BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

LUIGI C. BERSELLI

Intorno ad alcune questioni di meccanica dei fluidi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 271–274.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_271_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 271-274

Intorno ad alcune questioni di meccanica dei fluidi.

LUIGI CARLO BERSELLI

L'argomento trattato in questa tesi è la meccanica dei fluidi. Per descrivere il moto dei fluidi viscosi, incomprimibili ed omogenei vengono studiate le *equazioni di Navier-Stokes*. Dato un fluido in un dominio regolare $D \subseteq \mathbf{R}^d$, il problema ai valori iniziali e al contorno per le equazioni di Navier-Stokes è:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\ \mathbf{u} - \dfrac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } D \times [0, T], \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } D \times [0, T], \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial D \times [0, T], \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{in } D \times \{0\}, \end{cases}$$

dove il vettore $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d)$ è la velocità, lo scalare p è la pressione idrostatica e la costante positiva Re è il numero di Reynolds.

Nel primo capitolo vengono richiamate alcune generalità sulle equazioni di Navier-Stokes. Il problema matematico fondamentale relativo a tali equazioni è la buona positura. È infatti noto che in dimensione $d = 2$ il problema al contorno e ai valori iniziali (1) è ben posto nel senso di Hadamard. In dimensione $d = 3$ invece si riesce a dimostrare l'esistenza in una classe (soluzioni deboli) che è troppo debole per dimostrare l'unicità. L'unicità si riesce a dimostrare solo per una classe di soluzioni (soluzioni forti) di cui non si conoscono teoremi di esistenza se non per tempi «piccoli» o dati piccoli o numero di Reynolds basso. Questi risultati sono stati ottenuti, a partire dagli anni '30, grazie ai contributi di Leray, Hopf, Kiselev, Ladyženskaya, Prodi e J.L. Lions. Una referenza classica per tali risultati è il libro di Temam [5].

Visto che le soluzioni forti sono uniche anche nella classe delle deboli e sono regolari quanto il bordo del dominio e la forza esterna, ha avuto grande interesse la ricerca di condizioni che possano assicurare la regolarità delle soluzioni deboli. Le condizione più conosciuta è quella nota come *condizione di Prodi-Serrin*: se la soluzione debole $\mathbf{u}$ appartiene anche a $L^p(0, T; (L^q(D))^d)$, con $2/p + d/q = 1$, (con $d < q \leq \infty$), allora $\mathbf{u}$ è anche soluzione forte.

Nel secondo capitolo della tesi ci siamo occupati di un problema collegato a questo: cercare condizioni sulla pressione (e non sulla velocità) che assicurino la regolarità delle soluzioni deboli. A tal riguardo, l'unico risultato noto in letteratura è quello di Kaniel degli anni '60: nel caso tridimensionale se la pressione appartiene a $L^{\infty}(0, T; L^q(D))$, per $q > 12/5$, allora la soluzione è regolare. Con una generalizzazione delle usuali «stime dell'energia» siamo riusciti a migliorare tale risultato, provando che in dimensione d se

$$p \in L^{\alpha}(0, T; L^{\frac{\alpha d}{\alpha + d - 2}}(D)) \quad \text{con} \quad \alpha > d\,,$$

allora la soluzione è forte e quindi regolare. Alcune considerazioni euristiche e l'equazione $-\Delta p = \sum_{i,j} \partial_j u_i \partial_i u_j$ portano a ipotizzare che la pressione sia in qualche senso *equivalente* al modulo quadro della velocità, almeno dal punto di vista dell'effetto regolarizzante. Gli esponenti della pressione dovrebbero quindi dare $2/p + 3/q \leqslant 2$ come condizione sufficiente per la regolarità, e nel nostro risultato si arriva a $1 + d/\alpha < 2$. I dettagli relativi a queste questioni si trovano in [1].

Nel terzo capitolo ci siamo occupati di un problema classico nella teoria delle equazioni paraboliche: può il sistema dinamico continuo generato dalla mappa $\{\text{dato iniziale}\} \mapsto \{\text{soluzione al tempo } t\}$ essere studiato (nel limite di tempi infiniti) con un sistema di equazioni differenziali ordinarie?

