{aligned}$$

quindi $a_2 \in A$ (l'intervallo invariante del punto precedente) e dall'indice 2 in poi ci si riconduce quindi ai risultati precedenti. Dunque anche in questo caso $a_n \to -\infty$.

Caso $\alpha = 1/42$. Questo caso è decisamente più complesso dei precedenti. Prendiamo l'insieme $A_2 = [-2, 2]$, vogliamo dimostrare che è un insieme invariante. Nell'intervallo $[-2, 0]$ la funzione è crescente e quindi ha minimo in -2 dove vale $f(-2) = -2$ ed ha massimo in 0 dove assume il valore $f(0) = 2$. Nell'intervallo $[0, 2]$ la funzione è decrescente e, di nuovo, ha massimo $f(0) = 2$ e minimo $f(2) = -2$. Dunque per ogni $x \in [-2, 2]$ si ha $f(x) \in [-2, 2]$ cioè, come volevamo dimostrare, A_2 è invariante.

Dunque visto che $a_1 = \alpha \in A_2$ scopriamo che per ogni n si ha $a_n \in [-2, 2]$. Supponiamo ora che la successione abbia limite: $a_n \to \ell$. In tal caso, passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$ otteniamo, come al solito, che il limite dovrebbe essere un punto fisso di f: o $\ell = -2$ o $\ell = 1$. Cercheremo ora di dimostrare che questo è assurdo. Ci sono due possibilità che dobbiamo escludere. La prima è che la successione tenda al punto fisso ℓ senza mai uguagliarlo. La seconda è che per un certo n_0 si abbia $a_n = \ell$ per $n = n_0$ e quindi per ogni $n \geq n_0$.

Supponiamo di essere nel primo caso e supponiamo che $\ell = -2$. In tal caso, per il teorema della permanenza del segno la successione deve, da un certo indice in poi, stare nell'intervallo $[-2, 0]$. Ma in tale intervallo si ha $f(x) > x$ e quindi la successione sarebbe, da un certo indice in poi, crescente. Ma visto che $a_n \geq -2$ per ogni n non è possibile che la successione converga, crescendo, a -2.

Supponiamo allora di essere nel primo caso (la successione è sempre diversa dai due punti fissi) e supponiamo che $\ell = 1$. In questo caso da un certo indice in poi la successione deve stare nell'intervallo $[0, 2]$ (altrimenti non potrebbe convergere a 1. In tale intervallo la funzione f è decrescente e quindi le sottosuccessioni dei termini pari e dei termini dispari sono entrambe monotone. Si potrebbe cercare di studiare le successioni dei termini pari a_{2n} e dispari a_{2n+1} che soddisfano una relazione di ricorrenza con la funzione $f \circ f$ al posto di f e osservare che la successione che si trova a sinistra del punto fisso dovrebbe decrescere e quella che si trova a destra dovrebbe crescere (e questo sarebbe assurdo). Un metodo forse più rapido che non richiede lo studio della funzione composta è invece il seguente. L'idea è di osservare che f tende ad aumentare le distanze quando ci si trova nei paraggi del punto 1. Se per assurdo $a_n \to 1$ allora definitivamente si dovrà avere $|a_n - 1| < 1/2$. Ma allora si osserva che:

$$|a_{n+1} - 1| = \left|2 - a_n^2 - 1\right| = \left|1 - a_n^1\right| = |1 + a_n| \cdot |1 - a_n| \geq \frac{3}{2}|a_n - 1|$$

in quanto se $|a_n - 1| < 1/2$ allora (per la disuguaglianza triangolare inversa) $|1 + a_n| \geq 3/2$. Questo è assurdo perché significa che $|a_n - 1| \to +\infty$ (per il criterio del rapporto) quando invece dovrebbe essere $|a_n - 1| \to 0$.

Nota. Vedremo nei prossimi teoremi che se la derivata di f è in valore assoluto minore di 1 allora il punto fisso sarà stabile (o attrattivo) cioè partendo da un punto sufficientemente vicino si convergerà necessariamente al punto fisso. Se invece la derivata è in valore assoluto maggiore di 1 il punto fisso sarà instabile (o repulsivo). Cioè, a parte la successione costante che assume il valore esatto del punto fisso, non è possibile che una successione converga al punto fisso.

Rimane da considerare la possibilità che la successione assuma da un certo punto in poi il valore esatto di un punto fisso. Supponiamo ad esempio che per un certo n si abbia $a_n = 1$. Allora si deve avere

$$1 = a_n = 2 - (a_{n-1})^2$$

da cui

$$a_{n-1} = \pm 1.$$

Se a_n era il primo termine con valore 1 dovrà necessariamente essere $a_{n-1} = -1$. Ma allora

$$-1 = a_{n-1} = 2 - (a_{n-2})^2$$

da cui $a_{n-2} = \pm\sqrt{3}$. Ma ora osserviamo che essendo $a_1 = \alpha = 1/42$ un numero razionale, e osservando che $\mathbb{Q}$ è un insieme invariante per f (perché? verificare per induzione...) sappiamo che ogni $a_k \in \mathbb{Q}$ e quindi avremmo $a_{n_2} = \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$: assurdo.

Stesso discorso si può fare se si avesse $a_n = -2$, in quanto si avrebbe $a_{n-1} = 2$, $a_{n-2} = 0$ e quindi $a_{n-3} = \pm\sqrt{2}$.

Dunque la successione a_n non ammette limite. □

***Esercizio* 8.14.** Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}. \end{cases}$$

Trovare il limite della successione nel caso $\alpha = -2015$. Determinare l'insieme dei valori di α per i quali la succession a_n non è ben definita (in quanto per un qualche n il denominatore $2 - a_n$ si annulla). Trovare il limite nel caso $\alpha = \frac{2015}{1000}$.

(interagisci)

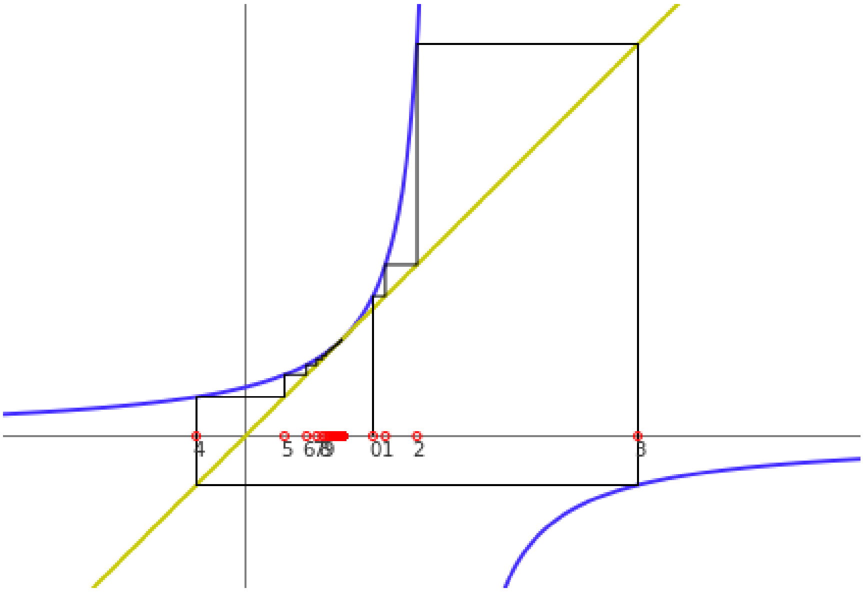


Figura 7: Diagramma a ragnatela relativo all'esercizio 8.14.

Soluzione. Posto $f(x) = 1/(2-x)$ si osserva che la disequazione $f(x) \geq x$ è verificata per ogni $x < 2$. L'equazione di punto fisso $f(x) = x$ ha come unica soluzione $x = 1$. Sull'intervallo $A = (-\infty, 1)$ la funzione f è crescente e l'intervallo risulta essere invariante. Dunque per $\alpha = -2015 \in A$ la successione risulta essere crescente e superiormente limitata. Dunque converge $a_n \to \ell$. Passando al limite in $a_{n+1} = f(a_n)$ si trova che ℓ deve essere un punto fisso di f e quindi $\ell = 1$.

La successione non è ben definita se per qualche n si trovasse $a_n = 2$ in quanto la funzione f non è definita per $x = 2$. Altri valori si ottengono risalendo all'indietro la successione a_n. Dalla equazione

$$a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}$$

si ricava

$$a_{n-1} = 2 - \frac{1}{a_n}.$$

L'insieme dei punti partendo da quali si arriva prima o poi in $x = 2$ è dato dunque dai valori della successione

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n}. \end{cases}$$

Osserviamo che in questo caso specifico è possibile ricavare una formula esplicita per il termine b_n. Osserviamo infatti che:

$$b_1 = 2, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad b_3 = \frac{4}{3}$$

e proviamo a congetturare che sia $b_n = (n+1)/n$. In effetti questo si può dimostrare per induzione. Per $n = 1$ si ha $(n+1)/n = 2 = b_1$. E se supponiamo che valga $b_n = (n+1)/n$ si ha

$$b_{n+1} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Dunque l'insieme dei punti partendo dai quali la successione a_n non è ben definita è dato da:

$$X = \{\frac{n+1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Per il caso $\alpha = \frac{2015}{1000}$ osserviamo che sull'intervallo $A_2 = (1, 2)$ si ha sempre $f(x) > x$ (ma si potrebbe osservare che A_2 non è invariante). Finché a_n rimane in tale intervallo la successione risulta quindi crescente. Però non è possibile che la successione rimanga sempre in A_2 perché in tal caso il limite dovrebbe essere un punto fisso. Ma l'unico punto fisso è 1 che è minore di α e quindi la successione, crescente, non può convergere. Necessariamente la successione esce dall'intervallo A_2 (in effetti notiamo che $\alpha \notin X$) e, per un certo n si avrà $a_n > 2$. Osserviamo ora che sull'intervallo $A_3 = (2, +\infty)$ si ha $f(x) < 0$ e dunque se $a_n \in A_2$ necessarimante $a_{n+1} \in A$. Dunque questo caso si riconduce al primo studiato, e la successione tende a 1. □

***Esercizio* 8.15.** Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n}{2}. \end{cases}$$

Determinare al variare di α il limite della successione.

***Esercizio* 8.16.** Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = 1 - a_n^2. \end{cases}$$

Determinare al variare di α il limite della successione.

Teorema 8.17 (criterio per la stabilità di un punto fisso)**.** *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $R > 0$, $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ e $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione che ha x_0 come punto fisso. Se f è L-lipschitziana su I con $L < 1$ allora I è un intervallo invariante per f e se a_n è una successione che soddisfa la relazione di ricorrenza $a_{n+1} = f(a_n)$ con $a_0 \in I$ allora $a_n \to x_0$ per $n \to +\infty$.*

In particolare se $f \in C^1(I)$ *con punto fisso* $x_0 \in I$ *e* $\sup\{|f'(x)| \colon x \in I\} < 1$ *allora* I *è invariante ed ogni successione* a_n *definita per ricorrenza da* $a_{n+1} = f(a_n)$ *con* $a_0 \in I$ *converge ad* x_0.

Ancora più in particolare, se f *è di classe* C^1 *in un intorno di un punto* x_0*, se* x_0 *è punto fisso di* f *e* $|f'(x_0)| < 1$ *allora esiste un intorno* I *di* x_0 *che è invariante per* f *e ogni successione* a_n *definita per ricorrenza tramite* $a_{n+1} = f(a_n)$ *con* $a_0 \in I$ *converge ad* x_0.

Dimostrazione. Osserviamo che se f è di classe C^1 in un intorno di x_0 e $|f'(x_0)| < 1$ allora, per continuità, esiste $L < 1$ tale $|f'(x)| < L$ per ogni x in un intorno I di x_0. Dunque $\sup\{|f'(x)| \colon x \in I\} \leq L < 1$ e la funzione f risulta dunque essere L-lipschitziana. E' chiaro quindi che la seconda e la terza parte del teorema si riconducono alla prima, che è quella che andremo ora a dimostrare.

Se f è L-lipschitziana e x_0 è punto fisso di f osserviamo che si ha

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$$

da cui se $|x - x_0| < R$ anche $|f(x) - x_0| < R$. Dunque $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ è invariante. Possiamo poi dimostrare per induzione che risulta

$$|a_n - x_0| \leq L^n \cdot |a_0 - x_0|.$$

Infatti per $n = 0$ la relazione è una uguaglianza. Il passo induttivo si ottiene osservando che

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - x_0| &= |f(a_n) - f(x_0)| \leq L|a_n - x_0| \\ &\leq L \cdot L^n |a_0 - x_0| = L^{n+1}|a_0 - x_0|. \end{aligned}$$

Ma ora se $L < 1$ si ha $L^n \to 0$ e dunque $|a_n - x_0| \to 0$ come volevamo dimostrare. □

Teorema 8.18 (instabilità del punto fisso)**.** *Sia* f *di classe* C^1 *in un intorno di un suo punto fisso* x_0*. Se* $|f'(x_0)| > 1$ *allora non esiste una successione* a_n *che soddisfa la relazione ricorsiva* $a_{n+1} = f(a_n)$ *e tale che* $a_n \to x_0$ *a meno che non si abbia* $a_n = x_0$ *da un certo indice* n *in poi.*

Dimostrazione. Per continuità della derivata esisterà $L > 1$ e un intervallo I intorno di x_0 tale che per ogni $x \in I$ si abbia $|f'(x)| > 1$. Se $a_n \to x_0$ allora da un certo indice n in poi si avrà $a_n \in I$. Se a_n verifica la relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ possiamo allora applicare il teorema di Lagrange per ottenere che per ogni n esiste b_n compreso tra x_0 e a_n tale che:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - x_0| &= |f(a_n) - f(x_0)| = \left|f'(b_n)(a_n - x_0)\right| \\ &\geq L \cdot |a_n - x_0| \geq |a_n - x_0|. \end{aligned}$$

Risulta quindi che la distanza $|a_n - x_0|$ deve essere crescente e quindi l'unica possibilità perché $a_n \to x_0$ è che sia $a_n = x_0$. □

***Esercizio* 8.19.** Calcolare:

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\dots}}}}$$

Esercizio* 8.20** *(Mandelbrot reale).** Si consideri, fissato il parametro c, la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n^2 + c. \end{cases}$$

Determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ per i quali la successione a_n risulta essere limitata.

Svolgimento. Caso 1: $c > \frac{1}{4}$. In tal caso non ci sono punti fissi, in quanto l'equazione $x = x^2 + c$ ha discriminante negativo. Significa che $x^+c > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque la successione a_n è strettamente crescente e tende a $+\infty$. Non è limitata.

Caso 2: $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$. In questo caso l'equazione $x = x^2 + c$ ha due soluzioni entrambe positive (le soluzioni hanno somma 1 e prodotto $c \geq 0$). Se chiamiamo x_1 la più piccola delle due soluzioni possiamo dimostrare che l'intervallo $[0, x_1)$ è invariante. Infatti su tali intervallo la funzione $f(x) = x^2 + c$ è crescente, dunque se $0 \leq x < x_1$ si ha $f(0) \leq f(x) < f(x_1)$ cioè $c \leq f(x) < x_1$. Visto che $c \geq 0$ abbiamo mostrato che l'intervallo è invariante. Dunque la successione a_n rimane in tale intervallo. Se $c = 0$ la successione a_n rimane costante $a_n = 0$. Se $c > 0$ la successione converge al punto fisso x_1. In ogni caso è limitata.

Caso 3: $-1 \leq c < 0$. In questo caso vogliamo mostrare che l'intervallo $[c, 0]$ è invariante. La funzione $f(x) = x^2 + c$ è decrescente su tale intervallo, dunque se $c \leq x \leq 0$ risulta $f(0) \leq x \leq f(c)$. Ma $f(0) = c$ e $f(c) = c^2 + c = c(c+1) \leq 0$ se $c \geq -1$. Dunque $[c, 0]$ è invariante e a_n rimane limitata in tale intervallo.

Caso 4: $-2 \leq c < -1$. In questo caso l'equazione $x = x^2 + c$ ha una soluzione negativa ed una soluzione positiva. Chiamiamo x_2 la soluzione positiva. Vogliamo mostrare che l'intervallo $[c, x_2]$ è invariante. La funzione $f(x) = x^2 + c$ è decrescente in $[c, 0]$ e crescente in $[0, x_2]$. Se $0 \leq x \leq x_2$ si ha dunque $f(0) \leq f(x) \leq f(x_2)$ cioè $c \leq f(x) \leq x_2$. Dunque i punti in $[0, x_2]$ rimangono nell'intervallo $[c, x_2]$. Se invece $c \leq x \leq 0$ si ha $f(0) \leq f(x) \leq f(c)$ cioè $c \leq f(x) \leq c^2 + c$. Affinché sia $c^2 + c \leq x_2$ basta verificare che $f(c^2 + c) \leq c^2 + c$ cioè:

$$(c^2 + c)^2 + c \leq c^2 + c$$

che, sviluppando il quadrato, si riduce a $c^3(c + 2) \leq 0$ che è verificata se $-2 \leq c \leq 0$. Dunque l'intervallo $[c, x_2]$ è invariante. La successione rimane dunque limitata in tale intervallo.

Caso 5: $c < -2$. In questo caso $a_0 = 0$, $a_1 = c$, $a_2 = c^2 + c$ e possiamo verificare che $c^2 + c > x_2$ in quanto, come nel caso precedente, questo accade se

$$(c^2 + c)^2 + c > c^2 + c$$

che si riduce a $c^3(c + 2) > 0$ che è verificata se $c < -2$. Ma l'intervallo $(x_2, +\infty)$ è invariante e su tale intervallo si ha $f(x) > x$ dunque la successione a_n è strettamente crescente per $n \geq 2$ e diverge a $+\infty$. Non è dunque limitata.

Conclusione. La successione è limitata se $c \in [-2, 1/4]$. Altrimenti $a_n \to +\infty$.

□

8.2 EQUAZIONI RICORSIVE LINEARI

Fissate le costanti $c_0, c_1, \ldots, c_n$, con $c_n \neq 0$, diremo che l'equazione ricorsiva:

$$c_n a_{k+n} + c_{n-1} a_{k+n-1} + c_{n-2} a_{k+n-2} + \cdots + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k = 0 \qquad (4)$$

equazione ricorsiva lineare

è una *equazione ricorsiva lineare* (omogenea) di ordine n. Il polinomio P con gli stessi coefficienti:

$$P(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$$

polinomio caratteristico

si chiama *polinomio caratteristico* associato all'equazione lineare (4).

Ad esempio la successione di Fibonacci F_k definita da (2) è una soluzione dell'equazione ricorsiva lineare del secondo ordine:

$$a_{k+2} - a_{k+1} - a_k = 0$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Teorema 8.21 (indipendenza delle successioni esponenziali)**.** *Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ numeri complessi distinti. Allora le successioni $\boldsymbol{a}_j$ definite da*

$$\boldsymbol{a}_j(k) = \lambda_j^k$$

sono vettori indipendenti nello spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ di tutte le successioni a valori complessi.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che se una combinazione lineare delle successioni $\boldsymbol{a}_j$ è nulla allora tutti i coefficienti sono nulli. Supponiamo quindi di avere $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Significa che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k = 0 \tag{5}$$

Dunque per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k z^k = 0. \tag{6}$$

Sia ora $R = 1/\max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ (almeno uno dei λ_j è non nullo perché i λ_j sono distinti e possiamo assumere $n > 1$ altrimenti il teorema è banale). Se $|z| < R$ si ha $\left|\lambda_j z\right| < 1$ per ogni j, e la serie geometrica $\sum \lambda_j^k z^k$ risulta quindi essere assolutamente convergente. Possiamo quindi fare la somma su k dell'uguaglianza (6), scambiare le somme e ottenere, per ogni z:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{+\infty} c_j \left(\lambda_j z\right)^k = 0.$$

Calcolando la somma della serie geometrica si ottiene, per ogni z con $|z| < R$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{1 - \lambda_j z} = 0.$$

Scegliamo ora un indice m cui $R = 1/|\lambda_m|$ e posto $z = t/\lambda_m$ osserviamo che per $t \in [0, 1)$ si ha $|z| < R$, dunque possiamo fare il limite per $t \to 1^-$ ed ottenere :

$$\lim_{t \to 1^-} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{1 - \lambda_j \frac{t}{\lambda_m}} = 0.$$

Ma se $j \neq m$ si ottiene un limite finito:

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{c_j}{1 - \lambda_j \frac{t}{\lambda_m}} = \frac{c_j}{1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_m}} = \ell_j \in \mathbb{C}$$

e dunque, visto che la somma dei limite è nulla, anche per $j = m$ si deve ottenere un limite finito. Ma per $j = m$ si ottiene invece

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{c_m}{1 - t}$$

che è finito solo se $c_m = 0$.

Ma se $c_m = 0$ ci siamo ricondotti ad avere una combinazione lineare nulla di $n - 1$ successioni esponenziali (si può togliere λ_m^k) e dunque, per induzione, si può ripetere il procedimento e scoprire che anche tutti gli altri coefficienti sono nulli. $\square$

dimostrazione alternativa. Valutando l'equazione (5) per $k = 0, \dots, n-1$ si ottiene

$$\begin{aligned} c_1 + c_2\lambda_1 + \dots + c_n\lambda_1^n &= 0 \\ c_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_n\lambda_2^n &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 + c_2\lambda_n + \dots + c_n\lambda_n^n &= 0 \end{aligned}$$

Vandermonde

che è un sistema lineare la cui matrice associata è la matrice di *Vandermonde*

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

che notoriamente è invertibile se i λ_j sono tra loro distinti.

