Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 6, N. 3, dicembre 2021, 259-285

Farkas e János Bolyai: dalla teoria delle parallele alla quadratura del cerchio

ALBERTO COGLIATI
Università degli Studi di Pisa
E-mail: alberto.cogliati@unipi.it

Sommario: *L'articolo propone una analisi storica della figura e dell'opera di János Bolyai nella quale si affronta con particolare attenzione il tema dei suoi rapporti scientifici col padre Farkas e con Gauss. Sono analizzate alcune sezioni dell'*Appendix*, segnatamente le sezioni conclusive dell'opera che sono dedicate al problema della quadratura del cerchio. Alla luce di tale analisi viene offerta un riconsiderazione critica di alcune tesi storiografiche ampiamente diffuse e una rivalutazione del contributo di Gauss al processo di scoperta delle geometrie non-euclidee.*

Abstract: *This contribution provides a historical analysis of both the life and the work of János Bolyai. It mainly focuses upon his scientific relationships with his father Farkas and Gauss. The content of some sections of the* Appendix*, namely those concluding sections that are devoted to the squaring of the circle, is analyzed. In this context, a critical examination of some widespread historiographical theses is offered alongside with a reassessment of the role of Gauss in the process leading to the discovery of non-Euclidean geometries.*

1. – Introduzione

La scoperta (o l'invenzione) delle geometrie non-euclidee costituisce uno snodo fondamentale dello sviluppo storico della matematica. È difficile pensare a un altro evento che abbia determinato un impatto altrettanto diffuso e profondo. Infatti, l'imporsi di geometrie alternative a quella euclidea non solo determinò mutamenti radicali nella concezione degli enti e degli assiomi della matematica, ma produsse effetti significativi e duraturi anche nel campo della logica, dei rapporti tra matematica e fisica e più in generale nell'ambito della teoria della conoscenza. Non sorprende dunque che lo studio delle geometrie non-euclidee e della loro storia abbia assunto un certo rilievo nella formazione accademica di matematici e futuri insegnanti.

Tuttavia, specialmente sul fronte della storia, le trattazioni non specialistiche si riducono spesso (con qualche sporadica eccezione) a resoconti ingenui che oltre a trascurare l'oggettiva complessità del tema, tendono ad accreditare tesi storiografiche di dubbia fondatezza. Si possono citare a riguardo alcuni luoghi comuni particolarmente diffusi: i) la scoperta della geometria non euclidea si realizzò con l'affermarsi della consapevolezza che il sistema assiomatico euclideo può essere rimpiazzato da un insieme alternativo di assiomi, ottenuto negando il postulato euclideo delle parallele e assumendo la possibilità che esistano più rette parallele (passanti per un punto) ad una retta data; ii) al pari di Bolyai e Lobačevskij, Gauss è da annoverare tra gli scopritori della geometria non euclidea, in particolare per il fatto che egli concepì la possibilità di realizzare la geometria iperbolica su di una superficie a curvatura costante negativa; iii) Gauss condusse misurazioni geodetiche con l'obiettivo deliberato di verificare sperimentalmente la validità della geometria euclidea, trovando che la deviazione rilevata può essere considerata nulla compatibilmente con l'errore sperimentale delle misure; iv) nella sua *Appendix*,

Accettato: il 6 dicembre 2021.

Bolyai espose una procedura per quadrare il cerchio iperbolico; v) il modello della pseudosfera che Beltrami sviluppò nel *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* è costituito dalla superficie immersa nello spazio euclideo che è ottenuta mediante rotazione (attorno al proprio asse) di una trattrice.

Queste affermazioni ci consegnano un'immagine assai imprecisa del processo storico che intendono descrivere, contribuendo alla diffusione di fraintendimenti sui quali è utile riflettere.