Per le equazioni di Navier-Stokes in dimensione $d = 2$ esistono vari risultati a supporto di questa tesi. Ricordiamo per esempio che negli anni '80 è stato dimostrato che *l'attrattore globale* ha dimensione di Hausdorff finita. Un'altro risultato classico è quello dimostrato negli anni '60 da Foiaş e Prodi. Se denotiamo con $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ gli autovalori dell'operatore di Stokes il loro risultato è il seguente: esiste un numero naturale $N > 0$ tale che, se la proiezione della differenza di due soluzioni sullo spazio generato da $e_1, \ldots, e_N$ tende a zero per il tempo che tende a *più infinito*, allora la differenza delle due soluzioni tende a zero (per il tempo che tende a più infinito), rispetto alla metrica dello spazio delle funzioni a quadrato sommabile. Inoltre il numero N dipende solo dai dati del problema: numero di Reynolds, forza esterna e dominio D. Nella tesi abbiamo studiato questo tipo di problema nel caso di un termine forzante non regolare. In questo contesto il problema è per sua natura tipico delle equazioni stocastiche, che possono essere considerate come un possibile modello per lo studio dei moti turbolenti. Un termine forzante molto irregolare, tipo *moto Browniano*, può essere usato per modellizzare le rapide variazioni dei parametri misurati in un fluido reale e per concentrare l'interesse sulle proprietà statistiche del fluido. Indebolendo le ipotesi sul termine forzante $\mathbf{f}$ abbiamo dovuto assumere altre condizioni. In particolare siamo riusciti a dimostrare il risultato *à la* Foiaş-Prodi considerando l'equazione scalare di *reazione-diffusione*. Per le equazioni di Navier-Stokes siamo stati costretti ad assumere che il problema abbia dati al bordo periodici e che almeno una delle due soluzioni appartenga al cosiddetto *attrattore stocastico*. Sotto queste ipotesi un decadimento esponenziale della proiezione della differenza di due soluzioni implica un decadimento esponenziale delle differenza delle due soluzioni rispetto alla metrica di L^2, nel limite di tempi grandi. Analoghi risultati sono stati dimostrati anche per il problema *all'indietro* nel tempo, cioè per il tempo che tende a *meno infinito*. I dettagli relativi a queste questioni si trovano in [2].

Nel quarto capitolo ci siamo occupati di un altra questione classica relativa alle equazioni dei fluidi: l'approssimabilità numerica delle soluzioni. È ben noto infatti che l'instabilità e la complessità dei moti turbolenti che devono essere studiati nelle applicazioni industriali è molto al di là delle effettive capacità di calcolo degli attuali calcolatori. Nella tesi abbiamo cercato di adattare alcuni dei metodi della «decomposizione di domini» alla fluidodinamica. Con decomposizione di domini si indica tutta una serie di algoritmi che usano la seguente idea: il dominio di calcolo viene suddiviso in sottodomini, in ciascuno dei quali è semplice (dato il piccolo numero di incognite) trovare una soluzione del problema approssimato. L'informazione che viene da ogni sottodominio viene poi raccolta per costruire la soluzione del problema. Questi metodi sono stati introdotti (sebbene con intenti diversi dall'analisi numerica) da H.A. Schwarz nel 1870 e hanno avuto grande interesse applicativo a partire dagli anni '80, quando la diffusa disponiblità di *calcolatori paralleli* e l'interesse per il loro uso nella soluzione di problemi alle derivate parziali ha richiesto un'analisi dei possibili algoritmi paralleli, come quelli di decomposizione di domini. Una referenza recente, contenente gli ultimi risultati relativi a questi metodi e con un'ampia bibliografia è il libro di Quarteroni e Valli [4].