Dunque $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ è l'unica soluzione del sistema lineare. □

Teorema 8.22 (dimensione delle soluzioni)**.** *L'insieme W di tutte le successioni soluzioni dell'equazione* (4) *di ordine n è un sottospazio vettoriale di dimensione n dello spazio $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ di tutte le sottosuccessioni.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ la successione $a_k = \boldsymbol{a}(k)$. L'insieme W delle soluzioni dell'equazione (4) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ in quanto se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono soluzioni anche $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ è soluzione e se $\boldsymbol{a}$ è soluzione anche $t\boldsymbol{a}$ è soluzione per ogni $t \in \mathbb{C}$ (si faccia la verifica).

jet

Consideriamo allora l'operatore (chiamato *jet*) $J\colon W \to \mathbb{C}^n$ definito da

$$J(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}(0), \boldsymbol{a}(1), \dots, \boldsymbol{a}(n-1)).$$

E' facile verificare che J è un operatore lineare in quanto la valutazione di una funzione in un punto è una operazione lineare.

Vogliamo ora determinare

$$\ker J = \{\boldsymbol{a} \in W \colon J(\boldsymbol{a}) = 0\}.$$

Se $\boldsymbol{a} \in \ker J$ significa che i primi n termini della successione $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sono tutti nulli. Ma se $\boldsymbol{a} \in W$ sappiamo che vale (4) e dunque anche a_n è nullo. Applicando (4) ricorsivamente otteniamo che $a_{n+k} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque $\boldsymbol{a} = 0$. Dunque $\ker J = \{\boldsymbol{0}\}$ e per le note proprietà degli operatori lineari possiamo affermare che $J\colon W \to \mathbb{C}^n$ è iniettivo. Dunque $\dim W \le \dim \mathbb{C}^n = n$.

Ma possiamo anche osservare che J è suriettivo in quanto fissati i valori di $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ l'equazione (4) ci permette di determinare, induttivamente, tutti i termini successivi. Dunque fissato $\boldsymbol{y} = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ è possibile trovare $\boldsymbol{a} \in W$ tale che $J(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{y}$.

Visto che $J\colon W \to \mathbb{C}^n$ è iniettivo e suriettivo concludiamo che $\dim W = \dim \mathbb{C}^n = n$. □

Teorema 8.23 (caratterizzazione delle soluzioni)**.** *Se il polinomio caratteristico dell'equazione* (4) *ha n zeri distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ allora ogni soluzione dell'equazione si scrive nella forma*

$$a_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k + \dots + c_n\lambda_n^k$$

dove $c_1, \dots, c_n$ sono costanti arbitrarie.

Dimostrazione. Sia $V = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ lo spazio vettoriale di tutte le successioni. Possiamo definire l'operatore di *shift* $\sigma\colon V \to V$

$$(\sigma \boldsymbol{a})(k) = \boldsymbol{a}(k+1).$$

Risulta quindi che $a_{k+n} = (\sigma^n \boldsymbol{a})(k)$ dove $\sigma^n = \sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$ è la composizione di σ con se stesso per n volte. Possiamo quindi riscrivere l'equazione (4) nella forma

$$c_n\sigma^n \boldsymbol{a} + \dots + c_0\sigma^0 \boldsymbol{a} = 0$$

ovvero

$$P(\sigma)\boldsymbol{a} = 0$$

dove con $P(\sigma)$ si intende l'operatore $P(\sigma)\colon V \to V$ ottenuto applicando il polinomio caratteristico P all'operatore σ.

Se $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sono le n radici del polinomio P si può decomporre il polinomio P tramite il teorema 4.15 di Ruffini

$$P(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n). \tag{7}$$

è chiaro (ma si veda il teorema 9.27 per una spiegazione più dettagliata) che la stessa decomposizione può essere fatta per $P(\sigma)$ e quindi l'equazione (4) può essere scritta nella forma:

$$(\sigma - \lambda_1 I) \circ (\sigma - \lambda_2 I) \circ \dots \circ (\sigma - \lambda_n I)\boldsymbol{a} = 0 \tag{8}$$

dove $I\colon V \to V$ è l'operatore identità $I\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$. Visto che nella decomposizione (7) l'ordine in cui vengono moltiplicati i fattori non conta, anche nell'equazione (8) possiamo applicare gli operatori $(\sigma - \lambda_j I)$ in qualunque ordine (gli operatori commutano). Dunque è immediato accorgersi che se $\boldsymbol{a}$ risolve

$$(\sigma - \lambda_j I)\boldsymbol{a} = 0$$

per un qualunque $j = 1, \dots, n$ allora $\boldsymbol{a} \in W$. Ma quest'ultima equazione è facile da risolvere in quanto ponendo $a_k = \boldsymbol{a}(k)$ si esplicita nella forma:

$$a_{k+1} - \lambda_j a_k = 0$$

che è soddisfatta se se si sceglie $a_k = \lambda_j^k$.

Dunque la successione $\boldsymbol{a}_j$ definita da

$$\boldsymbol{a}_j(k) = \lambda_j^k$$

è un elemento di W. Per $j = 1, \dots, n$ abbiamo trovato n soluzioni distinte $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$. Queste soluzioni sono indipendenti grazie al teorema 8.21 e quindi essendo $\dim W = n$ per il teorema 8.22 possiamo affermare che queste soluzioni formano una base di W che è esattamente quanto volevamo dimostrare. □

Esempio* 8.24** *(formula esplicita per la successione di Fibonacci).** La successione di Fibonacci F_k definita da (2) soddisfa una equazione ricorsiva lineare del secondo ordine con polinomio associato $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Risolvendo l'equazione $P(\lambda) = 0$ si trovano le due radici distinte:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

rapporto aureo

La radice più grande, λ_2, corrisponde al *rapporto aureo* che usualmente viene chiamato φ. Visto che $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ si trova $\lambda_1 = -1/\varphi$. Dunque, per il teorema precedente, sappiamo che esistono due costanti c_1 e c_2 tali che

$$F_k = c_1 \frac{(-1)^k}{\varphi^k} + c_2 \varphi^k.$$

Imponendo le condizioni $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ (imporre $F_2 = 1$ è equivalente a $F_0 = 0$) si ottiene

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad -\frac{c_1}{\varphi} + c_2 \varphi = 1$$

da cui è possibile trovare $c_1 = -c_2 = 1/\sqrt{5}$ e ottenere così una formula esplicita per il k-esimo numero di Fibonacci:

$$F_k = \frac{\varphi^k}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{5}\varphi^k}.$$

Risulta piuttosto sorprendente osservare che i valori F_k ottenuti con questa espressione siano tutti numeri interi.

8.3 DINAMICA COMPLESSA

Più in generale potremmo considerare successioni z_n a valori complessi e quindi equazioni ricorsive della forma

$$\begin{cases} z_0 = \alpha, \\ z_{n+1} = f(z_n) \end{cases}$$

con $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se f fosse lineare si potrebbe scrivere esplicitamente la soluzione seguendo le idee presentate nella sezione 8.2.

Possiamo provare a considerare la più semplice funzione non lineare che ci possa venire in mente cioè $f(z) = z^2 + c$ e il più semplice dato

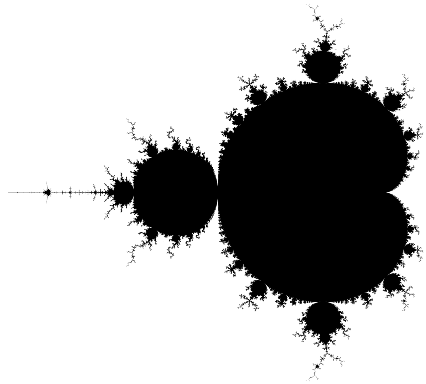


Figura 8: L'insieme di Mandelbrot generato al computer. Si veda il codice a pagina 367.

iniziale $\alpha = 0$ e il problema diventa quello di studiare il comportamento delle successioni:

$$\begin{cases} z_0 = 0, \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases} \tag{9}$$

con $c \in \mathbb{C}$.

Se $c \in \mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali è invariante, dunque la successione z_n rimane reale e coincide con la successione che abbiamo studiato nell'esercizio 8.20.

E' molto complicato determinare il carattere delle successioni definite dal sistema (9), solo con l'utilizzo dei primi calcolatori Mandelbrot (1924-2010) riuscì a rappresentare graficamente l'insieme M dei punti $c \in \mathbb{C}$ per i quali la successione z_n non diverge: si veda la figura 8. insieme di Mandelbrot

Con l'esercizio 8.20 abbiamo trovato l'intersezione $M \cap \mathbb{R} = [-2, 1/4]$. Nel seguente esercizio ci proponiamo ora di dimostrare un'altra semplice proprietà che può essere molto utile negli algoritmi numerici utilizzati per disegnare tale insieme.

***Esercizio* 8.25** *(raggio di fuga).* Dimostrare che se z_n è soluzione di (9) se per un qualche $N \in \mathbb{N}$ si ha $|z_N| > 2$ allora $|z_n| \to +\infty$ per $n \to +\infty$. In particolare l'insieme M di Mandelbrot è contenuto nel disco $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 2\}$.

Dimostrazione. Soluzione. Sia $c \in \mathbb{C}$ fissato e si z_n la successione definita da (9). Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo l'insieme:

$$A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \geq c \text{ e } |z| \geq 2 + \varepsilon\}.$$

Possiamo mostrare che l'insieme A_ε è invariante in quanto se $z_n \in A_\varepsilon$ si ha

$$\begin{aligned}|z_{n+1}| &= \left|z_n^2 + c\right| \geq |z_n|^2 - |c| \geq |z_n|^2 - |z_n| = (|z_n| - 1)|z_n| \\ &\geq (1+\varepsilon)|z_n| \geq (1+\varepsilon)(2+\varepsilon) \geq 2+\varepsilon.\end{aligned} \tag{10}$$

Dunque A_ε è invariante ma non solo, se $z_n \in A_\varepsilon$ abbiamo trovato che risulta $|z_{n+1}| \geq (1+\varepsilon)|z_n|$ e dunque $|z_{n+k}| \geq (1+\varepsilon)^k |z_n|$ e dunque $|z_n| \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

Se $|c| \leq 2$ e se $|z_N| > 2$ allora $z_N \in A_\varepsilon$ per un qualche $\varepsilon > 0$ e dunque possiamo concludere che $z_n \to \infty \in \bar{\mathbb{C}}$. Se invece $|c| > 2$ è facile osservare che $z_0 = 0$, $z_1 = c$, $z_2 = c^2 + c$ e quindi

$$|z_2| = \left|c^2 + c\right| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) \geq |c| > 2$$

dunque $z_2 \in A_\varepsilon$ e quindi, comunque, $z_n \to \infty$.

□

9 EQUAZIONI DIFFERENZIALI

9.1 CLASSIFICAZIONE

Le equazioni differenziali sono una classe di *equazioni funzionali* ovvero equazioni in cui l'incognita non è un numero (come accade nelle equazioni algebriche) ma è una funzione. La funzione incognita u, sarà quindi funzione di una variabile indipendente $u = u(x)$. Ad esempio u potrebbe essere la traiettoria di un proiettile che descrive la posizione nello spazio in funzione del tempo x. Se nelle equazioni algebriche il nome di gran lunga più utilizzato per l'incognita è x, nelle equazioni funzionali a seconda dei contesti le convenzioni possono cambiare in maniera drastica. Si dovrà utilizzare un nome per la funzione e un nome per la sua variabile indipendente: $x = x(t)$, $y = y(x)$, $y = y(t)$, $u = u(x)$ sono alcune delle scelte più utilizzate. Se l'incognita è una funzione $u = u(x)$ le operazioni che possono comparire nell'equazioni sono, oltre le usuali operazioni algebriche che agiscono sui singoli valori $u(x)$ della funzione, anche operatori che agiscono sulla funzione u in sé. Se l'equazione funzionale oltre alle operazioni algebriche comprende anche l'operatore derivata, si dirà che è una *equazione differenziale*. Di contro ci potranno ad esempio essere equazioni che coinvolgono l'operatore integrale e si chiameranno *equazioni integrali*.

equazioni funzionali

equazione differenziale

Ci sono quindi diversi concetti che possono aiutare a classificare le equazioni differenziali. Innanzitutto supporremo sempre che le nostre equazioni siano *senza ritardo* (o *senza memoria*) cioè che la funzione u e le sue derivate u', $u''\dots$, vengano tutte calcolate nello stesso punto x. In caso contrario si parla di equazioni *differenziali funzionali* (in particolare *equazioni con ritardo* perché le derivate dipendono tipicamnte dai valori assunti nel passato), argomento che non toccheremo.

senza ritardo

Se la funzione incognita è funzione di una singola variabile si dirà che l'equazione è una *equazione differenziale ordinaria* (abbreviato *EDO* in italiano, *ODE* per gli anglosassoni). Di contro se la funzione incognita è funzione di più variabili l'equazione si chiamerà *equazione differenziale alle derivate parziali* (abbreviato *EDP* in italiano e *PDE* in lingua inglese). In questo corso, centrato sulle funzioni di una variabile, tratteremo quindi solamente le equazioni differenziali ordinarie. L'*ordine* dell'equazione differenziale è il numero massimo di derivate successive che vengono

ODE

PDE

ordine

applicate alla funzione incognita. La funzione u sarà definita su un intervallo I della retta reale: $u\colon I \to \mathbb{R}$ e la funzione e le derivate vengono tutte valutate nello stesso punto. In tal caso la forma più generale di equazione differenziale ordinaria di ordine n si potrà dunque scrivere come:

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0 \tag{1}$$

con $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data, definita su un insieme $\Omega \subseteq I \times \mathbb{R}^{n+1}$. Una funzione $u\colon I \to \mathbb{R}$ si dice essere una *soluzione dell'equazione differenziale* (1) se u è derivabile almeno n volte in ogni punto $x \in I$ e se (1) è soddisfatta per ogni $x \in I$.

Usualmente si tende a semplificare la notazione evitando di scrivere sempre esplicitamente il punto x in cui viene calcolata la funzione. Sarà quindi usuale scrivere l'equazione (1) nella forma abbreviata:

$$F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

rendendo anche più evidente il fatto che l'incognita è u, l'intera funzione, e non un singolo valore $u(x)$.

Se ad esempio scegliamo $n = 2$ e $F(x, u, v, z) = z + \sin u + v$ otteniamo l'equazione differenziale:

$$u''(x) + \sin u(x) + u'(x) = 0 \tag{2}$$

che, in opportune unità di misura, è l'equazione del moto di un pendolo smorzato, dove x rappresenta il tempo e u la misura dell'angolo di inclinazione del pendolo rispetto alla verticale. Osserviamo che nell'esempio precedente la funzione F non dipende direttamente dalla variabile x. Equazioni con questa proprietà si dicono *equazioni autonome* ed è immediato osservare che se $u(x)$ è soluzione anche una sua traslazione temporale $v(x) = u(x - x_0)$ è soluzione dell'equazione (il moto del pendolo non dipende dall'ora in cui si svolge).

equazioni autonome

Una equazione scritta nella forma (1) si dice *equazione in forma implicita* e per analogia con le equazioni algebriche (si pensi all'equazione $u^2(x) + x^2 = 1$) ci si aspetta che le soluzioni di tale equazioni siano meglio rappresentate da curve piuttosto che da grafici di funzione. Risulta in effetti che la teoria delle equazioni differenziali si applica con molta maggiore efficacia alle *equazioni in forma normale* che sono le equazioni differenziali di ordine n che possono essere scritte esplicitando la dipendenza dalla derivata di ordine massimo:

equazione in forma implicita

equazioni in forma normale

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{n-1}(x)) \tag{3}$$

dove $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su $\Omega \subseteq I \times \mathbb{R}^n$. L'equazione del pendolo si può scrivere in questa forma, scegliendo $f(x, u, v) = -\sin u - v$.

Più in generale potremmo considerare *sistemi di equazioni differenziali* in più incognite. Possiamo rappresentare un sistema di k equazioni ordinarie in m incognite nella forma:

sistemi

$$\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{u}'(x), \dots, \boldsymbol{u}^n(x)) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è una funzione $\boldsymbol{u}\colon I \to \mathbb{R}^m$ le cui componenti sono le m funzioni incognite:

$$\boldsymbol{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$$

mentre la funzione $\boldsymbol{F}\colon I \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \to \mathbb{R}^k$ è stavolta una funzione a valori vettoriali $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_k)$ cosicché l'equazione vettoriale (4) è effettivamente equivalente ad un sistema di k equazioni:

$$\begin{cases} F_1(x, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{u}'(x) \dots, \boldsymbol{u}^{(n)}(x)) = 0 \\ F_2(x, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{u}'(x) \dots, \boldsymbol{u}^{(n)}(x)) = 0 \\ \quad \vdots \\ F_k(x, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{u}'(x) \dots, \boldsymbol{u}^{(n)}(x)) = 0 \end{cases}$$

Vedremo che per le equazioni ordinarie del primo ordine è naturale, come accade per le equazioni algebriche, avere lo stesso numero di equazioni e di incognite dunque è tipico avere singole equazioni scalari del primo ordine (cioè in cui l'incognita è una funzione a valori nel campo degli scalari $\mathbb{R}$) o sistemi di $k = m$ equazioni del primo ordine con incognita una funzione vettoriale $\boldsymbol{u}$ (cioè una funzione a valori nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$) ovvero con m incognite $u_1, \dots, u_m$ funzioni scalari.

Una importante osservazione è il fatto generale che una equazione differenziale di ordine n può essere ricondotta ad un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine. Basta infatti considerare come incognita il vettore (chiamato *jet*)

$$\boldsymbol{u} = (u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

comprendente tutte le derivate della funzione scalare u fino all'ordine $n-1$. L'equazione (1), di ordine n, risulta infatti equivalente al sistema di n equazioni del primo ordine nella variabile $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$

$$\begin{cases} u_2(x) = u_1'(x) \\ u_3(x) = u_2'(x) \\ \quad \vdots \\ u_n(x) = u_{n-1}'(x) \\ F(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), u_n'(x)) = 0 \end{cases}$$

Nel caso, più interessante, delle equazioni in forma normale l'equazione (3) di ordine n diventa un sistema di n equazioni normali del primo ordine in n incognite

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) = u_3(x) \\ \quad \vdots \\ u_{n-1}'(x) = u_n(x) \\ u_n'(x) = f(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \end{cases}$$

ovvero una equazione differenziale vettoriale del primo ordine

$$\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x)).$$

Nell'esempio del pendolo (2) si avrà come incognita una funzione vettoriale $\boldsymbol{u}(x) = (u(x), u'(x))$ le cui componenti sono posizione e velocità angolare. Il codominio di tale funzione si chiama *spazio delle fasi*. L'equazione (essendo autonoma tralasciamo la dipendenza da x) si scriverà nella forma $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ con $\boldsymbol{f}(y_1, y_2) = (y_2, -\sin(y_1) - y_2)$.

Un caso molto particolare ma decisamente importante è quello in cui la funzione F (per le equazioni in forma implicita) o la funzione f (per le equazioni in forma normale) sono funzioni lineari per ogni t rispetto alla variabile u. In tal caso diremo che l'equazione è *lineare omogenea*. Più precisamente si avrà

equazioni lineari omogenee

$$F(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)) = A_x(u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x))$$

con $A_x \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ operatore lineare per ogni x ovvero A_x si rappresenta tramite un vettore i cui coefficienti sono funzioni della variabile x:

$$A_x(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y_k$$

e l'equazione differenziale si scrive nella forma

$$a_0(x)u(x) + a_1(x)u'(x) + \cdots + a_n(x)u^{(n)}(x) = 0.$$

Nel caso in cui i coefficienti $a_k(t)$ non dipendano da x (cioè siano funzioni costanti) diremo che l'equazione è lineare *a coefficienti costanti*.

coefficienti costanti

E' facile osservare che l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea è uno spazio vettoriale: $u = 0$ è sempre soluzione, se u è una soluzione e $\lambda \in \mathbb{R}$ anche λu è soluzione e se u e v sono due soluzioni anche $u + v$ è soluzione (principio di sovrapposizione).

principio di sovrapposizione

In effetti se le funzioni u sono definite su un intervallo I possiamo identificare F con un funzionale $L \colon \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^I$ definito da

$$L(u)(x) = F(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x))$$

Se l'equazione differenziale è lineare allora L è un operatore lineare sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^I$ e lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale non è altro che $\ker L$, il nucleo dell'operatore, ed è noto che $\ker L$ è un sottospazio vettoriale. Nonostante $\mathbb{R}^I$ sia uno spazio vettoriale di dimensione infinita scopriremo che (sotto opportune ipotesi) lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione finita n, uguale al grado dell'equazione.

Nel caso in cui la funzione F (o la corrispondente f) sia affine si dirà che l'equazione differenziale è una equazione *lineare (non omogenea)*. L'equazione non omogenea avrà la forma:

equazione lineari

$$a_0(x)u(x) + a_1(x)u'(x) + \cdots + a_n(x)u^{(n)}(x) = g(x).$$

Se v_0 e v_1 sono due soluzioni di questa equazione è chiaro che la differenza $u = v_1 - v_0$ è soluzione dell'equazione omogenea

$$a_0(x)u(x) + a_1(x)u'(x) + \cdots + a_n(x)u^{(n)}(x) = 0.$$

Dunque quest'ultima si chiama equazione omogenea associata alla non omogenea e se v_0 è una soluzione particolare (qualunque) dell'equazione non omogenea ogni soluzione v dell'equazione non omogenea si scrive nella forma

$$v = v_0 + u$$

con u soluzione dell'omogenea associata. Per trovare tutte le soluzioni di una equazione non omogenea è dunque sufficiente trovare una soluzione particolare e tutte le soluzioni della equazione omogenea associata.