Cominciamo da i). Nonostante descriva in termini matematicamente corretti il contenuto assiomatico della geometria iperbolica intesa come sistema alternativo a quello euclideo, questa affermazione non tiene nella dovuta considerazione il fatto che proprio nel corso dell'Ottocento si realizzò un mutamento profondo nel modo di intendere i principi della geometria. La concezione classica, condivisa tra gli altri anche dallo stesso Gauss, da Bolyai e da Lobačevskij, secondo la quale gli assiomi sono proposizioni che hanno un contenuto di verità, fu rimpiazzata progressivamente da un nuovo e più astratto punto di vista, in virtù del quale quegli stessi assiomi assunsero il ruolo di affermazioni semanticamente neutre, che è possibile sostituire e modificare in maniera più o meno arbitraria per ottenere un nuovo sistema geometrico. Se si omette di considerare un tale mutamento, che in larga parte fu determinato proprio dall'avvento delle geometrie non euclidee, si rischia di incorrere in un'ingenua forma di anacronismo che ha l'effetto di sminuire la natura e l'entità delle difficoltà con le quali gli scopritori della nuova geometria si dovettero confrontare. Proprio perché saldamente inserita entro una visione classica del metodo assiomatico, l'affermazione del punto di vista non euclideo si manifestò, inizialmente, non tanto nel venir meno del carattere di unicità della geometria (euclidea), ma addirittura nella necessità, più o meno esplicita, di negarne la validità. Basterà richiamare due esempi, tra i più conosciuti, dai quali tale prospettiva emerge in maniera molto chiara. Entrambi sono tratti dalla corrispondenza privata di Gauss: "Il percorso che ho intrapreso non porta all'obiettivo desiderato [cioè alla dimostrazione del postulato euclideo delle parallele] e che tu stesso hai assicurato di aver raggiunto, ma piuttosto, conduce a dubitare della verità della geometria," (1) lettera di Gauss a Farkas Bolyai (1799); e una lettera dello stesso Gauss a Gerling (1816): "È facile dimostrare che se la geometria di Euclide non è quella vera (*die wahre*) allora non esistono figure simili [...]." (2)

Il giudizio ii) ha un carattere congetturale. Infatti, allo stato attuale delle nostre conoscenze, ii) non può essere supportato da alcuna evidenza documentale. Se è vero che Gauss, indipendentemente da Bolyai e Lobačevskij, sviluppò la convinzione della indimostrabilità del postulato delle parallele anticipando un gran numero di risultati caratteristici della geometria iperbolica, è certo però che egli non discusse mai, almeno non esplicitamente, della possibilità di realizzare questa geometria su di una superficie a curvatura costante negativa.

L'affermazione iii), pur non del tutto infondata, ha invece il difetto della superficialità, poiché assume come non problematica una circostanza intorno alla quale sussistono serie incertezze. Sebbene non si possa escludere con sicurezza che Gauss abbia effettivamente condotto misurazioni geodetiche con l'intento di pervenire ad una conferma sperimentale della geometria euclidea, tuttavia, anche in questo caso, non si dispone di alcuna solida prova a supporto. Ci si può appellare soltanto ad argomenti congetturali e alla testimonianza indiretta di Sartorius von Waltershausen, amico e primo biografo di Gauss, il quale riferì che Gauss, pur convinto della sua indimostrabilità, riteneva di aver fornito una prova empirica approssimativa della correttezza del postulato euclideo delle parallele mediante la misura degli angoli interni del triangolo geodetico con vertici nelle località di Brocken, Hohenhagen e Inselberg. (3) Tuttavia, sulla affidabilità di questa notizia sono stati avanzati in più occasioni alcuni dubbi. Si è sostenuto in particolare che l'informazione possa essere il frutto di un fraintendimento del contenuto matematico delle sezioni finali delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, dove Gauss fornì una generalizzazione di un noto teorema di Legendre sul confronto fra triangoli

(1) [Gauss Werke 1863-1933, VIII, p. 159].
(2) [Gauss Werke 1863-1933, VIII, p. 169].
(3) [Sartorius 1856, p. 81].

piani e triangoli geodetici tracciati su una superficie sferica. ([4]).