Per chiarire le idee consideriamo il problema di Laplace con condizioni omogenee di Dirichlet. Il dominio D viene suddiviso in due sottodomini D_1 e D_2 tali che l'unione delle loro chiusure sia tutto D, mentre Γ (l'intersezione delle chiusure) sia una varietà Lipschitziana di dimensione $d-1$. Il metodo classico di *Dirichlet-Neumann* consiste nel risolvere il problema di Laplace nel dominio D_1 con un dato arbitrario su Γ. Poi viene risolto nel dominio D_2 un problema misto Dirichlet-Neumann che ha come dato di Neumann su Γ la derivata normale delle soluzione trovata precedentemente in D_1. La traccia su Γ della soluzione del problema in D_2 viene poi usata come dato per un nuovo problema di Dirichlet in D_1. Le iterazioni definite in questa maniera portano alla costruzione di un metodo particolarmente efficiente. Infatti ogni sottoproblema coinvolge poche incognite e può essere risolto in parallelo ad altri (nel caso si divida in più di due sottodomini). Il metodo iterativo risulta inoltre essere ottimamente precondizionato, cioè l'ordine di convergenza è indipendente dalla dimensione della *mesh* usata nella discretizzazione.

La teoria della decomposizione dei domini è abbastanza chiara per i problemi ellittici simmetrici. Nella tesi abbiamo studiato alcune questioni relative ai problemi non simmetrici. Questo è motivato dal fatto che la discretizzazione numerica delle equazioni di Navier-Stokes (come nel classico metodo di Chorin-Temam) necessita della risoluzione di sistemi ellittici non simmetrici. Nella tesi ci siamo occupati prevalentemente di problemi di *convezione-diffusione* del tipo

$$(2)\quad Lw := -\sum_{l,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{lj}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial (b_j(x)\, w)}{\partial x_j} + a_0(x)\, w = f, \qquad x \in D\,,$$

con coefficienti $a_{lj}(x) = a_{jl}(x)$ *uniformemente definiti positivi*, cioè:

$$\exists\, \alpha_0 > 0 : \sum_{l,j=1}^{d} a_{lj}(x)\, \xi_j \xi_l \geqslant \alpha_0 \, |\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^d, \text{ per q.o. } \; x \in D\,.$$

Per assicurare la coercività abbiamo inoltre assunto che

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot b(x) + a_0(x) \geqslant 0, \quad \text{per q.o.} \; x \in D\,.$$

L'interesse per le equazioni lineari di convezione-diffusione è motivato dalla necessità di avere dei nuclei computazionali efficienti, almeno per le equazioni «modello» della fluidodinamica. Per le equazioni di convezione-diffusione abbiamo ridimostrato in modo nuovo alcuni risultati relativi alla convergenza di algoritmi del tipo *Neumann-Neumann*, nell'ipotesi che l'operatore L sia una «perturbazione» di un operatore simmetrico. Tali risultati sono derivati da alcuni teoremi ottenuti nella tesi relativamente allo studio di metodi di decomposizione di domini per le equazioni di Maxwell. Sono poi stati introdotti alcuni nuovi metodi del tipo *Robin-Robin* per le equazioni di convezione-diffusione e sono stati provati dei risultati di convergenza ottimale. Nell'ultima parte del quarto capitolo sono riportati anche alcuni risultati numerici riguardanti l'implementazione dei nuovi algoritmi proposti e il confronto con quelli noti. Per una discussione di questi risultati e dei problemi ancora aperti, vedi [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] BERSELLI L.C., *Sufficient conditions for the regularity of the solutions of the Navier-Stokes equations*, Math. Meth. Appl. Sci., **22** (1999), 1079-1085.

[2] BERSELLI L.C. e FLANDOLI F., *Remarks on determining projections for stochastic dissipative equations*, Discrete Contin. Dynam. Systems, **5** (1999), 197-214.

[3] BERSELLI L.C. e SALERI F., *New substructuring domain decomposition methods for advection-diffusion equations*, J. Comput. Appl. Math., **116/2** (2000), 201-220.

[4] QUARTERONI A. e VALLI A., *Domain decomposition methods for partial differential equations*, Oxford Sci. Publications (1999).

[5] TEMAM T., *Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. **2** (1977).

Dipartimento di Matematica Applicata «U.Dini»
e-mail: berselli@dma.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XI
Direttori della ricerca: Prof. H. Beirão da Veiga
Dipartimento di Matematica Applicata «U. Dini» Università di Pisa;
Prof. A. Valli, Dipartimento di Matematica, Università di Trento