L'equazione del pendolo (2) non è lineare ma quando l'angolo u è piccolo (cioè per *piccole oscillazioni*) si ha $\sin u \sim u$. Facendo questa *linearizzazione* si ottiene l'equazione

$$u''(x) + u(x) + u'(x) = 0.$$

Questa è una equazione lineare omogenea. Se sul pendolo agisce una forza esterna (pendolo forzato) l'equazione diventa

$$u''(x) + u(x) + u'(x) = g(x)$$

dove $g(x)$ rappresenta l'entità di una forza esterna variabile nel tempo. Questa equazione è lineare non omogenea.

Come nel caso generale le equazioni lineari di ordine n si riconducono a sistemi lineari di n equazioni del primo ordine.

Se le equazioni differenziali di ordine n hanno uno spazio di soluzioni di dimensione n ci si aspetta che qualcosa del genere succeda anche per le equazioni differenziali di ordine n in forma normale. Lo spazio delle soluzioni non sarà lineare ma, in un certo senso, avrà comunque dimensione n cioè le soluzioni potranno essere identificate da n parametri. Per fare questo ad una equazione differenziale in forma normale di ordine n

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$$

si aggiunge una *condizione iniziale* ovvero si fissa un *punto iniziale* x_0 e un *valore iniziale* per ognuna delle derivate di ordine inferiore a n: $u(x_0) = y_0$, $u'(x_0) = y_1$, …, $u^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$. Questa condizione si chiama *condizione di Cauchy* e il problema che si ottiene mettendo una condizione di Cauchy ad una equazione differenziale: condizione iniziale

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) \\ u(x_0) = y_0, \\ u'(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

problema di Cauchy

si chiama *problema di Cauchy*. Vedremo che, sotto opportune ipotesi, il problema di Cauchy ammette una unica soluzione e questo significa, sostanzialmente, che l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale può essere descritto dal variare degli n parametri $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

Una delle ipotesi fondamentali per garantire l'unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy è che le soluzioni siano definite su un intervallo. E' chiaro infatti che se ho due soluzioni definite su due intervalli separati, potrei unire le due soluzioni e ottenere una soluzione definita sull'unione dei due intervalli. Viceversa una soluzione definita su un intervallo I è soluzione anche se ristretta ad ogni sottoinsieme di I (che sia o no un intervallo). Se restringo una soluzione o unisco due soluzioni ottengo formalmente soluzioni diverse in quanto i domini di definizione sono diversi, ma queste soluzioni assumono, dove sono definite, gli stessi valori. Per evitare questa ambiguità considereremo sempre solamente le soluzioni definite su un *intervallo massimale* cioè soluzioni definite su un intervallo che non possono essere estese su intervalli più grandi.

intervallo massimale

9.2 METODI RISOLUTIVI

Una tipologia di equazioni differenziali che abbiamo già trattato è data dalle equazioni della forma:

$$u'(x) = f(x).$$

Banalmente l'insieme delle soluzioni è dato dalle primitive di f:

$$u \in \int f.$$

Se f è definita su un intervallo tutte le soluzioni u definite sullo stesso intervallo e, grazie al Teorema 6.21 si scrivono quindi nella forma

$$u(x) = F(x) + c$$

dove F è una qualunque primitiva di f e $c \in \mathbb{R}$ è una costante additiva arbitraria. Se f è continua e consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) \\ u(x_0) = y_0. \end{cases}$$

possiamo identificare una unica soluzione che si scrive nella forma:

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

9.2.1 *equazioni lineari del primo ordine*

Le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale possono essere scritte nella forma: ***

$$u'(x) + a(x)u(x) = b(x). \tag{5}$$

Per risolvere queste equazioni si cerca di ricondurre la somma nel lato sinistro alla derivata di un prodotto. Per fare ciò si considera una qualunque primitiva $A \in \int a$ e si moltiplicano ambo i membri per $e^{A(x)}$:

$$e^{A(x)}u'(x) + a(x)e^{A(x)}u(x) = b(x)e^{A(x)}$$

essendo $A'(x) = a(x)$ si osserva che il lato sinistro è ora la derivata di un prodotto:

$$\left(e^{A(x)}u(x)\right)' = b(x)e^{A(x)}$$

da cui

$$e^{A(x)}u(x) \in \int b(x)e^{A(x)}\,dx.$$

Moltiplicando ambo i membri per $e^{-A(x)}$ (visto che l'esponenziale non si annulla mai questa operazione non modifica lo spazio delle soluzioni) si ottiene

$$u(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\,dx, \qquad A(x) \in \int a(x)\,dx.$$

Più esplicitamente scelta una qualunque primitiva del lato destro

$$F(x) \in \int b(x)e^{A(x)}\,dx$$

su ogni intervallo in cui $a(x)$ e $b(x)$ sono definite si ha

$$u(x) = e^{-A(x)}(F(x) + c).$$

per qualche $c \in \mathbb{R}$.

Se $b(x) = 0$ l'equazione è lineare omogenea, possiamo scegliere $F(x) = 0$ e quindi lo spazio delle soluzioni in questo caso è dato da

$$u(x) = ce^{-A(x)}$$

ed è quindi lo spazio vettoriale unidimensionale generato dalla funzione $e^{-A(x)}$.

Ogni soluzione della equazione non omogenea si può scrivere come somma di una soluzione particolare u_0 della equazione non omogenea più una generica soluzione dell'equazione omogenea associata. Infatti:

$$u(x) = u_0(x) + ce^{-A(x)}$$

dove

$$u_0(x) = e^{-A(x)}F(x)$$

è una particolare soluzione dell'equazione non omogenea.

Osserviamo che se $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue definite su uno stesso intervallo I, anche la soluzione è definita su tutto I. Si dirà quindi che la soluzione esiste *globalmente*.

***Esercizio* 9.1** *(autovettori dell'operatore derivata).* Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$ trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$u'(x) = \lambda u(x).$$

Svolgimento. Scriviamo l'equazione nella forma

$$u'(x) - \lambda u(x) = 0.$$

Nelle notazioni precedenti abbiamo $a(x) = -\lambda$ e quindi possiamo scegliere $A(x) = -\lambda x \in \int a$. Moltiplicando ambo i membri per $e^{-A(x)}$ si ottiene

$$e^{-\lambda x} u'(x) - \lambda e^{-\lambda x} u(x) = 0$$

cioè

$$\left(e^{-\lambda x} \cdot u(x)\right)' = 0$$

da cui su ogni intervallo in cui u è definita esiste una costante c tale che

$$e^{-\lambda x} u(x) = c$$

ovvero

$$u(x) = c e^{\lambda x}.$$

Abbiamo dunque trovato che le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, una soluzione è $e^{\lambda x}$ e ogni altra soluzione è multiplo di questa. □

***Esercizio* 9.2.**

1. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u' - \frac{u}{x} = x^2.$$

2. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$xu' - u = x^3.$$

Svolgimento. La prima è una equazione lineare non omogenea del primo ordine del tipo (5). Il fattore integrante è $e^{A(x)}$ con

$$A(x) \in \int a(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx \ni -\ln|x|.$$

Dunque $e^{A(x)} = 1/|x|$. Dovremmo dunque dividere ambo i membri dell'equazione per $|x|$. Osserviamo che l'equazione non è definita per $x = 0$ e possiamo dunque distinguere i casi $x > 0$ e $x < 0$. Decidiamo quindi, per semplicità, di cambiare segno all'equazione per $x < 0$ cosicché possiamo dividere per x invece che per $|x|$. Si ottiene dunque:

$$\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = x$$

cioè
$$\left(u \cdot \frac{1}{x}\right)' = x$$
da cui
$$\frac{u}{x} \in \int x \, dx \ni \frac{x^2}{2}.$$
Dunque la funzione $u(x)/x$ differisce da $x^2/2$ per una costante su ognuno dei due intervalli $x > 0$ e $x < 0$. Su ognuno dei due intervalli si ha dunque:
$$\frac{u(x)}{x} = \frac{x^2}{2} + c$$
da cui
$$u(x) = \frac{x^3}{2} + cx$$
per qualche $c \in \mathbb{R}$. Per come è stato posto il problema, la soluzione non deve essere definita per $x = 0$ e la costante c può essere quindi diversa se $x > 0$ o $x < 0$.

La seconda equazione è equivalente alla prima se $x \neq 0$. Ma non è in forma normale e le soluzioni potranno essere definite anche per $x = 0$. Si avrà quindi
$$u(x) = \frac{x^3}{2} + cx$$
come prima ma affinché la funzione sia derivabile in $x = 0$ la costante c dovrà essere uguale per $x > 0$ e per $x < 0$.

Si osservi che ogni soluzione soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 0$ e che quindi nessuna soluzione soddisfa la condizione $u(0) = q$ se $q \neq 0$. □

***Esercizio* 9.3.** Risolvere l'equazione differenziale:
$$u' + \frac{u}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = 1.$$

Svolgimento. Osserviamo che l'equazione è definita solo per $x \neq 0$. Cercheremo quindi le soluzioni sui due intervalli $x < 0$ e $x > 0$. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $\operatorname{arctg} x$ si ottiene
$$\operatorname{arctg} x \cdot u'(x) + \frac{1}{1+x^2} u(x) = \operatorname{arctg} x$$
cioè:
$$(\operatorname{arctg} x \cdot u(x))' = \operatorname{arctg} x$$
da cui
$$\operatorname{arctg} x \cdot u(x) \in \int \operatorname{arctg} x \, dx \ni x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Dunque su ogni intervallo su cui la soluzione è definita esisterà $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\operatorname{arctg} x \cdot u(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

da cui essendo $x \neq 0$ si può dividere per $\operatorname{arctg} x$ e ottenere

$$u(x) = x - \frac{\ln(1+x^2)}{2 \operatorname{arctg} x} + \frac{c}{\operatorname{arctg} x}.$$

Abbiamo quindi una famiglia di soluzioni definite per $x < 0$ e una famiglia di soluzioni definite per $x > 0$. □

9.2.2 *equazioni a variabili separabili*

Si chiamano equazioni a variabili separabili le equazioni del tipo: ***

$$u'(x) = f(x) \cdot g(u(x)). \tag{6}$$

Questa è una equazioni del primo ordine in forma normale:

$$u'(x) = F(x, u(x))$$

dove nella funzione F risulta possibile separare le due variabili in un prodotto:

$$F(x, y) = f(x) \cdot g(y).$$

Se u è una soluzione dell'equazione (6) e se x è un punto in cui $g(u(x)) \neq 0$, possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $g(u(x))$ per ottenere:

$$\frac{u'(x)}{g(u(x))} = f(x).$$

Vogliamo ora scrivere il lato sinistro come la derivata della funzione composta. Se scegliamo una primitiva di $1/g$:

$$H(u) \in \int \frac{1}{g(u)}\, du$$

si osserva che

$$(H(u(x)))' = H'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{g(u(x))} = f(x).$$

dunque se $F \in \int f$, su ogni intervallo in cui $g(u(x)) \neq 0$ dovrà esistere $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$H(u(x)) = F(x) + c.$$

Se supponiamo inoltre che H sia invertibile si avrà:

$$u(x) = H^{-1}(F(x) + c).$$

Esempio **9.4.** Risolviamo l'equazione

$$u' = xu^2 + x. \tag{7}$$

E' una equazione del primo ordine in forma normale. Raccogliendo x al lato destro si ottiene una equazione a variabili separabili. Dividendo ambo i membri per $u^2 + 1$ (che è sempre diverso da zero) si ottiene l'equazione equivalente

$$\frac{u'}{1+u^2} = x.$$

Integrando il lato sinistro si ottiene:

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \left[\int \frac{du}{1+u^2}\right]_{u=u(x)} \ni \operatorname{arctg}(u(x))$$

mentre per il lato destro si ottiene

$$\int x\,dx \ni \frac{x^2}{2}.$$

Dunque su ogni intervallo si deve avere

$$\operatorname{arctg}(u(x)) = \frac{x^2}{2} + c.$$

Visto che l'arcotangente assume valori compresi tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ anche il lato destro dovrà rimanere in tale intervallo. Dovrà quindi essere:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x^2}{2} + c < \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Con questa condizione possiamo invertire l'arcotangente ottenendo finalmente una espressione per la soluzione:

$$u(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right). \tag{9}$$

Osserviamo che la condizione (8) equivale a richiedere che l'argomento della tangente stia nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. In tal caso dovrà essere $c < \frac{\pi}{2}$ e si osserva che se $c > -\frac{\pi}{2}$ la soluzione $u(x)$ è definita su un intervallo aperto centrato in $x = 0$ mentre se $c \le -\frac{\pi}{2}$ la soluzione è definita su una coppia di intervalli simmetrici con ampiezza che tende a zero quando $c \to -\infty$. Agli estremi di tali intervalli la soluzione ha degli asintoti verticali.

In questo caso possiamo osservare che la condizione (8) può essere trascurata, visto che la funzione tg è π-periodica e quindi è possibile sommare a c un multiplo intero di π senza che la soluzione venga modificata. Nell'equazione (9) si potrebbe quindi considerare la funzione tg definita su tutto il suo dominio osservando che in tal caso si può supporre che sia $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Invece di ottenere un singolo intervallo per ogni c si ottengono così tutti gli infiniti intervalli.

(interagisci)

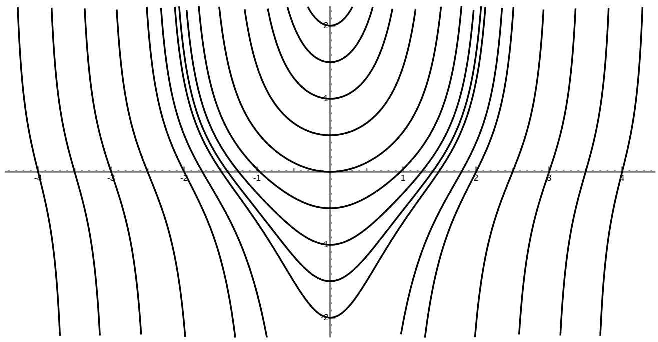


Figura 1: i grafici delle soluzioni dell'equazione differenziale (7).-

***Osservazione* 9.5.** L'esempio precedente mette in evidenza il fatto che le soluzioni massimali possono essere definite su intervalli arbitrariamente piccoli anche se l'equazione differenziale non presenta singolarità. Diremo in questo caso che la soluzione non è globale.

***Esempio* 9.6.** Si voglia risolvere l'equazione

$$u' = u^2.$$

Si tratta di una equazione in forma normale, del primo ordine, autonoma. In particolare è a variabili separabili $u' = f(u(x)) \cdot g(x)$ con $f(u) = u^2$ e $g(x) = 1$. Osserviamo innanzitutto che $u(x) = 0$ è soluzione in quanto $u'(x) = u^2(x) = 0$. Se u è una soluzione non identicamente nulla ci saranno dei punti in cui $u(x) \neq 0$. In un intorno di tali punti possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per $u^2(x)$ ottenendo:

$$\frac{u'}{u^2} = 1.$$

Integrando il lato sinistro tramite cambio di variabile $u = u(x)$, $du = u'(x)\,dx$ si ottiene:

$$\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}\,dx = \left[\int \frac{du}{u^2}\right]_{u=u(x)} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{u=u(x)} = -\frac{1}{u(x)}$$

mentre integrando il lato destro si ha

$$\int 1\,dx \ni x.$$

Dunque su ogni intervallo in cui $u(x) \neq 0$ deve esistere una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$-\frac{1}{u(x)} = x + c$$

ovvero, ponendo $x_0 = -c$

$$u(x) = -\frac{1}{x+c} = \frac{1}{x_0 - x}. \tag{10}$$

(interagisci)

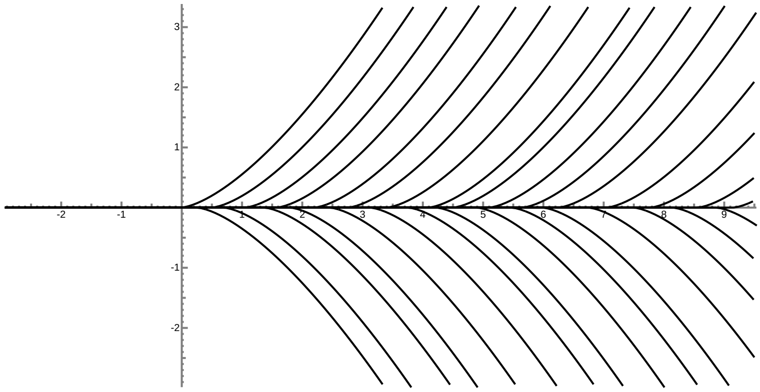


Figura 2: Il baffo di Peano formato dalle soluzioni del problema di Cauchy (11).

In conclusione abbiamo trovato una soluzione costante $u(x) = 0$ e una famiglia di soluzioni definite sugli intervalli $(-\infty, x_0)$ e $(x_0, +\infty)$ rappresentante dall'equazione (10). Dovremmo ora chiederci se è possibile che queste soluzioni vengano mescolate tra loro, ovvero se una soluzione può valere zero in alcune zone e soddisfare (10) in altre.

In questo caso la risposta è no. Basta osservare che una funzione u che soddisfa l'equazione (10) può tendere a zero solamente quando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Questo significa che se consideriamo una soluzione $u(x)$ definita su un intervallo I e se in almeno un punto la soluzione è diversa da zero, allora la soluzione è diversa da zero su tutto I e soddisfa l'equazione (10) in quanto la soluzione nulla e la soluzione (10) non sono tra loro compatibili (non possono essere incollate con continuità).

Vedremo più avanti un risultato (proposizione 9.20) che garantisce in ipotesi molto generali (che sono soddisfatte per questa equazione) due diverse soluzioni non possono mai incontrarsi.

***Esercizio* 9.7.** Fissato $p > 1$ si risolva l'equazione differenziale

$$u' = u^p$$

e si osservi che la soluzione presenta sempre un asintoto verticale (dunque non c'è esistenza globale)-.++

Esempio* 9.8** *(baffo di Peano).** Si determinino tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt[3]{u(x)} \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Svolgimento. Osserviamo che la funzione nulla $u(x) = 0$ è soluzione dell'equazione e soddisfa la condizione $u(0) = 0$. Ma a priori non possiamo escludere che ci siano altre soluzioni dell'equazione che verifichino la stessa condizione (vedremo che la proposizione 9.20 non si applica in questo caso particolare).

Nei punti in cui $u(x) \neq 0$ possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}} = 1.$$

Integrando il lato sinistro tramite il cambio di variabili $u = u(x)$, $du = u'(x)\,dx$, si ottiene

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}}\,dx = \left[\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}\right]_{u=u(x)} \ni \frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2(x)}.$$

integrando anche il lato destro troviamo dunque che su ogni intervallo su cui u è definita e $u(x) \neq 0$ deve esistere una costante c tale che

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2(x)} = x + c.$$

Risolvendo in $u(x)$:

$$u(x) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^3}. \tag{12}$$

Osserviamo che la proprietà precedente può essere soddisfatta solamente se $x \geq -c$ ma affinché sia $u(x) \neq 0$ dobbiamo imporre $x > -c$. Ma per $x \to -c^+$ si ha $u(x) \to 0$ e anche $u'(x) = \sqrt[3]{u(x)} \to 0$. Significa che una soluzione definita su $x > c$ mediante la (12) può essere estesa a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $u(x) = 0$ per $x \leq c$. Affinché valga la condizione $u(0) = 0$ sarà dunque sufficiente imporre la restrizione $-c \geq 0$.

Il nostro problema ha dunque infinite soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Per la precisione, per ogni $c \geq 0$ (cambiamo segno alla costante trovata prima, in modo che risulti positiva) si hanno le soluzioni

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq c \\ \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x-c)\right)^3} & \text{per } x > c \end{cases}$$

e

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq c \\ -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x-c)\right)^3} & \text{per } x > c \end{cases}$$

□

9.2.3 *altri metodi risolutivi*

Nella sezione precedente abbiamo visto che le equazioni lineari del primo ordine e le equazioni a variabili separabili possono essere ricondotte al calcolo di una primitiva. Nella sezione 9.6 verranno esposti i metodi risolutivi per le equazioni lineari di ordine n a coefficienti costanti.

Ci sono molti altri tipi di equazioni che possono essere ricondotti alle equazioni lineari o alle equazioni a variabili separabili. Non potremo dilungarci su questi metodi ma può essere utile, come riferimento non esaustivo, un elenco di alcune tipologie di equazioni per le quali esiste un metodo risoluvtivo:

1. *equazione del secondo ordine senza dipendenza da u*
$$F(x, u', u'') = 0$$
si riconduce al primo ordine ponendo $v(x) = u'(x)$;

2. *equazione del secondo ordine autonoma*
$$F(u, u', u'') = 0$$
si riconduce al primo ordine ponendo $v(u(x)) = u'(x)$;

3. *equazione di Bernoulli*
$$u' = a(x)u + b(z)u^\alpha$$
si riconduce ad una equazione lineare ponendo $v(x) = u(x)^{1-\alpha}$;

4. *equazione di Clairaut*
$$u = xu' + f(u');$$
la derivata dell'equazione si fattorizza: un fattore dà soluzioni della forma $u(x) = mx + q$ l'altro fattore diventa una equazione algebrica facendo la sostituzione $u(x) = v(u'(x))$;

5. *equazione di Riccati*
$$u' = u^2 + b(x)u + c(x).$$
si ponga $u'(x) = -v'(x)/v(x)$ per ricondursi ad una equazione lineare del secondo ordine in v;

Esempio* 9.9** *(equazione di Newton).** Un sistema fisico unidimensionale soggetto a forze che dipendono solamente dalla posizione può essere descritto da un problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(x) = F(u(x)) \\ u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

(ad esempio per il pendolo si ha $F(y) = -\sin y$). La funzione v definita da $v(u(x)) = u'(x)$ mette in relazione la velocità con la posizione e descrive quindi il moto nel cosiddetto *spazio delle fasi*. Con tale sostituzione si trova
$$u''(x) = v'(u(x))u'(x) = v'(u(x))v(u(x))$$

che sostituita in $u'' = F(u)$ ci dà una equazione differenziale del primo ordine per $v = v(u)$:

$$v'v = F(u).$$

Questa è una equazione del primo ordine a variabili separabili che può essere interpretata come la legge di conservazione dell'energia, infatti è equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2 - \int F(u)\right) = 0$$

dove $\frac{1}{2}v^2$ si interpreta come energia cinetica e $-\int F$ come energia potenziale. Integrando tra x_0 e x e utilizzando le condizioni iniziali si ottiene, con $u = u(x)$:

$$\frac{1}{2}v^2(u) = \frac{1}{2}v_0^2 + \int_{u_0}^{u} F(y)\,dy.$$

Questa equazione descrive la traiettoria del sistema nel piano delle fasi (u, v) e ci permette di ricavare v in funzione di u:

$$v(u) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\int_{u_0}^{u} F(u)\,du}$$

che significa:

$$u'(x) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\int_{u_0}^{u(x)} F(y)\,dy}.$$

Questa è una equazione autonoma in u, quindi a variabili separabili:

$$\pm\frac{u'(x)}{\sqrt{v_0^2 - \int_{u_0}^{u(x)} F(y)\,dy}} = 1$$

che può essere integrata tra x_0 e x facendo il cambio di variabile $u = u(x)$

$$\pm\int_{u_0}^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{v_0^2 - \int_{u_0}^{u} F(y)\,dy}} = x - x_0.$$

In questo modo abbiamo determinato la funzione inversa della soluzione $u(x)$.