Quanto a iv) e v), si tratta di affermazioni da respingere sul piano fattuale (indipendentemente da interpretazioni soggettive). Bolyai descrisse, è vero, una procedura per costruire con riga e compasso un cerchio e un quadrato di uguale area, tuttavia egli fu ben consapevole del fatto che tale procedura è valida solo per particolari valori dell'area assegnati a priori. Bolyai discusse in particolare la costruzione (con riga e compasso) di un cerchio e di un quadrato di area pari a $k^2\pi$ e congetturò quali potessero essere i valori dell'area che garantiscono la possibilità di eseguire una tale quadratura. Nella forma in cui iv) è espressa, essa trascura di menzionare il fatto elementare che in geometria iperbolica non esistono quadrati equivalenti a cerchi di raggio arbitrariamente grande. Infine, rispetto al modello della "pseudosfera" di Beltrami, è utile precisare che con l'espressione pseudosfera Beltrami si riferiva in realtà ad una qualunque superficie a curvatura costante negativa. La vera innovazione del *Saggio* infatti non consistette, almeno non solo, nella scoperta di una particolare superficie di rotazione a curvatura costante negativa (effettivamente contenuta nel lavoro) ma, piuttosto, nella considerazione di una superficie astratta (cioè non immersa isometricamente nello spazio euclideo) rappresentabile con un opportuno disco del piano euclideo entro il quale l'intero piano iperbolico poteva essere rappresentato in maniera tale che le geodetiche della superficie (le rette iperboliche) coincidano con le corde (euclidee) del disco stesso. In questo modo, tale superficie astratta poté essere impiegata per fornire una realizzazione della geometria di Bolyai e Lobačevskij cui è possibile guardare, almeno retrospettivamente, come ad un modello euclideo dell'intero piano iperbolico.

Ben lontano dall'offrire uno studio sistematico della storia delle geometrie non-euclidee, il presente contributo si propone un obiettivo assai più modesto: esaminare alcune delle questioni storiografiche sopra richiamate nel contesto di una analisi della figura scientifica di János Bolyai che ponga al centro dell'attenzione il tema dei suoi rapporti scientifici e biografici col padre Farkas e con lo stesso Gauss.

Si tratta di un tema già variamente affrontato e che tuttavia merita di essere riesaminato alla luce del ricco patrimonio documentale disponibile e della nutrita letteratura secondaria che, anche in tempi relativamente recenti, ha contribuito a chiarire alcuni aspetti rilevanti della scoperta.

Le sezioni 2-4 offrono una breve biografia scientifica di Farkas (durante gli anni trascorsi a Gottinga) e di János Bolyai. In buona parte, l'esposizione fa uso del materiale manoscritto pazientemente raccolto e analizzato in [Engel, Stäckel 1913]. Anche grazie al loro lavoro, generalmente poco conosciuto soprattutto in Italia, disponiamo di una considerevole quantità di informazioni, biografiche e scientifiche, che consentono di tratteggiare un quadro dettagliato del contesto della scoperta. Le sezioni 5-6 trattano del contenuto dell'*Appendix* con particolare riferimento al tema della "quadratura" del cerchio cui la sezione 6 è interamente dedicata. La successiva sezione 7 affronta il tema delle ricerche di Gauss in materia di geometria non euclidea. Viene fornita una analisi dettagliata di alcune lettere risalenti alla primavera-estate 1831 che Gauss scrisse all'amico Schumacher e che forniscono alcuni tra i documenti più significativi per delineare la natura e l'estensione di tali ricerche. Infine la sezione 8 è dedicata a una discussione dei rapporti tra geometria non euclidea e teoria delle superfici nell'opera di Gauss.