***Esempio* 9.10** *(periodo del pendolo).* Sia $u(x)$ l'angolo di scostamento dalla verticale al tempo x di un pendolo semplice di lunghezza ℓ. Considerando la componente tangenziale della accelerazione di gravità (il cui modulo è g) l'equazione di Newton può essere scritta nella forma:

$$u''(x) = -\frac{\ell}{g}\sin u(x).$$

Siamo quindi nel caso dell'esempio precedente dove $F(u) = -\frac{\ell}{g}\sin u$ e se al tempo $x = 0$ lasciamo cadere da fermo il pendolo da un angolo u_0, si avrà $v_0 = 0$. L'energia potenziale sarà data allora da

$$\frac{-\ell}{g}\int_{u_0}^{u}\sin y\,dy = \frac{\ell}{g}(\cos u - \cos u_0).$$

Si ottiene dunque

$$u'(x) = \pm\sqrt{\frac{2\ell}{g}(\cos u(x) - \cos u_0)}.$$

Separando le variabili e integrando tra 0 e x si ottiene

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}}\int_0^x \frac{u'(x)\,dx}{\pm\sqrt{2\cos u(x) - 2\cos u_0}} = \int_0^x dx = x.$$

e cambiando variabile $u = u(x)$, $du = u'(x)dx$:

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}}\int_0^{u(x)} \frac{du}{\pm\sqrt{2\cos u - 2\cos u_0}} = x. \tag{13}$$

La scelta del segno $\pm$ è arbitraria ma visto che u è continua anche $u' = -\sin u$ deve essere una funzione continua. Dunque il segno $\pm$ può cambiare solo quando $u' = 0$. Nel punto iniziale $x = 0$ abbiamo imposto $u'(0) = 0$ e dunque l'energia cinetica è nulla. Visto che l'energia cinetica non può essere negativa significa che l'energia potenziale non può aumentare e quindi inizialmente l'angolo $u(x)$ dovrà diminuire (o almeno: non potrà aumentare). Dunque inizialmente il segno di u' è negativo e rimarrà negativo finché non si avrà nuovamente $u'(x) = 0$. L'integrale in (13) è un integrale improprio in quanto la funzione integranda presenta un asintoto per $u \to u_0^-$ dobbiamo dunque assicurarci che l'integrale sia finito. Sviluppando $\cos u$ nel punto $u = u_0$ si trova $\cos u = \cos u_0 - \sin u_0 \cdot (u - u_0) + o(u - u_0)$ da cui

$$\frac{1}{\sqrt{2\cos u - 2\cos u_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\sin u_0 \cdot (u_0 - u) + o(u - u_0)}} \sim \frac{C}{\sqrt{u_0 - u}}$$

che è notoriamente una funzione integrabile per $u \to u_0^-$.

Vogliamo ora calcolare il tempo x_1 in cui il pendolo raggiunge per la prima volta la verticale, cioè $u(x_1) = 0$. Ricordiamo che al tempo $x = 0$ il pendolo parte da un angolo u_0 con velocità nulla. Nell'intervallo $x \in [0, x_1]$ si avrà $u'(x) < 0$ (l'angolo diminuisce) dunque:

$$-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\int_{u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{2\cos u - 2\cos u_0}} = x_1.$$

Una volta raggiunta la verticale, per simmetria il pendolo tornerà a risalire fino ad un angolo $-u_0$ mettendoci lo stesso tempo x_1. Poi tornerà a scendere e risalire fino a tornare all'angolo u_0 mettendoci in totale un tempo $T = 4x_1$ che è quindi il periodo di oscillazione. Si ha dunque

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{2\cos u - 2\cos u_0}}.$$

Purtroppo l'integrale che abbiamo trovato non ha una primitiva esprimibile mediante funzioni elementari (è un integrale ellittico). Il nostro obiettivo è ora quello di farne uno sviluppo di Taylor per $u_0 \to 0$ che significa determinare il periodo del pendolo per *piccole oscillazioni*.

piccole oscillazioni

Tramite formule di bisezione possiamo scrivere $\cos u = 1 - 2\sin^2 \frac{u}{2}$ da cui

$$\sqrt{2\cos u - 2\cos u_0} = \sqrt{4\sin^2 \frac{u_0}{2} - 4\sin^2 \frac{u}{2}} = 2\sin u_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\sin \frac{u_0}{2}}\right)^2}$$

dunque ponendo

$$\sin t = \frac{\sin \frac{u}{2}}{\sin \frac{u_0}{2}} \tag{14}$$

si ha

$$\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{T}{4} = \int_0^{u_0} \frac{du}{2\sin \frac{u_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int_0^{u_0} \frac{du}{2\sin \frac{u_0}{2} \cos t}$$

ma per il cambio di variabile (14) si ha

$$\cos t \, dt = \frac{\cos \frac{u}{2}}{2\sin \frac{u_0}{2}} \, du$$

ovvero

$$\frac{du}{2\sin \frac{u_0}{2} \cos t} = \frac{dt}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t \sin^2 \frac{u_0}{2}}}$$

e quindi

$$\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{T}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos \frac{u}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{u}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{u_0}{2} \sin^2 t}}.$$

Utilizzando ora la serie binomiale (teorema 5.86) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{T}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-\sin^2 t \sin^2 \frac{u_0}{2}\right)^k dt. \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\sin^2 t \sin^2 \frac{u_0}{2}\right)^k dt.\end{aligned}$$

in quanto si ha

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.\end{aligned}$$

Rispetto alla variabile $\sin^2 t$ dentro all'integrale abbiamo ora una serie di potenze con coefficienti

$$a_k = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\sin^2 \frac{u_0}{2}\right)^k$$

e si verifica facilmente che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \sin^2 \frac{u_0}{2}$ dunque la serie di potenze converge se $\sin^2 t \le \frac{1}{\sin^2 \frac{u_0}{2}}$ che significa semplicemente $\sin \frac{u}{2} < 1$. Stiamo quindi facendo un integrale esteso all'intero raggio di convergenza della serie. Sappiamo che la serie converge totalmente e quindi uniformemente sugli intervalli chiusi strettamente contenuti nel raggio di convergenza. Visto che la serie è a termini positivi le somme parziali convergono alla somma della serie e sono tutte inferiori a tale somma. Abbiamo già visto, inoltre, che la somma della serie è integrabile con integrale finito. Dunque possiamo applicare il teorema di convergenza dominata (teorema 7.45 con $f = g$) per scambiare la serie con l'integrale:

$$\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{T}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\sin \frac{u_0}{2}\right)^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k}\, dt$$

l'integrale è ora sostanzialmente lo stesso I_n che abbiamo calcolato nel teorema 6.71:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin t)^{2k}\, dt = \frac{I_{2k}}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

da cui

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!}\right)^2 \left(\sin \frac{u_0}{2}\right)^{2k}.$$

Possiamo allora cercare di scrivere i primi termini dello sviluppo di Taylor di $T = T(u_0)$ per $u_0 \to 0$ diciamo, per esempio, fino all'ordine 8 in u_0. Basterà considerare la somma dei termini della serie per

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ in quanto la somma dei termini per $k \geq 5$ mi darà un contributo dell'ordine di $O\big(\sin \frac{u_0}{2}\big)^{10} = o(u_0^8)$. Dunque

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{T}{2\pi} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{u_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\sin^2 \frac{u_0}{2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \left(\sin^2 \frac{u_0}{2}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 \left(\sin^2 \frac{u_0}{2}\right)^4 + o(u_0^8) \\
&= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{u_0^2}{4} - \frac{u_0^4}{2^4\cdot 3} + \frac{u_0^6}{2^5\cdot 3^2\cdot 5} - \frac{u_0^8}{2^8\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\right) \\
&\quad + \frac{3^2}{2^6}\left(\frac{u_0^2}{4} - \frac{u_0^4}{2^4\cdot 3} + \frac{u_0^6}{2^5\cdot 3^2\cdot 5}\right)^2 \\
&\quad + \frac{5^2}{2^8}\left(\frac{u_0^2}{4} - \frac{u_0^4}{2^4\cdot 3}\right)^3 + \frac{5^2\cdot 7^2}{2^{14}}\frac{u_0^8}{2^8} + o(u_0^8) \\
&= 1 + \frac{u_0^2}{2^4} - \frac{u_0^4}{2^6\cdot 3} + \frac{u_0^6}{2^7\cdot 3^2\cdot 5} - \frac{u_0^8}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} \\
&\quad + \frac{3^2}{2^6}\left(\frac{u_0^4}{2^4} - \frac{u_0^6}{2^5\cdot 3} + \frac{u_0^8}{2^8\cdot 3^2} + \frac{u_0^8}{2^6\cdot 3^2\cdot 5}\right) \\
&\quad + \frac{5^2}{2^8}\left(\frac{u_0^6}{2^6} - \frac{u_0^8}{2^8}\right) + \frac{5^2\cdot 7^2}{2^{22}} u_0^8 + o(u_0^8) \\
&= 1 + \frac{u_0^2}{2^4} + \frac{11}{2^{10}\cdot 3} u_0^4 + \frac{173}{2^{14}\cdot 3^2\cdot 5} u_0^6 + \frac{22931}{2^{22}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} u_0^8 + o(u_0^8).
\end{aligned}
$$

9.3 ALCUNI RISULTATI PREPARATORI SULLE FUNZIONI VETTORIALI E DI PIÙ VARIABILI

Ci sarà utile estendere la definizione delle classi di regolarità C^k alle funzioni vettoriali (cioè con codominio $\mathbb{R}^n$) e di più variabili (cioè con dominio $\mathbb{R}^m$).

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ è un insieme aperto e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione, vogliamo definire le *derivate parziali* di f. Se $\boldsymbol{x} \in \Omega$ si ha $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)$ e quindi $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$. Se facciamo variare una sola componente x_j mantenendo fisse tutte le altre componenti, otteniamo una funzione di una variabile $x_j \mapsto g(x_j) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m)$. Definiamo dunque la *derivata parziale* di f rispetto alla variabile x_j come la derivata della funzione $g(x_j)$. Denotiamo tale derivata con il simbolo:

derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Le derivate parziali si calcolano dunque come le usuali derivate per le funzioni di una variabile, solamente bisogna considerare costanti tutte le variabili tranne quella coinvolta nella derivazione. Ad esempio se $f(x,v) = -\sin(x) - v$ (come nell'esempio fatto nell'introduzione) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos(x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = -1.$$

Se $\boldsymbol{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una funzione di più variabili a valori vettoriali potremo scrivere $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ e considerare le derivate parziali di ogni componente:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_n}{x_j}\right).$$

Definizione 9.11. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto. Denoteremo con $C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni continue $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$.*

Denotiamo con $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni in $C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tali che ognuna delle loro derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ esiste in ogni punto di Ω ed è a sua volta una funzione continua (cioè in $C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$). Ricorsivamente si definisce $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ per $k > 1$, come lo spazio delle funzioni $\Omega \to \mathbb{R}^n$ tali che tutte le loro derivate parziali stanno in $C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Quando lo spazio di arrivo non è indicato si sottointende sempre $\mathbb{R}$, quindi $C^k(\Omega) = C^k(\Omega, \mathbb{R})$.

Teorema 9.12 (stabilità delle funzioni regolari)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Se $f, g \in C^k(\Omega)$ allora anche $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (dove è definita) sono di classe C^k. Se $f \in C^k(\Omega)$ e $g \in C^k(\mathbb{R})$ allora $g \circ f \in C^k(\Omega)$.*

Dimostrazione. Il fatto che la composizione di funzioni continue sia una funzione continua è vero in generale in qualunque spazio metrico. Infatti se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ e se $x_k \to x$ in X allora $f(x_k) \to f(x)$ in Y (per la continuità di f) e quindi $g(f(x_k)) \to g(f(x))$ in Z (per la continuità di g). Dunque $(g \circ f)(x_k) \to (g \circ f)(x)$ e $g \circ f\colon X \to Z$ è continua.

Possiamo dunque osservare che le funzioni di due variabili $s(x,y) = x + y$, $m(x,y) = xy$ sono funzioni continue da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Questo garantisce che la somma e il prodotto di funzioni continue siano funzioni continue. Anche l'opposto e il reciproco di funzioni continue sono funzioni continue in quanto le funzioni $o(x) = -x$ e $r(x) = 1/x$ sono continue. Ne consegue che anche la differenza e il rapporto di funzioni continue sono funzioni continue.

Veniamo ora alle derivate parziali. Per le regole di derivazione delle funzioni di una variabile sappiamo che somma, prodotto, differenza, rapporto (ove definito) e composizione di funzioni derivabili sono a loro volta funzioni derivabili e la derivata si esprime sempre mediante somma, prodotto, differenza e rapporto delle funzioni coinvolte e delle loro derivate. Dunque quello che si ottiene combinando tra loro funzioni di classe C^k è una funzione continua le cui derivate parziali esistono e sono di classe C^{k-1}, dunque è una funzione di classe C^k. $\square$

Definizione 9.13. *Sia $\boldsymbol{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Diremo che $\boldsymbol{f}$ è integrabile su $[a,b]$ se ogni $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a,b]$ e in tal caso porremo:*

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx, \dots, \int_a^b f_m(x)\,dx\right) \in \mathbb{R}^m$$

cosicché per ogni $k = 1, \dots, m$ si ha:

$$\left(\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx\right)_k = \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Come al solito si pone inoltre $\int_b^a \boldsymbol{f} = -\int_a^b \boldsymbol{f}$.

Teorema 9.14. *Sia $\boldsymbol{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ integrabile. Allora si ha* *

$$\left|\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\boldsymbol{f}(x)|\,dx.$$

Dimostrazione. Posto
$$\boldsymbol{v} = \int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx$$
si ha, usando la linearità dell'integrale e sfruttando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} &= \sum_{k=1}^n v_k \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^m v_k f_k(x)\,dx \\ &= \int_a^b (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}(x))\,dx \le \int_a^b |\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{f}(x)|\,dx = |\boldsymbol{v}|\int_a^b |\boldsymbol{f}(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Se $|\boldsymbol{v}| \ne 0$ possiamo dividere ambo i membri per $|\boldsymbol{v}|$ e ottenere la disuguaglianza cercata. Altrimenti se $|\boldsymbol{v}| = 0$ la disuguaglianza è certamente soddisfatta in quanto il lato destro non può essere negativo. $\square$

9.4 IL PROBLEMA DI CAUCHY

Il problema di Cauchy per i sistemi del primo ordine consiste nel trovare una soluzione di un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in n incognite con un dato iniziale fissato. Cioè dato $x_0 \in \mathbb{R}$, e $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ si cerca un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$ e una funzione $\boldsymbol{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ che sia derivabile e che soddisfi:

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x)), & \forall x \in I\\ \boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{y}_0.\end{cases} \tag{15}$$

Definizione 9.15 (Cauchy-Lipschitz). *Diremo che una funzione* $\boldsymbol{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *soddisfa la* proprietà di Cauchy-Lipschitz *se* f *è continua e se per ogni* $(x_0, \boldsymbol{y}_0) \in \Omega$ *esiste un intorno* U *di* $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ *ed esiste* $L \geq 0$ *tale che se* $(x, \boldsymbol{y}_1) \in U$ *e* $(x, \boldsymbol{y}_2) \in U$ *si ha*

proprietà di Cauchy-Lipschitz

$$|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)| \leq L|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2|$$

A parole potremmo dire: $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ *è localmente lipschitziana rispetto a* $\boldsymbol{y}$ *uniformemente rispetto a* x.

*** **Teorema 9.16** (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità locale). *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *e sia* $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, *una funzione con la proprietà di Cauchy-Lipschitz (definizione 9.15).*

esistenza e unicità locale per i sistemi del primo ordine

Allora dato $(x_0, \boldsymbol{y}_0) \in \Omega$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che preso qualunque intervallo* $I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *esiste una unica funzione* $\boldsymbol{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ *tale che* $(x, \boldsymbol{u}(x)) \in \Omega$ *per ogni* $x \in I$ *che soddisfa il problema di Cauchy* (15).

*** *Dimostrazione.* L'idea della dimostrazione è che integrando ambo i lati dell'equazione $\boldsymbol{u}' = f(x, \boldsymbol{u})$ e tenendo conto della condizione iniziale, si ottiene una equazione del tipo $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{u})$ dove T è un operatore sullo spazio delle funzioni continue. Scegliendo δ abbastanza piccolo si riuscirà a mostrare che le funzioni definite su un intervallo di raggio δ intorno a x_0 risultano essere uno spazio invariante per T e, eventualmente rimpicciolendo ulteriormente δ si riuscità poi a dimostrare che T è una contrazione e quindi l'esistenza e unicità della soluzione si ottiene dall'esistenza e unicità del punto fisso di T.

Il primo passo è quello di trasformare il problema differenziale in un problema integrale. Se $\boldsymbol{u}$ è una funzione derivabile soluzione di (15) allora è chiaro che $\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x))$ è continua in quanto composizione di funzioni continue e dunque $\boldsymbol{u}$ è di classe C^1. Possiamo dunque integrare tra x_0 e x i due lati dell'equazione differenziale per ottenere:

$$\boldsymbol{u}(x) - \boldsymbol{u}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{u}(s))\, ds$$

e dunque se $\boldsymbol{u}$ risolve il problema di Cauchy allora $\boldsymbol{u}$ soddisfa anche la seguente equazione integrale:

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{u}(s))\, ds. \tag{16}$$

Viceversa se $\boldsymbol{u}$ è continua e soddisfa (16) allora si ha ovviamente $\boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$ e, passando alle derivate, si scopre che $\boldsymbol{u}$ è derivabile e soddisfa l'equazione differenziale $\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x))$. Dunque trovare una soluzione C^1 del problema di Cauchy (15) è equivalente a trovare una soluzione C^0 del problema integrale (16). Ci dedicheremo dunque a questo secondo problema.

Denotiamo con

$$C_{\alpha,\beta} = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \colon |x - x_0| \leq \alpha, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| \leq \beta\}$$

il cilindro centrato in $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ con asse parallelo all'asse delle x, di altezza 2α e raggio β. Fissato $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ consideriamo l'intorno U in cui, per ipotesi, la funzione $\boldsymbol{f}$ è L-lipschitziana uniformemente rispetto ad x. L'intorno U conterra certamente un cilindro $C_{\alpha,\beta}$ per un qualche $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sufficientemente piccoli. Il cilindro $C_{\alpha,\beta}$ è chiuso e limitato in Ω e dunque $\boldsymbol{f}$, essendo continua, è limitata su $C_{\alpha,\beta}$ per il teorema di Weierstrass. Sia $M > 0$ tale che $|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})| \leq M$ per ogni $(x, \boldsymbol{y}) \in C_{\alpha,\beta}$ e definiamo

$$\delta = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{L}\}. \tag{17}$$

Il perché δ venga definito in questo modo si capirà nel prosieguo della dimostrazione. Consideriamo un qualunque intervallo $I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e definitamo lo spazio di funzioni

$$X = \{\boldsymbol{u} \in C^0(I, \mathbb{R}^n) \colon \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}_0\|_\infty \leq \beta\}.$$

Sappiamo che $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo e X è chiuso quindi anch'esso è completo. Possiamo allora considerare l'operatore $T \colon X \to C^0(I, \mathbb{R}^n)$ definito da:

$$T(\boldsymbol{u})(x) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{u}(s))\, ds.$$

Vogliamo innanzitutto verificare che X è invariante, cioè che $T(X) \subseteq X$. Se $\boldsymbol{u} \in X$ e se $x \in I$ si ha $(x, \boldsymbol{u}(x)) \in C_{\delta,\beta} \subseteq C_{\alpha,\beta}$ e dunque (usando anche (17) e il teorema 9.14)

$$|\boldsymbol{T}(u)(x) - \boldsymbol{y}_0| = \left| \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{u}(s))\, ds \right| \leq \int_{x_0}^{x} M\, ds = |x - x_0| M \leq \delta M \leq \beta.$$

Dunque $\|T(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{y}_0\| \leq \beta$ e $T(\boldsymbol{u}) \in X$. Abbiamo dunque che $T \colon X \to X$. Verifichiamo ora che T è una contrazione. Si ha:

$$\begin{aligned}
|T(\boldsymbol{u}_1)(x) - T(\boldsymbol{u}_2)(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{u}_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{u}_2(s))|\, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} L |\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)|\, ds \right| \\
&\leq L|x - x_0| \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_\infty \leq L\delta \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_\infty
\end{aligned}$$

ovvero, facendo l'estremo superiore al variare di $x \in I$:

$$\|T(\boldsymbol{u}_1) - T(\boldsymbol{u}_2)\|_\infty \leq L\delta \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|.$$

Da (17) risulta $L\delta < L\delta_0 \leq 1$ dunque $T \colon X \to X$ è una contrazione su uno spazio metrico completo. Per il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli sappiamo quindi che esiste una unica funzione $\boldsymbol{u} \in X$ ovvero $\boldsymbol{u} \colon I \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ ovvero (16) ovvero (15). □

La condizione di Cauchy-Lipschitz può sembrare piuttosto complicata da verificare. Una condizione molto più semplice è che la funzione $\boldsymbol{f}$ sia di classe C^1. La seguente proposizione ci dice che tale condizione è sufficiente per applicare il teorema di Cauchy-Lipschitz.

*** **Proposizione 9.17.** *Se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ allora f soddisfa la condizione di Cauchy-Lipschitz.*

*** *Dimostrazione.* Se prendiamo un cilindro $K = C_{\alpha,\beta} \subseteq \Omega$ centrato in $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$, sappiamo che ogni derivata parziale $\partial \boldsymbol{f}/\partial y_j$ è continua ed è quindi limitata (per il teorema di Weierstrass) su K. Sia L_j il massimo di $\left|\partial \boldsymbol{f}/\partial u_j\right|$ su K e sia L il massimo degli L_j. Allora presi $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ con $(x, \boldsymbol{y}), (x, \boldsymbol{z}) \in K$ si può scomporre l'incremento vettoriale $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}$ lungo le n direzioni coordinate e applicare il teorema di Lagrange lungo ogni direzione. Per ogni $k = 1, \dots, n$ si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
&|f_k(x, \boldsymbol{z}) - f_k(x, \boldsymbol{y})| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^n \left| f_k(x, z_1, \dots, z_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - f_k(x, z_1, \dots, z_{j-1}, y_j, \dots, y_n) \right| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^n L_j \left| z_j - y_j \right| \le \sum_{j=1}^n L_j |z - y| \le nL|z - y|
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |f_k(x, \boldsymbol{z}) - f_k(x, \boldsymbol{y})|^2} \\
&\le \sqrt{\sum_{k=1}^n n^2 L^2 |z - y|^2} \\
&\le n\sqrt{n} L |z - y|.
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi mostrato che per ogni $(x_0, \boldsymbol{y}_0) \in \Omega$ esiste un intorno del punto $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ in cui la funzione $\boldsymbol{f}$ soddisfa le ipotesi del teorema 9.16. $\square$

Il teorema di Cauchy-Lipschitz garantisce l'esistenza di una soluzione definita in un piccolo intervallo $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ intorno al punto iniziale x_0. Se scegliamo $x_1 = x_0 + \delta_0$ possiamo applicare nuovamente lo stesso teorema per trovare una soluzione definita nell'intervallo $[x_1 - \delta, x_1 + \delta]$ che coincida con la precedente soluzione nel punto x_1. Le due soluzioni coincidono sull'intersezione dei due intervalli (grazie all'unicità della soluzione su ogni sotto-intervallo) e quindi possono essere incollate per ottenere una soluzione definita sull'unione dei due intervalli. Questo procedimento può essere ripetuto infinite volte ma gli intervalli potrebbero diventare sempre più piccoli, quindi non c'è garanzia di ottenere una soluzione definita su intervalli arbitrariamente grandi. Nel seguito cercheremo di capire quanto grande può essere l'intervallo *massimale* su cui si riesce ad estendere la soluzione.

Definizione 9.18 (soluzione/intervallo massimale)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto e sia $\boldsymbol{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ una soluzione di una equazione differenziale.*

Se $J \supseteq I$, $J \neq I$ è un intervallo, se $\boldsymbol{v}\colon J \to \mathbb{R}^n$ risolve la stessa equazione differenziale e se $\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{u}(x)$ per ogni $x \in I$, diremo che $\boldsymbol{v}$ è una estensione della soluzione $u(x)$.

estensione della soluzione

Se la soluzione $\boldsymbol{u}$ non ammette estensioni, diremo che $\boldsymbol{u}$ è una soluzione definita su un intervallo massimale o, più semplicemente, diremo che $\boldsymbol{u}$ è una soluzione massimale.

soluzione massimale

Proposizione 9.19 (caratterizzazione delle soluzioni massimali)**.** *Supponiamo che $\boldsymbol{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soddisfi le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz. Allora una soluzione $\boldsymbol{u}$ dell'equazione*

$$\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x)) \tag{18}$$

è definita su un intervallo massimale I se e solo se I è aperto e per ogni K compatto $K \subseteq \Omega$ e per ogni $x_0 \in I$ esistono $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_0 < x_2$ tali che $\boldsymbol{u}(x_1) \notin K$ e $\boldsymbol{u}(x_2) \notin K$. Significa cioè che il grafico di $\boldsymbol{u}$ cioè la curva $(x, \boldsymbol{u}(x))$ esce da qualunque compatto fissato $K \subseteq \Omega$ sia facendo crescere x verso destra che facendo calare x verso sinistra. In altre parole il grafico della soluzione massimale tende ad arrivare sulla frontiera di Ω.

Dimostrazione. Prima implicazione. Supponiamo che $\boldsymbol{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ sia una soluzione di (18) definita su un intervallo massimale I. Dovrà essere $(x, u(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in I$.

Mostriamo innanzitutto che I è un intervallo aperto a destra: se non lo fosse si avrebbe che $x_0 = \sup I \in I$. Allora $(x_0, u(x_0)) \in \Omega$ e per il teorema di esistenza e unicità locale possiamo trovare un intorno J di x_0 e una funzione $\boldsymbol{v}\colon J \to \mathbb{R}^n$ che risolve (18). Per l'unicità delle soluzioni $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ devono coincidere su $I \cap J$ e dunque facendo l'unione dei due grafici ottengo una estensione di $\boldsymbol{u}$ a tutto l'intervall $I \cup J$ che è strettamente più grande di I. Dunque $\boldsymbol{u}$ non poteva essere una soluzione massimale.

Mostriamo ora che la curva $(x, \boldsymbol{u}(x))$ esce da ogni compatto $K \subseteq \Omega$ sia da destra che da sinistra. Supponiamo per assurdo che esista un compatto K tale che $(x, \boldsymbol{u}(x)) \in K$ per ogni $x \in I$. Il grafico $(x, \boldsymbol{u}(x))$ è limitato per $x \in I$ dunque certamente I deve essere limitato. Inoltre abbiamo visto che I è aperto e quindi $I = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Allora per ogni $x \in I = (a, b)$ si ha

$$\left|\boldsymbol{u}'(x)\right| = |\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x))| \leq \sup_K |\boldsymbol{f}|.$$

Visto che $\boldsymbol{f}$ è continua (in quanto soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità) la funzione $|\boldsymbol{f}|$ ha massimo su K per il teorema di Weierstrass e quindi esiste $M \geq 0$ tale che $|\boldsymbol{u}'(x)| \leq M$ per ogni $x \in (a, b)$. Significa che ogni componente di $\boldsymbol{u}$ è M-lipschitziana, in particolare ogni componente è uniformemente continua. Dunque la funzione $\boldsymbol{u}$ può essere estesa con continuità ad una funzione $\boldsymbol{v}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definita anche agli estremi dell'intervallo. Visto che $(x, \boldsymbol{u}(x)) \in K$ per ogni $x \in (a, b)$

e visto che $\boldsymbol{v}(b) = \lim_{x \to b^-} \boldsymbol{u}(x)$ essendo K chiuso possiamo affermare che $\boldsymbol{v}(b) \in K$. E lo stesso vale per $\boldsymbol{v}(a)$. particolare $(x, \boldsymbol{v}(x)) \in K \subseteq \Omega$ per ogni $x \in [a, b]$. Vogliamo ora verificare che $\boldsymbol{v}$ è soluzione dell'equazione differenziale (18). Chiaramente $\boldsymbol{v}$ soddisfa l'equazione per ogni $x \in (a, b)$ in quanto su (a, b) coincide con $\boldsymbol{u}$ che è soluzione. Consideriamo l'estremo b. Visto che $\boldsymbol{v}$ è continua in b e $\boldsymbol{f}$ è continua in $(b, \boldsymbol{v}(b))$ si ha

$$\lim_{x \to b^-} \boldsymbol{v}'(x) = \lim_{x \to b^-} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{v}(x)) = \boldsymbol{f}(b, \boldsymbol{v}(b)) \in \mathbb{R}^n$$

Sappiamo però che se il limite della derivata di una funzione continua esiste ed è finito, allora la funzione è derivabile nel punto limite e la derivata è continua in quel punto (si applichi il teorema dell'Hospital al limite del rapporto incrementale). Dunque $\boldsymbol{v}$ è derivabile in b e anche in quel punto soddisfa l'equazione differenziale. Lo stesso vale nel punto a. Dunque siamo riusciti a trovare una estensione $\boldsymbol{v}$ di $\boldsymbol{u}$ contraddicendo l'ipotesi che $\boldsymbol{u}$ fosse una soluzione massimale.

Seconda implicazione. Supponiamo ora $\boldsymbol{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ sia una soluzione dell'equazione differenziale (18) definita su un intervallo I e tale che la curva $(x, \boldsymbol{u}(x))$ esca da ogni compatto K al variare di $x \in I$. Vogliamo dimostrare che $\boldsymbol{u}$ è soluzione massimale. Innanzitutto I non può essere compatto, altrimenti anche $K = \{(x, \boldsymbol{u}(x)) \colon x \in I\}$ sarebbe un compatto di Ω e ovviamente la curva non esce da K. Sia $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Siccome I non è chiuso esso non contiene uno dei due estremi: supponiamo sia b. Allora se $\boldsymbol{u}$ fosse estendibile a destra esisterebbe una estensione continua $\boldsymbol{v}\colon (a, b] \to \mathbb{R}^n$ che coincide con $\boldsymbol{u}$ su (a, b) e che è continua nel punto $x = b$ e che soddisfa l'equazione differenziale quindi, in particolare, $(b, \boldsymbol{v}(b)) \in \Omega$. Ma allora scelto $x_0 \in (a, b)$ prendiamo $K = \{(x, \boldsymbol{v}(x)) \colon x \in [x_0, b]\}$. Visto che $\boldsymbol{v}\colon [x_0, b] \to \mathbb{R}^n$ è continua è facile verificare che K è chiuso è limitato, $K \subseteq \Omega$. Ma ovviamente $(x, \boldsymbol{v}(x)) \in K$ per ogni $x \geq x_0$, contro le ipotesi. □

Proposizione 9.20 (separazione delle soluzioni)**.** *Se $\boldsymbol{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità e se $\boldsymbol{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{v}\colon J \to \mathbb{R}^n$ sono due soluzioni dell'equazione differenziale $\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x))$ definite su due intervalli $I, J \subseteq \mathbb{R}$ e se esiste $x_0 \in I \cap J$ tale che $\boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{v}(x_0)$ allora $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{v}(x)$ per ogni $x \in I \cap J$. Detto in altri termini: nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità i grafici di due soluzioni diverse definite in un intervallo non possono toccarsi.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in I \cap J$ un punto in cui $\boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{v}(x_0)$ e supponiamo per assurdo che esista $x_2 \in I \cap J$ tale che $\boldsymbol{u}(x_2) \neq \boldsymbol{v}(x_2)$. In tal caso possiamo considerare il punto

$$x_1 = \sup\{x \in [x_0, x_2] \colon \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{v}(x)\}.$$

Su tutto l'intervallo $[x_0, x_1)$ si ha quindi $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{v}(x)$ e per continuità dovrà dunque anche essere $\boldsymbol{u}(x_1) = \boldsymbol{v}(x_1)$. In pratica x_1 è l'ultimo punto di contatto tra le due soluzioni. Ponendo allora il punto $(x_1, \boldsymbol{u}(x_1))$ come dato iniziale del problema di Cauchy scopriamo che $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono localmente due soluzioni di tale problema. Per l'unicità locale le due soluzioni devono coincidere in un piccolo intorno del punto x_1, diciamo in particolare che devono coincidere su $[x_1, x_1 + \varepsilon]$ ma questo è in contraddizione con la definizione di x_1. □

Teorema 9.21 (esistenza di soluzioni massimali)**.** *Sia $\boldsymbol{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ una soluzione dell'equazione differenziale* (18) *definita su un intervallo non vuoto $I \subseteq \mathbb{R}$ e supponiamo che tale equazioni soddisfi il teorema di esistenza e unicità locale (questo succede ad esempio se $f \in C^1$). Se $\boldsymbol{u}$ non è essa stessa una soluzione massimale, esiste sempre una estensione massimale $\boldsymbol{v}\colon J \to \mathbb{R}^n$, $J \supseteq I$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\boldsymbol{u}$ non sia massimale, dunque $\boldsymbol{u}$ ammette estensioni. In particolare ammette estensioni definite su intervalli aperti, in quanto se una soluzione è definita su un intervallo che non è aperto posso sempre estenderla in un intorno aperto dei punti di frontiera dell'intervallo mediante il teorema di esistenza locale ottenendo quindi una estensione definita su un intervallo aperto.

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le estensioni di $\boldsymbol{u}$ definite su intervalli aperti. Più precisamente ogni $\boldsymbol{w} \in \mathcal{F}$ è una funzione $\boldsymbol{w}\colon J_{\boldsymbol{w}} \to \mathbb{R}^n$ definita su un intervallo aperto $J_{\boldsymbol{w}} \supseteq I$ che soddisfa l'equazione differenziale (18) e che coincide con $\boldsymbol{u}$ su I. Definiamo $\boldsymbol{v}\colon J \to \mathbb{R}^n$ come segue:

$$J = \bigcup_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{F}} J_{\boldsymbol{w}}$$
$$\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{w}(x) \qquad \text{se } x \in J_{\boldsymbol{w}}.$$

Si osservi che dato $x \in I$ se $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathcal{F}$ sono due estensioni entrambe definite su un punto x, allora esse coincidono in x per la Proposizione 9.20, dunque $\boldsymbol{v}(x)$ è univocamente definita.

Essendo ogni $J_{\boldsymbol{w}}$ aperto è chiaro che J è aperto. E' anche facile convincersi che J deve essere un intervallo, in quanto tutti i $J_{\boldsymbol{w}}$ hanno in comune i punti di I. Verifichiamo ora che $\boldsymbol{v}$ soddisfa l'equazione differenziale. Preso un punto $x \in J$ deve esistere $\boldsymbol{w}$ tale che $x \in J_{\boldsymbol{w}}$. Sappiamo che $\boldsymbol{w}'(x) = f(x, \boldsymbol{w}(x))$ e visto che $\boldsymbol{u}$ coincide con $\boldsymbol{w}$ su $J_{\boldsymbol{w}}$ possiamo dedurre che anche le derivate, in x, coincidono:

$$\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{w}'(x) = f(x, \boldsymbol{w}(x)) = f(x, \boldsymbol{u}(x)).$$

Dunque anche $\boldsymbol{u}$ è soluzione di (18). In pratica abbiamo verificato che $\boldsymbol{v} \in \mathcal{F}$ ed è quindi una estensione di $\boldsymbol{u}$. Vogliamo ora dimostrare che è una estensione massimale. Supponiamo per assurdo che esista $\boldsymbol{w}$ estensione di $\boldsymbol{v}$ definita su un intervallo $J_{\boldsymbol{w}} \supseteq J$, $J_{\boldsymbol{w}} \neq J$. Posso supporre che $J_{\boldsymbol{w}}$ sia aperto, perché in caso contrario potrei estendere la soluzione $\boldsymbol{w}$ in un intorno aperto dei punti di frontiera dell'intervallo, mediante il teorema di esistenza locale, ottenendo una estensione definita su un intervallo più grande ed aperto. Dunque $\boldsymbol{w} \in \mathcal{F}$ ma allora, per definizione di J, dovrà essere $J \supseteq J_{\boldsymbol{w}}$: assurdo. □

Teorema 9.22 (esistenza globale). *Sia $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ e sia $\boldsymbol{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ una funzione che soddisfa la proprietà di Cauchy-Lipschitz e che sia sublineare in $\boldsymbol{y}$ uniformemente rispetto a x, cioè esistono $m, q \in \mathbb{R}$ tali che:*

$$|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})| \leq m|\boldsymbol{y}| + q, \qquad \forall (x, \boldsymbol{y}) \in \Omega.$$

Allora per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste una funzione $\boldsymbol{u} \colon I \to \mathbb{R}^n$ (definita su tutto I) soluzione del problema di Cauchy (15).

La dimostrazione richiede un lemma preliminare.

Lemma 9.23 (Gronwall). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e siano $m, q \geq 0$. Sia $\boldsymbol{u} \colon [a, b) \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$\left|\boldsymbol{u}'(t)\right| \leq m|\boldsymbol{u}(t)| + q \qquad \forall t \in [a, b).$$

Allora $\boldsymbol{u}$ è limitata.

Dimostrazione. Ricordando che

$$(|\boldsymbol{u}|^2)' = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})' = 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'$$

per ogni $x \in [a, b)$ possiamo fare la seguente stima:

$$\begin{aligned}
\left[\ln(1 + |\boldsymbol{u}(t)|^2)\right]_a^x &= \int_a^x \left(\ln(1 + |\boldsymbol{u}(t)|^2)\right)' dt = \int_a^x \frac{2\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{u}'(t)}{1 + |\boldsymbol{u}(t)|^2}\, dt \\
&\leq 2\int_a^x \frac{|\boldsymbol{u}(t)||\boldsymbol{u}'(t)|}{1 + |\boldsymbol{u}(t)|^2}\, dt \leq 2\int_a^x \frac{|\boldsymbol{u}(t)|(m|\boldsymbol{u}(t)| + q)}{1 + |\boldsymbol{u}(t)|^2}\, dt \\
&\leq 2\int_a^x \left(m + \frac{q|\boldsymbol{u}(t)|}{1 + |\boldsymbol{u}(t)|^2}\right) dt \\
&\leq (x - a)(2m + q) \leq (b - a)(2m + q)
\end{aligned}$$

avendo anche sfruttato la disuguaglianza $s/(1 + s^2) \leq 1/2$ con $s = |\boldsymbol{u}(t)|$. Dunque

$$\ln(1 + |\boldsymbol{u}(x)|^2) \leq \ln(1 + |\boldsymbol{u}(a)|^2) + (b - a)(2m + q)$$

è una funzione limitata e di conseguenza anche $|\boldsymbol{u}(x)|$ è limitata. □

Dimostrazione teorema 9.22. Sia $\boldsymbol{u}$ una soluzione massimale del problema di Cauchy e sia $J \subseteq I$ l'intervallo massimale su cui $\boldsymbol{u}$ è definita. Sia $b = \sup J$. Sappiamo quindi che $\boldsymbol{u}$ è definita su $[x_0, b)$ e quindi per il lemma precedente deve essere limitata: esiste cioè $M > 0$ per cui $|\boldsymbol{u}(x)| \leq M$ per ogni $x \in [x_0, b)$. Se consideriamo il compatto

$$K = [a, b] \times \overline{B_M(\mathbf{0})} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \colon x \in [a, b], |y| \leq M\}$$

abbiamo quindi verificato che $(x, \boldsymbol{u}(x)) \in K$ per ogni $x \in [a, b)$. Se fosse $b \in I$ si avrebbe $K \subseteq \Omega$ e quindi questo sarebbe in contraddizione con la proposizione 9.19 che ci dice che ogni soluzione massimale esce da qualunque compatto contenuto in Ω. Significa allora che $b \not inI$ e cioè che $b = \sup J = \sup I$ (non può essere $\sup J > \sup I$ in quanto $J \subseteq I$).

In maniera analoga (o per simmetria) si può dimostrare che $\inf J = \inf I$ e dunque $J = I$ come volevamo dimostrare □

9.5 IL PROBLEMA DI CAUCHY PER EQUAZIONI DI ORDINE n

Il problema di Cauchy per le equazioni di ordine n è il problema di determinare la soluzione di una equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale accoppiato ad una condizione iniziale per il valore della funzione e di tutte le sue derivate fino all'ordine n. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^0(\Omega)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si tratta quindi di trovare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $u \in C^n(I)$ che soddisfi le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x)) \\ u(x_0) = y_1 \\ u'(x_0) = y_2 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_n. \end{cases} \tag{19}$$

esistenza e unicità locale

Teorema 9.24 (esistenza e unicità per le equazioni di ordine n)**.** *Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la condizione di Cauchy-Lipschitz. Allora il problema di Cauchy* (19) *ammette una unica soluzione locale. Esiste cioè un $\delta > 0$ tale che per ogni intervallo $I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esiste una unica $u \in C^n(I)$ che soddisfa* (19)*.*

esistenza e unicità globale

Se poi Ω è della forma $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto e se f è anche sublineare (come nelle ipotesi di esistenza globale) allora il problema di Cauchy (19) *ammette una unica soluzione definita su tutto I.*

Dimostrazione. Se $u \in C^n$ è una funzione scalare possiamo considerare la funzione vettoriale $\boldsymbol{u} \in C^1$ le cui componenti sono u e le sue prime $n-1$ derivate:

$$\boldsymbol{u}(x) = (u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x))$$

ovvero $u_k(x) = u^{(k-1)}(x)$ per $k = 1, \ldots, n$ essendo $\boldsymbol{u}(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$.