2. – Gli anni giovanili di Farkas Bolyai e Gauss

Farkas Bolyai aveva cominciato a coltivare l'idea di dedicarsi allo studio della matematica sin dai giorni del suo breve soggiorno a Jena. La città della Turingia costituiva la prima tappa di un lungo viaggio di studio all'estero che aveva intrapreso nella primavera del 1796 e che lo avrebbe condotto in Germania lontano dalla patria ungherese. A dispetto della vivace atmosfera letteraria e filosofica che contraddistingueva la città in quegli anni – egli ebbe modo di assistere alle lezioni universitarie di Fichte e di conoscere personalmente Schiller – proprio a Jena gli interessi del giovane Farkas si orientarono verso la matematica e i problemi della geometria in

([4]) Sulla questione si possono consultare [Miller 1972], [Breitenberger 1984] e il più recente [Scholz 2004].

particolare. La decisione assunse una qualche forma di concretezza solo qualche mese più tardi, nel settembre 1796, quando Farkas si trasferì all'università di Gottinga e, poco tempo dopo, incontrò Carl Friedrich Gauss.

Due anni più giovane di lui, il futuro *princeps mathematicorum*, come sarebbe stato ribattezzato, era un brillantissimo studente della stessa università. Gauss si era contraddistinto per una straordinaria attitudine al ragionamento matematico e una capacità di calcolo mentale davvero fuori dal comune. Tra i due si instaurò prestissimo un intenso legame di amicizia, rafforzato da un comune desiderio di conoscenza e una profonda passione per la matematica. Secondo quanto lo stesso Farkas riferisce, Gauss era piuttosto umile e per nulla incline allo sfoggio dei propri meriti. "Anni interi di frequentazione con lui non sarebbero bastati a farsi una idea chiara della sua statura scientifica e intellettuale". Durante gli anni trascorsi insieme a Gottinga, Farkas ricavò solo una vaga immagine della grandezza dell'amico. Gauss era "un libro silenzioso e senza titolo" (sono parole di Farkas) che solo rarissimamente acconsentiva ad essere aperto. Pare che in una sola occasione Farkas poté assistere all'espressione di un moderato compiacimento. Fu quando Gauss gli comunicò la costruzione con riga e compasso del poligono regolare di 17 lati. Un risultato che dopo oltre duemila anni arricchiva in maniera sorprendente la teoria classica della costruzione dei poligoni regolari e che di lì a qualche tempo sarebbe confluito nell'*opus magnum*, *Disquisitiones Arithmeticae*.

Al di là di questa circostanza, sembra che nelle pur frequenti occasioni di discussione Gauss e Farkas non abbiano mai diffusamente affrontato il problema dei fondamenti della geometria o si siano confrontati sulla possibilità di fornire una dimostrazione del postulato delle parallele.

La teoria delle parallele era in quegli anni, sul finire del XVIII secolo, un ambito di ricerca particolarmente esplorato e insieme molto controverso. I matematici ormai da secoli avevano intrapresero vari tentativi di sostituzione del postulato euclideo mediante assunzioni ritenute più evidenti e talvolta anche di dimostrazione dello stesso sulla base dei soli primi quattro assiomi del sistema degli *Elementi*. Nell'*Encyclopédie*, D'Alembert aveva efficacemente descritto il fallimento di tali sforzi, riconoscendo a malincuore che "la definizione e le proprietà della retta e quelle delle parallele sono lo scoglio e, per così dire, lo scandalo della geometria elementare". I postulati sui quali Euclide aveva edificato la catena di deduzioni dei 13 libri che componevano il suo sistema, erano in tutto cinque. I primi quattro non attirarono mai una attenzione paragonabile al clamore destato dal quinto. Affermazioni quali, "per due punti dati è possibile tracciare una retta" (I postulato), "ogni segmento è prolungabile indefinitamente" (II postulato), "per ogni punto è possibile tracciare una circonferenza con un raggio fissato" (III postulato) e "tutti gli angoli retti sono uguali tra loro" (IV Postulato) vennero considerate non problematiche, poiché dotate di un sufficiente carattere di evidenza. Per il quinto postulato la situazione era diversa e assai più delicata. L'enunciato adottato da Euclide era il seguente:

> Se una retta, venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Sin dall'antichità dubbi furono avanzati sulla sua evidenza e sulla sua legittimità, alla luce soprattutto dell'osservazione che l'implicazione reciproca del V postulato, ([5]) "in un triangolo la somma di due angoli interni è minore di due retti", tutt'altro che evidente, godeva invece dello statuto di teorema ed era per questo conseguenza dei primi quattro. Un approccio variamente impiegato per superare tali difficoltà fu l'adozione di un procedimento di dimostrazione per assurdo. Così ad esempio Girolamo Saccheri, nel suo *Euclides ab omni naevo vindicatus*, ([6]) il quale si convinse di essere giunto ad una prova indiretta del

([5]) Farkas e János Bolyai usavano riferirsi all'assioma delle parallele come all' assioma XI. Tale numerazione riflette (direttamente o indirettamente) il testo adottato nella *Editio Princeps* (1533) degli *Elementi*, dove quelli che oggi designiamo come IV e V postulato venivano scorporati dagli αἰτήματα (postulati) e inseriti fra le κοιναὶ ἔννοιαι (nozioni comuni). La posizione del "postulato" delle parallele tra le nozioni comuni è appunto l'undicesima. A questo proposito si può consultare [Pettoello Ed. 2009, p. 26].

([6]) [Saccheri 1733].

postulato euclideo mediante una dimostrazione della impossibilità delle due ipotesi alternative (ipotesi dell'angolo acuto e ipotesi dell'angolo ottuso). (7)

Un confronto esplicito (e ben documentato) fra Gauss e Farkas sul tema delle parallele si svolse solo negli anni successivi alla loro frequentazione a Gottinga. La cospicua corrispondenza epistolare intercorsa tra i due è una testimonianza storica eccezionale del comune impegno su questo fronte. Poco prima di fare ritorno in patria, nel maggio 1799, pare che Farkas avesse accennato a una dimostrazione del postulato euclideo che egli aveva elaborato in quei mesi; non ci fu tuttavia il tempo di approfondire l'argomento. In una lettera all'amico di qualche mese successiva a quell'ultimo incontro, Gauss espresse il rammarico per l'opportunità perduta. È questo un documento importante che offre informazioni preziose intorno alle posizioni che Gauss aveva silenziosamente meditato sulla dimostrabilità del postulato delle parallele. Scrisse: "Mi rincresce non aver sfruttato la nostra precedente maggiore vicinanza per saperne di più sul tuo lavoro sui fondamenti della geometria. Mi sarei sicuramente risparmiato molti sforzi inutili e mi sarei tranquillizzato, nella misura in cui ciò è possibile per qualcuno come me, dal momento che ancora così tanto resta da fare in un tale oggetto. Io stesso ho fatto molti progressi nel mio lavoro anche se le mie altre attività, molto eterogenee, non mi lasciano molto tempo; il cammino che ho intrapreso non porta all'obiettivo desiderato e che tu stesso hai assicurato di aver raggiunto, ma piuttosto, conduce a dubitare della verità della geometria. Ho trovato ciò che per i più si qualificherebbe come una dimostrazione [del postulato delle parallele], ma che ai miei occhi non prova alcunché; ad esempio, se si potesse dimostrare che esistono triangoli rettilinei la cui area è maggiore di ogni regione assegnata, allora sarei nelle condizioni di giustificare rigorosamente l'intera geometria. I più sarebbero portati a considerare ciò alla stregua di un assioma; non io, però. Sarebbe possibile che, per quanto lontani gli uni dagli altri siano assunti i vertici di un triangolo nello spazio, tuttavia l'area si mantenga sempre inferiore ad un certo limite. Dispongo di molti risultati simili, ma in nessuno io scorgo nulla di soddisfacente." (8)