Con questa trasformazione il problema (19) si può scrivere nella forma:

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2 \\ u_2'(x) = u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1}'(x) = u_n \\ u_n'(x) = f(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \\ \\ u_1(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u_n(x_0) = y_n \end{cases}$$

ovvero posto $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = (y_2, y_3, \dots, y_n, f(x, \boldsymbol{y}))$ abbiamo una funzione vettoriale $\boldsymbol{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ e il problema (19) risulta equivalente a

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x)) \\ \boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{y}. \end{cases} \tag{20}$$

Visto che f è continua, anche $\boldsymbol{f}$ risulta continua. Verifichiamo se $\boldsymbol{f}$ soddisfa la condizione di Lipschitz. Per ipotesi f la soddisfa, cioè esiste $L > 0$ tale che:

$$|f(x, \boldsymbol{y}) - f(x, \boldsymbol{z})| \le L|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|.$$

Ma allora si ha

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z})| &= \sqrt{\sum_{k=2}^{n} |y_k - z_k|^2 + |f(x, \boldsymbol{y}) - f(x, \boldsymbol{z})|^2} \\ &\le \sqrt{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|^2 + L^2 |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|^2} = \sqrt{1 + L^2} \cdot |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|. \end{aligned}$$

Dunque la funzione $\boldsymbol{f}$ verifica le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz: esiste dunque una soluzione $\boldsymbol{u}$ di tale problema in un opportuno intervallo centrato nel punto x_0. Ponendo $u = u_1$ (la prima componente di $\boldsymbol{u}$) si osserva che u è di classe C^n. Infatti sappiamo che $\boldsymbol{u}$ è di classe C^1 ed essendo $u_1' = u_2$, $u_2' = u_3$, …, $u_{n-1}' = u_n$ ed essendo $u_n \in C^1$, si scopre che $u = u_1$ è di classe C^n ed è una soluzione del problema (19). Anche l'unicità segue direttamente dall'equivalenza delle due formulazioni.

L'esistenza globale segue in maniera analoga dal teorema per i sistemi del primo ordine. Basti osservare che se la funzione f soddisfa l'ipotesi di sublinearità anche $\boldsymbol{f}$ la soddisfa. □

9.6 EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE n

Le equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine n in forma normale possono essere scritte nella forma: *equazioni lineari di ordine n*

$$u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)u'(x) + a_0u(x) = b(x) \tag{21}$$

con $a_k\colon A \to \mathbb{R}$, $b\colon A \to \mathbb{R}$ funzioni continue definite su uno stesso dominio $A \subseteq \mathbb{R}$. Nel caso $b(x) = 0$ l'equazione dice essere *omogenea* e si può scrivere come:

omogenea

$$u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)u'(x) + a_0u(x) = 0. \tag{22}$$

In generale l'equazione (21) viene chiamata *equazione non omogenea* e la corrispondente equazione (22) viene chiamata *equazione omogenea associata*.

equazione non omogenea

equazione omogenea associata

Teorema 9.25 (struttura delle soluzioni di una equazione lineare)**.** *Siano $a_k \in C^0(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto.* ***

1. *L'insieme V delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea* (22) *è un sottospazio vettoriale di $C^n(I)$ di dimensione n. Inoltre, fissato un punto qualunque $x_0 \in I$ l'operatore $J\colon V \to \mathbb{R}^n$ (chiamato* jet*) definito da*

   jet

$$J(u) = (u(x_0), u'(x_0), u''(x_0), \ldots, u^{(n-1)}(x_0)) \tag{23}$$

   è un operatore lineare bigettivo (cioè un isomorfismo di spazi vettoriali).

2. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea* (21) *è un sottospazio affine di $C^n(A)$ di dimensione n, parallelo al sottospazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata* (22)*. In particolare se u_0 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea* (21) *ogni altra soluzione u di* (21) *si scrive nella forma*

$$u = u_0 + v$$

   con v soluzione dell'equazione omogenea associata.

Dimostrazione. Innanzitutto il teorema 9.22 di esistenza globale garantisce che le soluzioni delle equazioni (21) e (22) esistono e sono funzioni in $C^n(I)$. ***

Possiamo riscrivere l'equazione (21) nella forma

$$Lu = b$$

con

$$Lu = u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{(k)}$$

L'equazione omogenea (22) risulta quindi essere

$$Lu = 0.$$

Si osservi che $L\colon C^n(I) \to C^0(I)$ è un operatore lineare in quanto la somma, la derivata e la moltiplicazione per una funzione sono operatori lineari sullo spazio vettoriale delle funzioni. Dunque l'insieme V delle soluzioni dell'equazione omogenea non è altro che $\ker L$ che notoriamente è uno spazio vettoriale visto che se $L(u) = 0$ e $L(v) = 0$ allora anche $L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v) = 0$.

Possiamo ora determinare la dimensione di tale spazio, mettendo in corrispondenza le soluzioni dell'equazione con un loro dato iniziale, tramite l'applicazione $J(u)$ definita da (23). Chiaramente J è lineare perché l'operatore derivata e la valutazione in un punto sono operatori lineari. Osserviamo che J è suriettivo perché dato un qualunque $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ per il teorema 9.24 di esistenza (globale) di soluzioni per il problema di Cauchy di ordine n sappiamo esistere una soluzione $u \in V$ tale che $J(u) = \boldsymbol{y}$. Ma J è anche iniettivo perché se $u, v \in V$ sono due soluzioni con $J(u) = J(v)$ significa che u e v verificano lo stesso problema di Cauchy. Per l'unicità della soluzione risulta quindi $u = v$. Abbiamo quindi mostrato che $J \colon V \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, quindi $\dim V = n$.

Per quanto riguarda l'equazione non omogenea sia $W = \{v \in C^n(A) \colon Lv = b\}$ l'insieme di tutte le soluzioni. Se consideriamo una soluzione particolare $v_0 \in W$ e se $v \in W$ è una qualunque altra soluzione, si osserva che

$$L(v - v_0) = L(v) - L(v_0) = b - b = 0.$$

Significa che $u = v - v_0$ è soluzione dell'equazione omogenea associata: $u \in V = \ker L$. Dunque ogni soluzione v dell'equazione non omogenea si può scrivere nella forma $v = v_0 + u$ con v_0 soluzione particolare della non omogenea e u soluzione generale dell'equazione omogenea associata ovvero

$$W = v_0 + V.$$

□

Teorema 9.26 (maggiore regolarità delle soluzioni)**.** *Se $u(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale lineare* (21) *e se i coefficienti $a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sono funzioni di classe C^m per un certo $m \in \mathbb{N}$ allora la soluzione è di classe C^{m+n}. In particolare se i coefficienti sono di classe C^∞ le soluzioni sono anch'esse di classe C^∞.*

Dimostrazione. Se u è soluzione di (21) per definizione sappiamo che u è derivabile n volte nell'intervallo I su cui è definita. Se scriviamo l'equazione in forma normale:

$$u^{(n)}(x) = b(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x)$$

essendo $a_k \in C^0$ sappiamo che $u^{(n)}$ è continua dunque u è di classe C^n. Supponiamo ora che sia $u \in C^j$ per qualche $j \geq n$. I coefficienti dell'equazione sono di classe C^m e vengono moltiplicati per le derivate di u che sono almeno di classe C^{j-n+1}. Se $j - n + 1 \leq m$ allora il lato destro della precedente equazione è di classe $j - n + 1$. Dunque $u^{(n)} \in C^{j-n+1}$ da cui $u \in C^{j+1}$. Un passo alla volta è quindi possibile incrementare la regolarità di $u \in C^j$ finché $j - n + 1 \leq m$ cioè finché $j \leq m + n - 1$. A quel punto otteniamo $u \in C^{j+1} = C^{m+n}$.

Se i coefficienti sono di classe C^∞ il procedimento non termina mai e si ottiene dunque che anche u è di classe C^∞. □

9.7 EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE n A COEFFICIENTI COSTANTI

Una equazione differenziale ordinaria di ordine n a coefficienti costanti è una equazione del tipo: ***

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^{(k)}(x) = 0 \tag{24}$$

con $a_k \in \mathbb{R}$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che sia $a_n \neq 0$ cosicchè tale equazione può essere scritta in forma normale e rientra nella casistica generale che abbiamo considerato nel capitolo precedente. In particolare sappiamo che lo spazio delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione n. Osserviamo che il teorema di esistenza e unicità globale garantisce che le soluzioni dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti siano funzioni di classe C^n definite su tutto $\mathbb{R}$. Ma i coefficienti costanti sono di classe C^∞ dunque la maggiore regolarità delle soluzioni ci dice, in questo caso, che le soluzioni dovranno essere funzioni di classe C^∞.

Per motivi puramente algebrici sarà utile considerare le funzioni a valori complessi. Ricordiamo che se $u(x)$ è una funzione a valori complessi, allora si può scrivere $u(x) = f(x) + ig(x)$ con f e g funzioni a valori reali. Si definisce allora $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Denotiamo con $D\colon C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'operatore derivata: $Du = u'$.

Osserviamo esplicitamente che anche quando $\lambda \in \mathbb{C}$ risulta, come nel caso $\lambda \in \mathbb{R}$

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}. \tag{25}$$

Si potrebbe fare la verifica diretta riconducendosi alle funzioni sin e cos tramite le formule di Eulero ma questa è in realtà una proprietà fondamentale dell'esponenziale complesso che discende direttamente dal teorema 3.45:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\lambda(x+h)} - e^{\lambda x}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{\lambda x} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} = \lambda e^{\lambda x} \lim_{h\to 0} \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda h} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Se P è un polinomio di grado n:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

possiamo definire l'operatore $P(D)\colon C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ come

$$P(D)[u] = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k u = \sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)}$$

(utilizziamo le parentesi quadre per indicare, come convenzione, che la funzione è lineare in quell'argomento).

In particolare l'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti (24) si può scrivere più espressivamente nella forma

$$P(D)[u] = 0$$

Se l'equazione è in forma normale si avrà $\deg P = n$ (in quanto il coefficiente a_n del termine di grado massimo è 1 per le equazioni in forma normale).

Vogliamo ora mostrare come una decomposizione del polinomio porta ad una decomposizione delle soluzioni dell'equazione differenziale.

Nel seguente enunciato l'operazione $\circ$ rappresenta l'usuale composizione di funzioni, e il prodotto di polinomi è l'usuale prodotto di funzioni:

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)), \qquad (P \cdot Q)(z) = P(z) \cdot Q(z)$$

Teorema 9.27 (isomorfismo tra polinomi e operatori differenziali a coefficienti costanti)**.** *Siano P e Q due polinomi. Allora si ha*

$$(P \cdot Q)(D) = P(D) \circ Q(D) \tag{26}$$

cioè: l'operatore differenziale associato al prodotto dei polinomi è la composizione degli operatori lineari associati ai singoli fattori.

Dimostrazione. Il teorema potrebbe essere di immediata intuizione se si considerano i polinomi in senso astratto: non come funzioni ma come espressioni algebriche che agiscono su uno spazio di oggetti su cui sono definite le operazioni di somma e prodotto soddisfacenti le usuali proprietà distributiva, associativa e commutativa (tali spazi vengono chiamati *anelli*). Nel caso dell'operatore D la moltiplicazione è sostituita alla composizione ma preserva le stesse regole formali: $(a+b)D = aD + bD$ e $D^k D^j = D^{k+j} = D^j D^k$. Vediamo comunque una dimostrazione formale.

Dimostrare che vale (26) significa dimostrare che per ogni funzione $u \in C^\infty$ si ha

$$(P \cdot Q)(D)[u] = P(D)[Q(D)[u]].$$

Se

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad Q(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$$

si ha

$$(P \cdot Q)(z) = P(z) \cdot Q(z) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j z^j\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j z^{k+j}. \tag{27}$$

Analogamente si ha (sfruttando la linearità dell'operatore D^k)

$$P[Q(D)[u]] = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k \left(\sum_{j=0}^{m} b_j D^j u\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j D^{k+j} u. \tag{28}$$

Sia nella (27) che nella (28) posso raccogliere i termini con lo stesso esponente $k+j$ ed è evidente che si ottengono gli stessi cofficienti.

$$P[Q(D)[u]] = \sum_{l=0}^{m+n} c_l D^l u, \qquad (P\cdot Q)(z) = \sum_{l=0}^{m+n} c_k z^l$$

da cui $P[Q(D)[u]] = (P\cdot Q)(D)[u]$, come volevamo dimostare. □

***Osservazione* 9.28.** Il teorema precedente ci dice, in particolare, che gli operatori $P(D)$ e $Q(D)$ commutano in quanto $P(D)Q(D) = (P\cdot Q)(D) = (Q\cdot P)(D) = Q(D)P(D)$.

Teorema 9.29. *Sia P un polinomio e sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una radice di P con molteplicità m. Allora se $p(x)$ è un polinomio (a coefficienti complessi) di grado inferiore a m, la funzione $u(x) = p(x)e^{\lambda x}$ è soluzione (complessa) dell'equazione differenziale* ***

$$P(D)[u] = 0.$$

Dimostrazione. Se il polinomio $P(t)$ ha una radice λ con molteplicità m significa che $P(t)$ è divisibile per $(t-\lambda)^m$ cioè esiste un polinomio $R(t)$ tale che ***

$$P(t) = R(t)\cdot(t-\lambda)^m.$$

Ma allora, in base al teorema 9.27 possiamo decomporre anche l'equazione differenziale:

$$P(D)[u] = R(D)[(D-\lambda)^m u].$$

Se $u(x) = p(x)e^{\lambda x}$ si ha, utilizzando (25),

$$\begin{aligned}(D-\lambda)u(x) = Du(x) - \lambda u(x) &= p'(x)e^{\lambda x} + p(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda p(x)e^{\lambda x}\\ &= p'(x)e^{\lambda x},\end{aligned}$$

da cui

$$(D-\lambda)^m u(x) = p^{(m)}(x)e^{\lambda x}.$$

Visto che la derivata di un polinomio è un polinomio di grado inferiore, se il polinomio p ha grado inferiore a m risulta che $p^{(m)} = 0$. Dunque, come volevamo dimostrare,

$$P(D)[u] = R(D)[(D-\lambda)^m u] = R(D)[0] = 0.$$

□

Teorema 9.30 (indipendenza delle soluzioni fondamentali complesse). *Il sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dato dalle funzioni $u(x)$ della forma* ***

$$u(x) = x^m e^{\lambda x}$$

al variare di $m \in \mathbb{N}$, e $\lambda \in \mathbb{C}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sul campo $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che se una combinazione lineare finita di tali funzioni è identicamente nulla, allora tutti i coefficienti sono nulli.

Supponiamo per assurdo che esistano $u_1, \dots, u_N \in \mathcal{B}$

$$u_k(x) = x^{m_k} e^{\lambda_k x}, \qquad k = 1, \dots, N$$

tali che

$$\sum_{k=1}^{N} c_k x^{m_k} e^{\lambda_k x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

per una qualche scelta di coefficienti $c_k \in \mathbb{C}$ non tutti nulli. Sommando assieme i monomi che moltiplicano gli esponenziali con lo stesso coefficiente, potremo riscrivere la relazione precedente nella forma:

$$\sum_{j=1}^{M} P_j(x) e^{\lambda_j x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{29}$$

con i coefficienti λ_j tutti diversi tra loro e con P_j polinomi non nulli.

Abbiamo già osservato che $(D - \lambda)P(x)e^{\lambda x} = P'(x)e^{\lambda x}$ mentre se $\lambda \neq \mu$ si ha $(D - \lambda)P(x)e^{\mu x} = Q(x)e^{\mu x}$ con Q polinomio dello stesso grado di P. Posto $d_j = \deg P_j$ applichiamo all'equazione (29) l'operatore $(D - \lambda_1)^{d_1}$. Quello che si ottiene è:

$$k_1 e^{\lambda_1 x} + \sum_{j=2}^{M} Q_j(x) e^{\lambda_j x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{30}$$

dove k_1 è la derivata d_1-esima del polinomio P_1. Visto che P_1 è un polinomio di grado d_1 la sua derivata d_1-esima è un polinomio di grado 0 non nullo, dunque è una costante $k_1 \neq 0$. I polinomi Q_j hanno invece lo stesso grado dei P_j perché abbiamo visto che se $\lambda \neq \mu$ il grado del polinomio non cambia.

Ora applichiamo in sequenza all'equazione (30) gli operatori $(D - \lambda_j)^{d_j+1}$ per $j = 2, \dots, M$. Applicando tali operatori il coefficiente k_1 cambierà, ma rimarrà comunque diverso da zero (chiamiamolo $k \neq 0$) mentre tutti gli altri polinomi verranno annullati, perché i rispettivi polinomi vengono derivati una volta in più del loro grado. Si otterrà quindi:

$$k e^{\lambda_1 x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ma questo è assurdo perché per $x = 0$ si ottiene $k = 0$, che abbiamo escluso. □

I risultati precedenti ci permettono di determinare tutte le soluzioni reali delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti come nel seguente esempio.

***Esempio* 9.31.** Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$u^{(5)}(x) + 2u'''(x) + u'(x) = 0.$$

Svolgimento. L'equazione può essere scritta nella forma
$$P(D)[u] = 0$$
con $P(t) = t^5 + 2t^3 + t$. Possiamo fattorizzare il polinomio P nel campo complesso:
$$t^5 + 2t^3 + t = t(t^2 + 1)^2 = t(t + i)^2(t - i)^2.$$
Il polinomio ha una radice $\lambda_0 = 0$ con molteplicità uno e due radici complesse coniugate $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ con molteplicità due. Risulta quindi che le seguenti funzioni devono essere soluzione complesse dell'equazione:
$$1, \qquad e^{ix}, \qquad xe^{ix}, \qquad e^{-ix}, \qquad xe^{-ix}.$$
Per il teorema precedente sappiamo che queste funzioni sono indipendenti. Tramite la formula di Eulero possiamo scrivere:
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
da cui si ottiene che le funzioni
$$1, \qquad \cos x, \qquad x\cos x, \qquad \sin x, \qquad x\sin x \tag{31}$$
sono combinazioni lineari delle precedenti, e quindi anch'esse devono essere soluzioni dell'equazione. Inoltre anch'esse sono funzioni indipendenti in quanto il cambio di base dato dalle formule di Eulero è invertibile. Visto che queste funzioni sono 5 funzioni linearmente indipendenti, lo spazio generato ha dimensione 5, come l'ordine dell'equazione. Sappiamo però che anche lo spazio di tutte le soluzioni ha dimensione pari all'ordine dell'equazione, dunque lo spazio che abbiamo determinato esaurisce tutte le soluzioni. Ogni soluzione reale o complessa si potrà dunque scrivere nella forma:
$$u(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + c_4 x\cos x + c_5 x\sin x \tag{32}$$
con $c_1, c_2, \dots, c_5 \in \mathbb{C}$ opportuni coefficienti complessi.

Se i coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_5$ sono reali si otterranno certamente soluzioni reali ma è anche vero il viceversa: ogni soluzione reale si può scrivere nella forma (32) con coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_5$ reali. Infatti se prendiamo la parte immaginaria di (32) e poniamo $b_j = \operatorname{Im} c_j$ otteniamo:
$$0 = b_1 + b_2\cos x + \operatorname{Re} b_3\sin x + \operatorname{Re} b_4 x\cos x + b_5 x\sin x.$$
Visto che le funzioni scelte sono indipendenti, una combinazione lineare nulla ha tutti i coefficienti nulli: $b_j = 0$ e quindi i coefficienti c_j sono tutti reali. $\square$

Formalizzando in generale il metodo utilizzato nell'esercizio precedente possiamo dare il seguente enunciato.

** **Teorema 9.32** (soluzioni dell'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti)**.** *Se $P(t)$ è un polinomio a coefficienti reali. Ogni soluzione $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale*

$$P(D)[u] = 0$$

si scrive nella forma

$$u(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_k} c_{kj} x^j e^{\lambda_k x} + \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{m_l} x^j e^{\alpha_k x}(a_{kj} \cos(\beta_k x) + b_{kj} \sin(\beta_k x)) \quad (33)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sono le radici reali del polinomio $P(t)$, $n_1, \dots, n_N$ sono le rispettive molteplicità, $\alpha_k \pm i\beta_k$ sono le radici complesse coniugate (non reali) del polinomio P con $k = 1, \dots, M$ ognuna con molteplicità m_k e infine $c_{kj}, a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Dimostrazione. Sappiamo che le funzioni complesse

$$x^j e^{\lambda_k x}, \qquad x^j e^{(\alpha_k + i\beta_k)x} \quad (34)$$

sono soluzioni dell'equazione se j è inferiore alla molteplicità della corrispondente radice reale λ_k o complessa $\alpha_k + i\beta_k$. Dunque

$$u_{k,j}(x) = x^j e^{\lambda_k x}$$

è soluzione se $j < n_k$. Per le radici complesse applichiamo la formula di Eulero:

$$x^j e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x) = \frac{1}{2} x^j e^{(\alpha_k + i\beta_k)x} + \frac{1}{2} x^j e^{(\alpha_k - i\beta_k)x} \quad (35)$$

$$x^j e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x) = \frac{1}{2i} x^j e^{(\alpha_k + i\beta_k)x} - \frac{1}{2i} x^j e^{(\alpha_k - i\beta_k)x} \quad (36)$$

dunque anche le funzioni

$$v_{kj}(x) = x^j e^{\alpha_k x} \cos x, \qquad w_{kj}(x) = x^j e^{\alpha_k x} \sin x$$

essendo combinazione lineare di soluzioni, sono anch'esse soluzioni. Queste soluzioni sono inoltre indipendenti in quanto le funzioni in (34) lo sono (per il teorema precedente) e possono essere ricondotte alle (35) tramite la formula di Eulero.