Come appare evidente, Gauss non solo aveva cominciato ad avanzare riserve sulla dimostrabilità del postulato delle parallele ma aveva anche intrapreso (in termini e modalità che non ci sono note, sfortunatamente) un'indagine sulle conseguenze che scaturiscono dalla negazione del postulato stesso, tra le quali una delle più sorprendenti è il fatto che triangoli simili sono necessariamente anche triangoli congruenti. Nonostante le perplessità che avevano spinto Gauss fino al punto di nutrire dei dubbi sulla verità della geometria, Farkas non si lasciò scoraggiare; si dedicò con sempre maggiore impegno ad approfondire il tema dei fondamenti della geometria, mettendosi al lavoro per cercare una dimostrazione del postulato.

L'opinione di Gauss rappresentava per Farkas il banco di prova per decidere della bontà dei propri risultati. Non sorprende dunque che egli abbia più volte interpellato l'amico, sottoponendogli il frutto del proprio lavoro sull'argomento. Nell'autunno del 1804 Farkas inviò un primo tentativo di dimostrazione. Si trattava di una lunga nota, redatta in latino, dal titolo *Theoria Parallelarum* (9) che si concludeva con il "teorema": esiste un'unica retta passante per un dato punto e parallela alla retta data. (*Rectae unica tantum per aliquod punctum datur parallela*). È questa una affermazione equivalente al V postulato euclideo che Farkas era convinto di aver dimostrato sulla base del risultato secondo il quale il luogo dei punti del piano che hanno distanza costante da una retta data e che sono posti dalla stessa parte rispetto a questa (tecnicamente tale curva è detta iperciclo), è a sua volta una retta. Dalla lettera di Farkas traspariva una certa impazienza e il desiderio di conoscere quanto prima l'opinione dell'amico. La risposta di Gauss fu tuttavia deludente: pur apprezzandone gli sforzi, egli era costretto a riconoscere che il tentativo di dimostrazione era fallito. Infatti, in un punto cruciale del ragionamento egli aveva fatto uso di una proprietà indimostrata

(7) Si veda a tal proposito l'introduzione e il commento contenuto in [De Risi Ed. 2014]. Lo schema dimostrativo privilegiato da Saccheri era quello della cosiddetta *consequentia mirabilis*.

(8) [Gauss Werke 1863-1933, VIII, p. 159].

(9) [Schmidt e Stäckel, Ed. 1899, pp. 67-78].

per la quale era possibile fornire un controesempio. Gauss concludeva: “Hai voluto il mio giudizio sincero: io te lo ho fornito ma ripeto la rassicurazione che sarei molto felice se tu potessi superare tutte le difficoltà”. ([10])

Fu questo il primo di numerosi tentativi di dimostrazione che Farkas intraprese con l’obiettivo dichiarato di riscattare la verità della geometria. Tuttavia il sogno che aveva coltivato sin dagli anni giovanili trascorsi a Gottinga era destinato a trasformarsi in una ossessione per un’impresa disperata. Ogni sforzo si dovette infrangere contro la impossibilità di dedurre il postulato delle parallele a partire dai restanti quattro. In qualche modo, Farkas volle addirittura attribuire un carattere di sistematicità ai propri insuccessi giungendo a classificare le numerose assunzioni alternative con le quali il postulato delle parallele poteva essere rimpiazzato. Tra le richieste equivalenti spicca l’assunzione seguente che Farkas indicò in un breve scritto dal titolo *Kurzer Grundriß einer Versuchs* (1851): “Tre punti qualunque non allineati giacciono sempre su una sfera”. ([11]) Una formulazione equivalente di questa richiesta è che “tre punti qualunque non allineati del piano giacciono sempre su una circonferenza”. Infatti non è difficile dimostrare che quest’ultima asserzione implica il quinto postulato euclideo. ([12])