Abbiamo dunque trovato un insieme formato da

$$n = \sum_{k=1}^{N} n_k + 2 \sum_{k=1}^{M} m_k$$

soluzioni reali indipendenti. Il numero n è pari alla somma delle molteplicità delle radici (reali e complesse) del polinomio P e dunque, per il teorema fondamentale dell'algebra, coincide con il grado di P. Sappiamo allora che lo spazio delle soluzioni di $P(D)[u] = 0$ ha dimensione n e quindi abbiamo trovato una base di tutte le soluzioni reali. Significa che ogni soluzione si scrive nella forma (33). □

***Osservazione* 9.33** *(fase delle soluzioni oscillanti).* Quando si vanno a scrivere le soluzioni nella forma (33) può essere utile osservare che ogni combinazione lineare di seni e coseni con la stessa pulsazione β è una singola onda eventualmente sfasata di un angolo θ:

$$a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x) = \rho\cos(\beta x - \theta)$$

dove $\rho = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta = \arg(a+ib)$. Infatti posto $a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\sin\theta$ si ha, grazie alla formula di addizione:

$$a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x) = \rho(\cos\theta\cos(\beta x) + \sin\theta\sin(\beta x)) = \rho\cos(\beta x - \theta).$$

Teorema 9.34 (metodo di similarità). *Consideriamo l'equazione non omogenea complessa* ***

$$P(D)[u] = q(x)e^{\lambda x}. \tag{37}$$

con P e q polinomi a coefficienti complessi. Sia m la molteplicità di λ come radice di P ($m = 0$ se λ non è radice di P). Allora una soluzione particolare di (37) *può essere scritta nella forma*

$$u(x) = p(x)x^m e^{\lambda x} \tag{38}$$

con p un polinomio (incognito) di grado uguale al grado di q.

Dimostrazione. Se $u(x) = x^m p(x)e^{\lambda x}$ vogliamo capire come agisce l'operatore $P(D)$ su u, in particolare dato un qualunque polinomio q vogliamo capire se esiste un polinomio p, dello stesso grado di q, tale che applicando $P(D)$ ad $u(x)$ si ottiene $q(x)e^{\lambda x}$.

Fattorizziamo il polinomio $P(z)$:

$$P(z) = (z-\lambda_1)^{m_1}\dots(z-\lambda_n)^{m_n}$$

dove $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ sono le radici distinte di $P(z)$ e $m_1,\dots,m_n \in \mathbb{N}$ sono le relative molteplicità. Dunque l'operatore $P(D)$ può essere fattorizzato nella forma corrispondente:

$$P(D) = (D-\lambda_1)^{m_1}\dots(D-\lambda_n)^{m_n}.$$

Chiamiamo V_m^n lo spazio vettoriale dei polinomi della forma $x^m p(x)$ con $\deg p < n$. Una base di V_m^n sono i monomi $x^m, x^{m+1}, \dots, x^{m+n}$ e dunque V_m^n è uno spazio vettoriale di dimensione n.

La dimostrazione del teorema si basa sull'ossevazione di come agisce l'operatore $(D-\lambda_k)^{m_k}$ sulle funzioni del tipo $u(x) = p(x)e^{\lambda x}$ con $p \in V_m^n$. In generale se p è un polinomio si ha

$$(D-\lambda_k)(p(x)e^{\lambda x}) = \big[(\lambda-\lambda_k)p(x) + p'(x)\big]e^{\lambda x}.$$

Dobbiamo allora distinguere due casi. Se $\lambda \neq \lambda_k$ allora la funzione $p(x)e^{\lambda x}$ viene trasformata nella funzione $q(x)e^{\lambda x}$ dove q è un polinomio dello stesso grado di p, in quanto il termine di grado massimo di p viene moltiplicato per $\lambda - \lambda_k$ mentre il polinomio p' ha il grado inferiore al grado di p e quindi non influenza il termine di grado massimo. Se chiamiamo $T_k \colon V_0^n \to V_0^n$ l'operatore lineare che manda il polinomio $p(x)$ nel polinomio $q(x) = (\lambda - \lambda_k)p(x) + p'(x)$ osserviamo che T_k è iniettivo in quanto, visto che T_k preserva il grado del polinomio, l'unico polinomio che può andare a zero è il polinomio nullo. Dunque, per il teorema del rango, T_k è bigettivo e di conseguenza $T_k^{m_k} \colon V_0^n \to V_0^n$ è bigettivo.

Se invece $\lambda = \lambda_k$ osserviamo ora che l'operatore T_k non è altro che la derivata $q(x) = p'(x)$. E se $m = m_k$ è la molteplicità di λ come radice di P, l'operatore $T_k^{m_k}$ non è altro che la derivata m-esima. Tale operatore non è invertibile su V_0^n in quanto manda a zero tutti i polinomi di grado inferiore a m. Ma se partiamo da un polinomio in V_m^n allora l'operatore $T_k^m \colon V_m^n \to V_0^n$ diventa invertibile: infatti in V_m^n ci sono polinomi della forma $a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_{n+m}x^{n+m}$ e facendone la derivata m-esima si può ottenere il polinomio nullo solamente se tutti i coefficienti sono nulli. Risulta quindi che, se $\lambda = \lambda_k$, l'operatore $T_k^m \colon V_m^n \to V_0^n$ è invertibile.

Siamo arrivati alla conclusione. Se prendiamo un polinomio $p(x)$ in V_m^n e applichiamo $P(D)$ alla corrispondente funzione $u(x) = p(x)e^{\lambda x}$ possiamo applicare sequenzialmente gli operatori $(D - \lambda_k)^{m_k}$. Questi agiscono sulla funzione u modificando il polinomio p. Se λ è radice di P al primo passaggio applichiamo l'operatore $(D - \lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda_k = \lambda$ e $m_k = m$ cosicché il polinomio $p \in V_m^n$ viene trasformato, in maniera biunivoca, in un polinomio di V_0^n. Dopodiché applico tutti gli altri operatori $(D - \lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda_k \neq \lambda$ trasformando il polinomio di V_0^n in un altro polinomio di V_0^n ma sempre in maniera biunivoca. Ne risulta che alla fine ottengo una mappa biunivoca tra $V_m^n \to V_0^n$ e qualunque sia $q \in V_0^n$ sappiamo esister un $u \in V_m^n$ che viene mandato in q. $\square$

***Osservazione* 9.35.** Si noti che nella dimostrazione precedente abbiamo investigato la struttura degli operatori differenziali $P(D)$ a coefficienti costanti. Quello che abbiamo fatto è in realtà il processo di decomposizione di Jordan di un operatore lineare. L'operatore $P(D)$ ha come autovettori le funzioni $e^{\lambda_k x}$ con λ_k radici del polinomio P. Si osserva però che le funzioni della forma $x^j e^{\lambda_k x}$ sono *autovettori generalizzati* in quanto iterando l'operatore $P(D)$ vengono mandati in un autovettore e sono quindi una base dell'autospazio relativo all'autovettore λ_k.

La base formata dalle funzione della forma $\frac{x^j}{j!}e^{\lambda_j x}$ è una *base a ventaglio* e la matrice che rappresenta l'operatore $P(D)$ risulta essere una matrice a blocchi nella forma di Jordan: gli autovalori stanno sulla diagonale e una fila di 1 si trova al di sopra della diagonale.

Definizione 9.36 (wronksiano)**.** *Siano $u_1, \dots, u_n$ funzioni di classe C^{n-1}. La matrice*

$$W(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{39}$$

matrice e determinante wronksiano

è chiamata matrice wronksiana. *Il determinante di tale matrice $w(x) = \det W(x)$ è chiamato* determinante wronksiano.

Teorema 9.37. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto non vuoto e siano $a_j \in C^0(I, \mathbb{C})$. Siano $u_1, \dots, u_n$ funzioni di classe C^n soluzioni dell'equazione lineare omogenea in forma normale:*

$$u^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) u^{(j-1)}(x). \tag{40}$$

Sia $W(x)$ la matrice wronksiana (39)*. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *le funzioni $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti;*

2. *per ogni $x \in I$ si ha $\det W(x) \neq 0$;*

3. *esiste $x \in I$ tale che $\det W(x) \neq 0$.*

Dimostrazione. Ovviamente 2 implica 3.

Dimostriamo che 3 implica 1. Passando alla implicazione contropositiva dobbiamo mostrare che se $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente dipendenti allora per ogni $x \in I$ si ha $\det W(x) = 0$. Ma se le funzioni sono dipendenti significa che esiste $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ tale che

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k(x) = 0 \qquad \forall x \in I. \tag{41}$$

Derivando si ottiene, per ogni $j = 0, \dots, n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k^{(j)}(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

e quindi

$$W(x)\,\boldsymbol{\lambda} = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Ma allora la matrice $W(x)$ non è invertibile e quindi $\det W(x) = 0$, come volevamo dimostrare.

Dimostriamo infine che 1 implica 2 cioè che se $v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti allora $\det W(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Fissato $x \in I$ consideriamo il funzionale $J(v) = (v(x), v'(x), \dots, v^{(n-1)}(x))$ cosicché si ha

$$W(x) = (J(u_1), \dots, J(u_n)).$$

In base al teorema 9.25 ci ricordiamo che J risulta essere un isomorfismo di spazi vettoriali, dunque se $v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti anche $J(v_1), \dots, J(v_n)$ dovranno essere indipendenti. Ma visto che le colonne della matrice $W(x)$ sono indipendenti significa che $\det W(x) \neq 0$, come volevamo dimostrare. □

*** **Teorema 9.38** (metodo della variazione delle costanti arbitrarie). *Si consideri una generica equazione differenziale lineare non omogenea di ordine n in forma normale:*

$$u^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x) + b(x) \tag{42}$$

dove $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in C^0(A, \mathbb{C})$ sono funzioni definite su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ e si cerca una soluzione $u \in C^n(A, \mathbb{C})$.

Se $v_1, \dots, v_n \in C^n(A, \mathbb{C})$ sono soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata:

$$u^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) u^{(k)}(x)$$

allora esistono delle funzioni $c_k \in C^1(A, \mathbb{C})$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$ tali che

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n c_k'(x) v_k(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^n c_k'(x) v_k'(x) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n c_k'(x) v_k^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^n c_k'(x) v_k^{(n-1)}(x) = b(x). \end{cases} \tag{43}$$

E in tal caso la funzione

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) v_k(x)$$

risolve l'equazione non omogenea (42).

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se esistono le funzioni c_k che soddisfano il sistema (43) allora la funzione $u = c_1 \cdot v_1 + \dots + c_n \cdot v_n$ risolve l'equazione non omogenea. Infatti dalla formula di derivazione del prodotto si ha:

$$u' = \sum_{k=1}^n c_k v_k' + \sum_{k=1}^n c_k' v_k = \sum_{k=1}^n c_k v_k'$$

essendo il secondo addendo nullo per ipotesi (43). Ma allora si può proseguire con le derivate:

$$u'' = \sum_{k=1}^n c_k v_k'' + \sum_{k=1}^n c_k' v_k = \sum_{k=1}^n c_k v_k''$$

fino alla derivata $(n-1)$-esima:

$$u^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k^{(n-1)}.$$

Per l'ultima derivata si ha infine:

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} c_k' v_k^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k^{(n)} + b.$$

Ma allora si osserva che si ha

$$\begin{aligned} u^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n} c_k v_k^{(n)} + b + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{k=1}^{n} c_k v_k^{(j)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \left[v_k^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j v_k^{(j)} \right] + b = b \end{aligned}$$

in quanto le funzioni v_j, per ipotesi, risolvono l'equazione omogenea.

Rimane quindi solo da verificare che esistono funzioni $c_k \in C^1(A, \mathbb{C})$ che soddisfano il sistema (43). Si osserva che l'equazione (43) si scrive nella forma

$$W(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$$

dove $W(x)$ è la matrice wronksiana $W(x)$ associata alle alle soluzioni $v_1, \dots, v_n$, $\boldsymbol{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ e $\boldsymbol{b}(x) = (0, \dots, 0, b(x))$. Siccome $v_1, \dots, v_n$ per ipotesi sono indipendenti, per il teorema 9.37 sappiamo che $\det W(x) \neq 0$ per ogni x e quindi il sistema $W(x)\boldsymbol{d}(x) = \boldsymbol{b}(x)$ ammette una unica soluzione $d(x)$ per ogni $x \in I$. Visto che $W(x)$ e $\boldsymbol{b}(x)$ hanno coefficienti continui, anche la soluzione $\boldsymbol{d}(x) = W(x)^{-1}\boldsymbol{b}(x)$ dovrà essere continua (che i coefficienti della matrice $W(x)^{-1}$ siano continui lo si vede ad esempio scrivendo $W(x)^{-1}$ tramite la matrice dei cofattori e sfruttando il fatto che il determinante è una funzione continua) e quindi, fissato un punto $x_0 \in I$, potremo definire

$$c_k(x) = \int_{x_0}^{x} d_k(t)\, dt$$

per determinare le funzioni c_k. □

9.8 SISTEMI LINEARI

Per concludere il capitolo sulle equazioni differenziali consideriamo il più semplice caso di sistemi di equazioni differenziali ovvero il caso di sistemi del primo ordine di due equazioni differenziali lineari, omogenee, a coefficienti costanti.

Un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti del primo ordine si scrive in generale nella forma:

$$\boldsymbol{u}'(x) = A\boldsymbol{u}(x)$$

dove A è una matrice $n \times n$ costante e la funzione vettoriale incognita sarà $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Come per i sistemi lineari algebrici sarà utile, se possibile, cercare un sistema di riferimento in cui la matrice A risulti essere diagonale. Se facciamo il cambio di variabile

$$\boldsymbol{u} = M\boldsymbol{v}$$

tramite una matrice invertibile M, si ottiene $\boldsymbol{u}' = (M\boldsymbol{v})' = M\boldsymbol{v}'$ (si faccia la verifica!... stiamo supponendo che M sia una matrice costante) e dunque il sistema lineare diventa:

$$M\boldsymbol{v}' = AM\boldsymbol{v}$$

ovvero

$$\boldsymbol{v}' = M^{-1}AM\boldsymbol{v}.$$

A meno di un cambio di variabili potremo quindi sostituire la matrice A con una qualunque matrice simile ad essa: $M^{-1}AM$. In particolare se la matrice A è diagonalizzabile (ad esempio se gli autovalori di A sono tutti reali e distinti) potremo ricondurci a un sistema diagonale:

$$\begin{cases} v_1' = \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ v_n' = \lambda_n v_n \end{cases}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice A. La matrice M del cambio di base avrà come vettori colonna gli autovettori della matrice A, che quindi rappresentano la nuova base. A questo punto abbiamo n equazioni indipendenti che possono essere risolte senza difficoltà:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= c_1 e^{\lambda_1 x} \\ v_2(x) &= c_2 e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ v_n(x) &= c_n e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

con $c_1, \dots, c_n$ costanti arbitrarie.

Se la matrice A non è diagonalizzabile sul campo reale è possibile che risulti diagonalizzabile nel campo complesso. Più in generale la matrice potrà essere portata in forma di Jordan. Per brevità non cercheremo di trattare il caso generale, ma ci concentreremo sul caso $n = 2$ che contiene comunque una casistica piuttosto ampia.

9.8.1 *sistemi* 2×2

Nel caso $n = 2$ sarà comodo usare t come variabile indipendente (al posto di x) e chiamare $x(t)$ e $y(t)$ le due coordinate della funzione vettoriale incognita. Il sistema che vogliamo trattare sarà quindi della forma:

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \\ y'(t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t). \end{cases}$$

dove a, b, c, d sono i coefficienti costanti (reali) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Vedremo che il comportamento del sistema potrà essere classificato in base agli autovalori della matrice. Siano λ e μ gli autovalori (eventualmente complessi) della matrice A cioè gli zeri del polinomio caratteristico:

$$P(z) = \det(A - zI) = z^2 - (a+d)z + ad - bc.$$

Se gli autovalori sono reali e distinti la matrice è diagonalizzabile, se $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ sono gli autovettori corrispondeti agli autovettori λ, μ, si potrà quindi fare il cambio di variabile

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\boldsymbol{v} + Y\boldsymbol{w}$$

tramite il quale le equazioni si separano:

$$\begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \mu Y \end{cases}$$

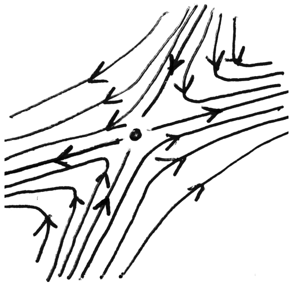
da cui si ottiene $X = ae^{\lambda t}$, $Y = be^{\mu t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.

Visto che le equazioni a coefficienti costanti sono autonome sappiamo che una traslazione temporale di una soluzione rimane una soluzione. Infatti si osserva che

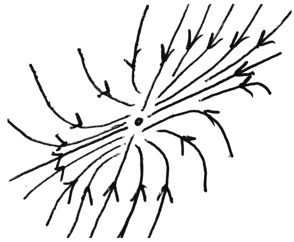
$$\begin{cases} X(t+c) = ae^{\lambda(t+c)} = ae^{\lambda c}e^{\lambda t}, \\ Y(t+c) = be^{\mu(t+c)} = be^{\mu c}e^{\mu t}. \end{cases}$$

Questo ci permette di disegnare le traiettorie delle soluzioni nel piano (x, y). Su tale piano le traslazioni temporali di una soluzione si rappresentano sulla stessa traiettoria. Traiettorie diverse non potranno invece mai incontrarsi per l'unicità della soluzione.

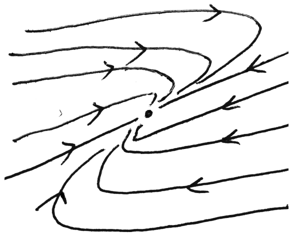
Se $a = b = 0$ si ottiene la soluzione nulla $X = 0$, $Y = 0$ che, nel piano delle fasi, si rappresenta con un singolo punto nell'origine. Se $b = 0$ le soluzioni sono della forma $X = ae^{\lambda t}$, $Y = 0$ che ha una traiettoria, nel piano xy lungo la semiretta uscente dall'origine con direzione $\boldsymbol{v}$ se $a > 0$



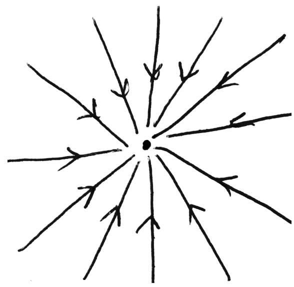
(a) sella (instabile)



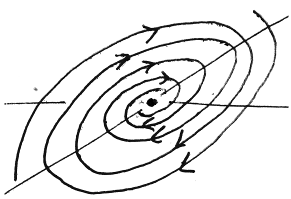
(b) nodo stabile



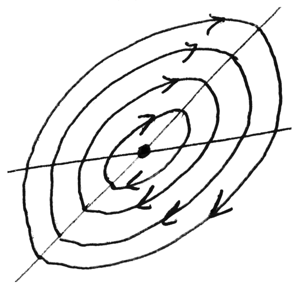
(c) nodo improprio stabile



(d) stella stabile



(e) fuoco stabile



(f) centro (stabile)

e con direzione $-\boldsymbol{v}$ se $a < 0$. La soluzione andrà verso 0 (all'aumentare di t) se $\lambda < 0$ e sarà invece uscente da 0 se $\lambda > 0$. Analogamente si ha una traiettoria sulle due semirette con direzione $\boldsymbol{w}$ e $-\boldsymbol{w}$ quando $a = 0$ e $b \neq 0$.

Se entrambi a e b sono non nulli potremo trovare l'equazione della traiettoria eliminando la variabile t nelle equazioni che rappresentano la soluzione. Se $X = ae^{\lambda t}$, $Y = be^{\mu t}$ risulta

$$\frac{|b|^{\lambda}|X|^{\mu}}{|a|^{\mu}|Y|^{\lambda}} = \frac{e^{\lambda t \mu}}{e^{\mu t \lambda}} = 1$$

da cui

$$Y = k|X|^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

con k costante arbitraria.

Se i segni di λ e μ sono opposti, si ottiene una configurazione chiamata *sella* (si veda figura). Lungo l'autovettore con autovalore negati- sella vo ci sarà convergenza verso l'origine, ma questa convergenza è instabile in quanto ogni altra curva tenderà invece a essere deviata e a tendere asintoticamente verso la direzione dell'autovettore con autovalore positivo.

nodo stabile

Se λ e μ sono entrambi negativi si ha un *nodo stabile* in cui tutte le curve convergono verso l'origine (soluzione attrattiva). Se invece λ e μ sono entrambi positivi le curve saranno percorse in senso inverso e saranno uscenti dall'origine: si avrà allora un *nodo instabile*.

nodo instabile

Se gli autovalori sono coincidenti $\lambda = \mu$ e se la matrice è diagonalizzabile allora la matrice è diagonale, tutti i vettori sono autovettori quindi in ogni direzione c'è una traiettoria rettilinea. La configurazione si chiama *stella* (stabile o instabile a seconda del segno negativo o positivo).

stella

Se gli autovalori sono coincidenti $\lambda = \mu$ e la matrice non è diagonalizzabile consideriamo l'autovettore (unico) $\boldsymbol{u}$ con $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ e prendiamo un qualunque vettore $\boldsymbol{w}$ indipendente da $\boldsymbol{u}$. Allora si avrà

$$A\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{w}.$$

Certamente $\alpha \neq 0$ altrimenti $\boldsymbol{w}$ sarebbe un autovettore e la matrice sarebbe diagonalizzabile. Consideriamo allora $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}/\alpha$ cosicché si ha $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{w}$. Nella base $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ la matrice A diventa triangolare, e sulla diagonale troviamo i valori λ e $\frac{\beta}{\alpha}$. Ma allora $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ in quanto sulla diagonale abbiamo solo gli autovalori. Dunque se X, Y sono le coordinate nel sistema $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, il sistema di equazioni diventa:

$$\begin{cases} X' = \lambda X + Y \\ Y' = \lambda Y. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene quindi $Y = ae^{\lambda t}$ con $a \in \mathbb{R}$ costante arbitraria e sostituendo nella prima si ottiene l'equazione

$$X' - \lambda X = ae^{\lambda t}$$

che può essere risolta trovando una seconda costante arbitraria $b \in \mathbb{R}$ e

$$X = (at + b)e^{\lambda t}.$$

Se $a = 0$ una traiettoria con $Y = 0$ cioè nella direzione dell'unico autovettore. Se $\lambda < 0$ tale traiettoria sarà convergente a 0 altrimenti sarà divergente. Se $a \neq 0$ possiamo eliminare t ponendo:

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{Y}{a}$$

e quindi

$$X = \left(\frac{a}{\lambda} \ln \frac{Y}{a} + b \right) \frac{Y}{a} = \frac{Y}{\lambda} \ln \frac{Y}{a} + \frac{b}{a} Y.$$

Studiando il grafico di questa funzione si ottengono qualitativamente le curve disegnate in figura: la configurazione si chiama *nodo improprio*.

nodo improprio

Come per i nodi le traiettorie convergono all'origine se $\lambda < 0$ e divergono se $\lambda > 0$.

Proviamo a trattare il caso, più interessante, degli autovalori complessi. Se la matrice è a coefficienti reali gli autovalori, quando non reali, saranno certamente complessi coniugati:

$$\lambda = \alpha - i\beta, \qquad \mu = \alpha + i\beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Sia $\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$ un autovettore complesso relativo all'autovalore $\alpha - i\beta$. Allora si ha

$$A\boldsymbol{v} + iA\boldsymbol{w} = A(\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}) = (\alpha - i\beta)(\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}) = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w} + i(-\beta\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w}).$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria si trova

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}, \qquad A\boldsymbol{w} = -\beta\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{w}.$$

A questo punto non è difficile verificare che $\boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}$ è un autovettore relativo all'autovalore coniugato $\alpha + i\beta$. Visto che $\boldsymbol{v} \pm i\boldsymbol{w}$ sono due autovettori con autovalori distinti sicuramente sono vettori indipendenti. Dunque anche $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ (che si ottengono come multipli di somma e differenza) sono vettori, stavolta reali indipendenti. Se X, Y sono le coordinate nella base $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, l'equazione differenziale diventa:

$$\begin{cases} X' = \alpha X - \beta Y \\ Y' = \beta X + \alpha Y. \end{cases}$$

Si ha allora[1]

$$X'' = \alpha X' - \beta Y' = \alpha X' - \beta(\beta X + \alpha Y)$$

da cui, usando $\beta Y = \alpha X - X'$ possiamo eliminare la variabile Y e ottenere una equazione del secondo ordine in X:

$$X'' = \alpha X' - \beta^2 X - \alpha(\alpha X - X') = 2\alpha X' - (\alpha^2 + \beta^2)X$$

ovvero

$$X'' - 2\alpha X' + (\alpha^2 + \beta^2)X = 0.$$

Risolvendo questa equazione del secondo ordine ci si accorge che le radici del polinomio caratteristico sono proprio $\alpha \pm i\beta$ e quindi le soluzioni si scrivono nella forma

$$X = e^{\alpha t}(a \cos \beta t + b \sin \beta t)$$

1 Si potrebbe osservare che la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ è la matrice che rappresenta la moltiplicazione complessa per il numero $\alpha + i\beta$. Dunque chiamando $Z = X + iY$ il sistema si potrebbe scrivere nella forma $Z' = (\alpha + i\beta)Z$ e si potrebbe quindi osservare immediatamente che la soluzione deve essere della forma $Z = ce^{(\alpha+i\beta)t}$ con c costante complessa. Ponendo poi $c = \rho e^{i\theta}$ si ottiene il risultato.

da cui

$$\begin{aligned}\beta Y &= \alpha X - X' \\ &= \alpha e^{\alpha t}(a\cos\beta t + b\sin\beta t) \\ &\quad - \alpha e^{\alpha t}(a\cos\beta t + b\sin\beta t) - e^{\alpha t}(-\beta a\sin\beta t + b\beta\cos\beta t) \\ &= \beta e^{\alpha t}(a\sin\beta t - b\cos\beta t).\end{aligned}$$

Dunque, ponendo $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e scegliendo θ tale che $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $\sin\theta = -\frac{b}{\rho}$, si ha

$$\begin{cases} X = \rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta), \\ Y = \rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta). \end{cases}$$

Se $\alpha \neq 0$ le traiettorie corrispondenti formano delle spirali ellittiche che si avvitano nella direzione che porta il vettore $\boldsymbol{v}$ verso il vettore $\boldsymbol{w}$. Se $\alpha < 0$ le spirali convergono verso l'origine del sistema: avremo un *fuoco stabile*. Se $\alpha > 0$ le orbite divergono chiameremo la configurazione un *fuoco instabile*. Se $\alpha = 0$ le traiettorie sono delle ellissi concentriche, le soluzioni sono quindi periodiche e la configurazione si chiama *centro*.

fuoco stabile
fuoco instabile
centro

Se almeno uno dei due autovalori è nullo il comportamento del sistema è degenere, si hanno delle soluzioni banali che non andremo a investigare.

9.8.2 *matrice esponenziale*

Per risolvere, in astratto, il sistema $n \times n$

$$\boldsymbol{u}' = A\boldsymbol{u}$$

introduciamo le seguenti nozioni.

Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Definiamo la norma (norma operatoriale) di A come segue:

$$\|A\| = \sup_{|\boldsymbol{v}|\leq 1} |A\boldsymbol{v}|$$

dove $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$ è l'usuale norma del vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Osserviamo che $\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ è una funzione continua e che $\{\boldsymbol{v} \colon |\boldsymbol{v}| \leq 1\}$ è un insieme compatto, dunque il sup nella definizione è in realtà un max.

Per le proprietà del sup si ha:

$$|A\boldsymbol{v}| \leq \|A\|\,|v| \qquad \text{e} \qquad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

Dunque possiamo affermare il valore assoluto di ogni elemento di una matrice si stima con la norma della matrice: $|A_{ij}| \leq \|A\|$, infatti:

$$|A_{ij}| = |(A\boldsymbol{e}_j)_i| \leq |Ae_j| \leq \|A\|$$

(dove $\boldsymbol{e}_j$ è il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$).

Se A_k è una successione di matrici, diremo che $A_k \to A$ se ogni elemento della matrice A_k converge al corrispondente elemento della matrice A: $(A_k)_{ij} \to A_{ij}$. Questo corrisponde a considerare la matrice $n \times n$ come un vettore dello spazio $\mathbb{R}^{(n^2)}$.

Se $A(t)$ è una funzione a valori matrici (ovvero una matrice i cui elementi sono funzioni di t), si potrà farne la derivata come si fa per le funzioni vettoriali: $(A'(t))_{ij} = (A_{ij}(t))'$ cioè componente per componente. Le usuali regole per le derivate valgono anche per le matrici, in particolare non è difficile verificare (si espliciti la definizione del prodotto di matrici) che

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

dove, puntualizziamo, è importante mantenere i prodotti nell'ordine giusto, in quanto il prodotto di matrici può non essere commutativo.

Se A è una matrice quadrata, si definisce la matrice potenza A^k per ogni k naturale, mediante le proprietà

$$A^0 = I, \qquad A^{k+1} = A^k A.$$

(se A è invertibile si possono definire anche le potenze negative $A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$).

Definiamo allora la matrice esponenziale di A:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Per dare significato a questa definizione dobbiamo verificare che la serie appena scritta sia convergente. Cioè dobbiamo verificare che per ogni coppia di indici ij sia convergente la serie numerica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij}}{k!}.$$

Per quanto detto prima sappiamo che $\left|(A^k)_{ij}\right| \le \left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$. Dunque la serie in questione è assolutamente convergente in quanto il suo valore assoluto si stima con la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$$

che è convergente. La definizione della matrice e^A è dunque ben posta e si ha

$$\left\|e^A\right\| \le e^{\|A\|}.$$

Teorema 9.39 (proprietà dell'esponenziale matrice)**.** *Siano A e B matrici quadrate $n \times n$ e t uno scalare. Valgono le seguenti proprietà:*

1. *$e^0 = I$ (dove 0 è la matrice nulla $n \times n$ ed I è la matrice identità con le stesse dimensioni);*
2. *se $AB = BA$ allora $e^A B = Be^A$;*
3. *$(e^{tA})' = Ae^{tA}$;*
4. *$e^{-A} = (e^A)^{-1}$ (in particolare la matrice esponenziale è sempre invertibile);*
5. *se $\boldsymbol{u}(t)$ è una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ che soddisfa l'equazione differenziale $\boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{u}(t)$ allora $\boldsymbol{u}(t) = e^{tA}\boldsymbol{u}(0)$;*
6. *se $AB = BA$ allora $e^{A+B} = e^A e^B$;*
7. *se A è invertibile allora $e^{ABA^{-1}} = Ae^B A^{-1}$;*
8. *se A è la matrice diagonale $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, allora e^A è pure una matrice diagonale con $e^A = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$;*
9. *se A è una matrice triangolare con la diagonale nulla (cioè $A_{ij} = 0$ se $i \geq j$) allora $e^A = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$ (basta sommare i primi $n+1$ termini);*
10. *se B è una matrice triangolare (cioè $B_{ij} = 0$ se $i > j$) allora $B = D + A$ con D matrice diagonale e A matrice triangolare con la diagonale nulla e quindi $e^B = e^D e^A$ si può calcolare riconducendosi ai punti precedenti.*

Dimostrazione. 1. Per quanto riguarda e^0 osserviamo che per definizione $0^0 = I$ mentre $0^k = 0$ se $k > 0$. Dunque direttamente dalla definizione si ottiene $e^0 = I$.

2. Se $AB = BA$ osserviamo che si ha anche $A^k B = BA^k$ (la matrice B commuta con ogni fattore del prodotto A^k). Dunque:

$$\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} B = B \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}$$

e passando al limite $N \to \infty$ si ottiene $e^A B = Be^A$.

3. Per calcolare la derivata di e^{tA} vogliamo dimostrare che la serie che definisce e^{tA} converge totalmente quando t varia in un qualunque intervallo limitato. Poniamo allora $t \in [-M, M]$. Si ha:

$$\sup_{t \in [-M,M]} \frac{\left\| (tA)^k \right\|}{k!} = \sup_{t \in [-M,M]} \frac{|t|^k \left\| A^k \right\|}{k!} \leq \frac{M^k \|A\|^k}{k!}$$

la cui serie è convergente qualunque sia $M \in \mathbb{R}$. Dunque la serie che definisce e^{tA} è una serie di funzioni continue e derivabili che converge totalmente su ogni intervallo limitato. Possiamo quindi derivare la serie termine a termine:

$$(e^{tA})' = \sum_{k=0}^\infty \frac{((tA)^k)'}{k!} = \sum_{k=1}^\infty \frac{kt^{k-1}A^k}{k!} = A \sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{tA}.$$

4. Dimostriamo ora che $U(t) = e^{tA}e^{-tA} = I$ per ogni t. Si ha:

$$U'(t) = Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-A)e^{-tA} = Ae^{tA}e^{-tA} - Ae^{tA}e^{-tA} = 0$$

($Ae^{tA} = e^{tA}A$ in quanto A e tA commutano). Dunque $U'(t) = 0$ cioè $U(t)$ è costante ovvero $U(t) = U(0)$. Ma $U(0) = I$ in quanto $e^0 = I$ e quindi $U(t) = I$ per ogni t.

5. Prendiamo l'equazione $\boldsymbol{u}' = A\boldsymbol{u}$, moltiplicando a sinistra per e^{-tA} l'equazione diventa $e^{-tA}\boldsymbol{u}' - e^{-tA}A\boldsymbol{u} = 0$ cioè $(e^{-tA}\boldsymbol{u})' = 0$. Questo significa che la funzione $e^{-tA}\boldsymbol{u} = c$ costante e moltiplicando a sinistra per e^{tA} si ottiene dunque $\boldsymbol{u} = e^{tA}c$ come volevasi dimostrare.

6. Per dimostrare la proprietà $e^{A+B} = e^A e^B$ consideriamo la quantità $U(t) = e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB}$. Se dimostriamo che U è costante, visto che $\boldsymbol{u}(0) = I$ si avrà anche $U(1) = I$ che è equivalente a quanto vogliamo dimostrare. Dunque verifichiamo che la derivata è nulla, sfruttando l'ipotesi $AB = BA$ che ci permette di far commutare i prodotti:

$$\begin{aligned} U'(t) &= -(A+B)e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB} + e^{-t(A+B)}Ae^{tA}e^{tB} + e^{-t(A+B)}e^{tA}Be^{tB} \\ &= [-(A+B) + A + B]U(t) = 0. \end{aligned}$$

7. Se A è invertibile allora $(ABA^{-1})^k = ABA^{-1}ABA\dots ABA^{-1} = AB^kA^{-1}$. Dunque nelle somme parziali della serie che definisce l'esponenziale $e^{ABA^{-1}}$ si può raccogliere A a sinistra e A^{-1} a destra e al centro rimane la serie che definisce e^B.

8. Se la matrice A è diagonale con $A_{ii} = \lambda_i$ allora A^k risulta essere una matrice diagonale con $(A^k)_{ii} = \lambda_i^k$. Dunque nella definizione di esponenziale e^A i termini della serie sono tutte matrici diagonali, e sulla diagonale compare la serie che definisce l'esponenziale e^{λ_i}.

9. Se A è una matrice triangolare con $A_{ij} = 0$ quando $i \geq j$, si osserva che A^2 avrà degli zeri anche sopra la diagonale: $(A^2)_{ij} = 0$ quando $i + 1 \geq j$ (si applichi la definizione di prodotto, riga per colonna). Nelle moltiplicazioni successive $A^3, A^4, \dots$ si aggiungerà sempre una diagonale di zeri finché la matrice non si annulla completamente $A^n = 0$. Dunque la serie che definisce e^A contiene solo un numero finito di termini (i primi $n+1$) e può essere calcolata esplicitamente.

10. L'ultima proprietà è una osservazione che non richiede dimostrazione. $\square$

LISTATI

Il seguente codice è scritto in *python*, un linguaggio di programmazione molto semplice e pulito che permette, tra l'altro, di utilizzare diverse librerie utili per il calcolo numerico e scientifico.

python

1 SERIES.PY

Vedi esempio 3.11.

github

```
"""
Compute the sum of the series: 1/k^2 up to
a given error
"""

err = 0.5E-6 # error below the sixth decimal place
S = 0.0
k = 1
while k < 1/err:
  S += 1.0/k**2
  k += 1
print("somma della serie 1/k^2: {:.7}".format(S))
```

2 BISECTION.PY

Vedi esempio 2.52.

github

```
def bisection(f, a, b, digits=7):
    fa = f(a)
    fb = f(b)
    assert fb*fa <= 0
    while 2 * 10**digits * (b-a) > 1:
        c = (a+b)/2
        fc = f(c)
        if fc*fa < 0:
            b = c
            fb = fc
        else:
            a = c
            fa = fc
```

```
    return (a+b)/2

# la libreria decimal ci permette di effettuare calcoli su numeri
# con sviluppo decimale arbitrariamente lungo
from decimal import Decimal, getcontext
getcontext().prec = 1100  # numero di cifre da utilizzare nei calcoli

def x2_minus_2(x):
    return x*x - 2

x = bisection(x2_minus_2, Decimal(0), Decimal(2), digits=1100)
print("solution to x^2 = 2: {:.1001}".format(x))

def x5_minus_x_minus_1(x):
    return x*x*x*x*x - x - 1

x = bisection(x5_minus_x_minus_1, Decimal(0), Decimal(2), digits=110)
print("solution to x^5 - x = 1: {:.100}".format(x))
```

3 COMPUTE_E.PY

github

Vedi tabella 1.

```
# la libreria decimal ci permette di effettuare calcoli su numeri
# con sviluppo decimale arbitrariamente lungo
from decimal import Decimal, getcontext
def compute_e(digits):
    sum = Decimal(0)
    k = 0
    k_factorial = 1
    while k_factorial * k < 10**digits:
        sum += Decimal(1)/Decimal(k_factorial)
        k += 1
        k_factorial *= k
    return sum

getcontext().prec = 1100  # numero di cifre da utilizzare nei calcoli
print("e: {:.1001}".format(compute_e(1100)))
```

4 COMPUTE_PI.PY

github

Vedi esercizio 5.90.

```
from decimal import Decimal, getcontext

def compute_pi(digits):
    sum = Decimal(0)
    k = 0
    factor = Decimal(1)/2
```

```
    while 3*(2*k+1)*4**k < 4*10**digits:
        sum += factor / (2*k+1)
        factor *= Decimal(2*k+1) / (2*k+2) / 4
        k += 1
    return sum * 6

getcontext().prec = 1100  # numero di cifre da utilizzare nei calcoli
print("pi: {:.1001}".format(compute_pi(1100)))
```

5 MANDELBROT.PY

Vedi figura 8.

github

```
# la libreria numerica numpy ci permette di fare velocemente
# operazioni su matrici di numeri complessi
import numpy as np

xres, yres = 6400, 4800
iterations = 40

# cx e' una suddivisione dell'intervallo [-2,1] in xres punti
cx = 3.0*np.arange(xres)/xres - 2.0
# cy e' una suddivisione dell'intervallo [-1,1] in yres punti
cy = (2.0*np.arange(yres)/yres - 1.0) * 3.0 * yres / 2.0 / xres
# c e' una matrice yres x xres contenente i numeri complessi
# con parte reale cx e parte immaginaria cy.
c = cx[np.newaxis,:] + 1j * cy[:,np.newaxis]

# z e' una matrice di numeri complessi, inizialmente nulli, su cui
# faremo l'iterazione con ognuno dei dati iniziali
# presi dalla matrice c
z = np.zeros((yres, xres), dtype=np.complex)
for n in range(iterations):
  print("{}% completed".format(n*100//iterations))
  z = z*z + c

# consideriamo l'insieme dei punti che dopo iterations iterazioni
# non sono usciti dal disco di raggio 2.
mandelbrot = np.logical_not(np.abs(z) < 2.0)

# utilizziamo la libreria scipy che ci permette di
# trasformare facilmente una matrice in una immagine
from scipy.misc import imsave
filename = 'mandelbrot.png'
print("saving image to", filename)
imsave(filename, mandelbrot)
```

6 KOCH.PY

github

Vedi figura 4.

```
import sys
from math import *

def affine_koch(t, s, iter):
    """
    t, s are affine (triangular) coordinates
    @return positive if inside, negative if outside
    """
    if t+s > 1: return 1.
    if t<=0 or s<=0: return -1.
    if 3*(t+s) < 2: return -.5
    if iter <= 0: return 0.
    if 3*s >= 2: return affine_koch(3*t, 3*s-2, iter-1)
    if 3*t >= 2: return affine_koch(3*t-2, 3*s, iter-1)
    if 3*t <= 1: return affine_koch(3*t-2+3*s, 2-3*s, iter-1)
    return affine_koch(2-3*t,3*s-2+3*t, iter-1)

RAD_3 = sqrt(3)

def koch(x, y, iter):
  return affine_koch(1 - x - y/RAD_3, x - y/RAD_3, iter)

def pbm_image(out, xres, yres):
  iter = 1 + log(max(xres, yres))/log(3)
  out.write("P1\n")
  out.write("# koch PBM by Emanuele Paolini\n")
  out.write("{} {}\n".format(xres, yres))
  for y in range(yres):
    for x in range(xres):
        k = koch(x*1./xres, (yres-1-y)*1./xres, iter)
        out.write('0' if k<=0 else '1')
    out.write("\n")

xres = 6400
yres = 2000
filename = "koch.pbm"

if len(sys.argv) >= 2:
    filename = sys.argv[1]

if len(sys.argv) == 4:
    xres, yres = map(int,argv[2:])

print("Writing to file: {}\n".format(filename))
with open(filename, "w") as out:
    pbm_image(out, xres, yres);
```

7 fourier.py

Vedi figura 3

github

```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot
# se usi jupyter: %matplotlib inline

def e(k):
    """
    k-esimo elemento della base hilbertiana
    """
    k = Integer(k)
    if k == 0:
        return lambda x: 1/sqrt(2*pi)
    elif k % 2 == 0:
        return lambda x: cos(k/2 * x)/sqrt(pi)
    else:
        return lambda x: sin((k+1)/2 * x)/sqrt(pi)

def f(g):
    """
    integra g contro la funzione che vale -1
    in (-pi,0) e 1 in (0,pi)
    """
    x = symbols("x")
    return integrate(g(x), (x, 0, pi)) - integrate(g(x), (x, -pi, 0))

def fourier(f, n):
    """
    calcola l'n-esimo polinomio trigonometrico approssimante f
    """
    return lambda x: sum([f(e(k)) * e(k)(x) for k in range(n+1)])


"""
Calcola e disegna lo sviluppo di Fourier
"""
x = symbols('x')
n = 61
print("polinomio trigonometrico di ordine {}".format(n))
pol = fourier(f,n)(x)
print(pol)
fig = plot(pol, (x, -pi, pi))
fig.savefig("fourier.png", dpi=600)
```

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Courant and F. John. *Introduction to calculus and analysis*. Interscience Publishers, 1965.

[2] E. Giusti. *Analisi matematica 1*. Bollati Boringhieri, 2012.

[3] P. Marcellini and C. Sbordone. *Analisi matematica uno*. Liguori Editore, 1998.

[4] C. D. Pagani and S. Salsa. *Analisi matematica Volume 1*. Zanichelli, 1993.

[5] E. Paolini. Appunti di logica. `http://pagine.dm.unipi.it/paolini/didattica/appunti/logica.pdf`.

[6] W. Rudin. *Analisi matematica*. McGraw-Hill, 1991.

INDICE ANALITICO