3. – Jànos Bolyai: un “astro” della geometria

Farkas annunciò a Gauss la nascita del figlio János in una lettera del febbraio 1803. Per comunicare la notizia, ricorse a un ardito parallelismo con la determinazione dell’orbita di Cerere che Gauss aveva compiuto solo un paio di anni prima. “Anch’io, scriveva Farkas, ho consegnato al mondo un nuovo pianeta del quale tuttavia non mi è possibile determinare la traiettoria. Dio mi ha concesso un bel figlio, il 1802 XV Xbr [dicembre], battezzato Johann [János] [...] È (grazie a Dio!) un bambino sano, bellissimo, con lineamenti fini, sopracciglia e capelli neri e occhi blu scuro ardenti, che a volte brillano come due gioielli.” ([13])

Secondo quanto lo stesso Farkas riferì in una lettera successiva (dicembre 1807) allo stesso Gauss, sin da giovanissimo János mostrò una spiccata attitudine per la geometria. Raccontò ad esempio: “Gli piace molto tagliare la carta con le forbici. Un giorno ha ritagliato un triangolo ad angolo retto; bene, sebbene io non gli avessi mai parlato di questo tipo di triangoli, egli asserì che questo triangolo era quanto un mezzo rettangolo.” ([14]) Fino all’età di nove anni, tuttavia, a János non fu impartita una educazione sistematica. Farkas, che era un fervente ammiratore delle idee pedagogiche dell’*Émile* di Rousseau, ritenne di non dover imporre al figlio un modello educativo precocemente sbilanciato sul fronte della formazione teorica.

Prima di accedere al ginnasio, János ricevette lezioni private da precettori accuratamente scelti dal padre. Dell’insegnamento della matematica tuttavia Farkas volle occuparsi in prima persona. Possiamo ricavare un quadro dettagliato della primissima formazione matematica di János dando uno sguardo ad alcuni scritti privati che János stesso redasse in anni successivi. Ricordando le lezioni del padre, scrisse: “[...] mi impadronii ben presto del contenuto dei primi sei libri di Euclide. In tal riguardo, mio padre non fece altro se non osservare, a chiarimento della nozione di punto, che il tempo, così come lo spazio, ha parti indivisibili: ad esempio, la fine delle ore 8 e l’inizio delle ore 9 costituiscono un tale punto. In seguito, lasciò che studiassi la prima parte dell’*Algebra* di Eulero sino alle equazioni cubiche e biquadratiche incluse. Poi mi sono dedicato principalmente alla matematica di Vega.” ([15]) All’eta di dodici anni János fu infine avviato a frequentare il collegio di Maros-Vásárhely, dove il padre insegnava. Qui si dedicò con particolare impegno, oltre che allo studio del latino, la lingua nella quale le lezioni

([10]) [Gauss Werke 1863-1933, VIII, p. 162].

([11]) “Könnten jede drei Puncte, die nicht in einer Geraden sind, in eine Kugel fallen, so wäre das XI. Axiom bewiesen” [Bolyai F. 1851, p. 46].

([12]) A tal proposito si può consultare [Frischauf 1872, pp. 91-92].

([13]) [Schmidt e Stäckel, Ed. 1899, pp. 48-49].

([14]) [Schmidt e Stäckel, Ed. 1899, p. 51].

([15]) Il riferimento è a Jurij Vega, *Vorlesungen über die Mathematik*, 1782-1800, 4 voll.. La citazione è tratta da [Engel, Stäckel 1913, p. 52].

venivano abitualmente tenute al collegio, allo studio del calcolo differenziale e del calcolo integrale per i quali János mostrò una straordinaria attitudine.

In un appunto, redatto da Farkas un paio di mesi dopo che János ebbe conseguito il diploma (giugno 1817), possiamo leggere una vivida descrizione della personalità del figlio: "Dimostra una grande attitudine per lo studio delle scienze, in particolare della matematica. In musica, col violino, potrebbe anche diventare un virtuoso. Ha una qualche predisposizione per il disegno. Per quanto riguarda la poesia, non ho notato alcuna inclinazione in lui: è possibile che essa si svilupperà in seguito. Impara facilmente le lingue. Questi sono tutti doni della natura. [...] È lunatico, così che a volte non riesce ad assolvere ai propri doveri nell'apprendimento; ma a volte studia troppo, dall'alba al tramonto, anche a scapito della propria salute. Questo è un errore:([16]) μηδέν ἄγαν. A volte è ipocondriaco o troppo felice per ragioni che gli altri non riescono a comprendere. Gli piace farsi beffe degli altri, quindi ci sono pochissimi con cui può andare d'accordo. Questa è immaturità. A volte è disobbediente, soprattutto nei confronti di sua madre. Questa è una mancanza di educazione. Tuttavia, può comportarsi bene se solo lo desidera". ([17])

Sempre più convinto dell'eccezionale talento matematico del figlio, Farkas aveva cominciato a coltivare l'idea di chiedere all'amico di un tempo il supporto per guidare l'educazione matematica di János. Così, dopo anni di silenzio da parte di Gauss, che aveva lasciato senza risposta una lettera del dicembre 1808, Farkas decise di riallacciare i rapporti. Il 10 aprile 1816 scrisse: "Siamo stati come estranei l'uno per l'altro, separati non solo da poche miglia di spazio [...], ma anche da un periodo di diversi anni. Lascia che il sole primaverile torni a splendere sul ghiaccio della età! Sentiamo di nuovo il puro calore giovanile! [...] Mio figlio che oggi ha $13 + 1/4$ anni, all'età di nove non poteva parlare o scrivere altra lingua se non il tedesco e l'ungherese; sapeva suonare il violino ma non riusciva nemmeno a fare le addizioni (sic!). Ha iniziato con Euclide e ora conosce anche Vega (che è il mio manuale al *Collegium*), non solo i primi due volumi. È esperto anche del terzo e del quarto. Ama il calcolo differenziale e integrale e con questi opera con grande abilità e facilità, come può facilmente condurre l'archetto nelle difficili partiture dei concerti per violino [...]. La nobile semplicità, la chiarezza, la velocità e la leggerezza incantano anche gli estranei; ha una mente veloce che afferra facilmente, e talvolta lampi di genio che penetrano attraverso una serie di concetti contemporaneamente con uno sguardo; ama le teorie pure e l'astronomia; è bello e abbastanza solido, e per il resto sembra tranquillo, tranne per il fatto che ama giocare vivacemente con gli altri bambini; il suo carattere diventa, per quanto si può giudicare, fermo e nobile. Ho fatto di lui una vittima sacrificale della matematica [...]. Vorrei tenerlo con te per 3 anni, e se fosse possibile (vogliamo considerare tutte le circostanze in maniera franca e aperta) a casa tua, giacché non si può abbandonare un ragazzo di 15 anni e farlo accompagnare da un precettore supererebbe le mie forze economiche indebolite da molti eventi; tuttavia, potrei anche affidarlo a uno studente di qui, e gli darei un compenso. Se solo potessi trovarne uno di cui potessi fidarmi tanto! Ovviamente compenserei le spese di tua moglie per questo [...]. Organizzeremo tutto quando verrò da te con lui. Parlami apertamente riguardo a questo piano." ([18])

La risposta di Gauss non arrivò mai. Così Farkas fu costretto ad abbandonare l'idea di avviare il figlio allo studio della matematica a Gottinga sotto la guida di Gauss. Le alternative contemplate (ad esempio, l'Università di Pest e l'Università di Vienna) sembrarono offrire minore garanzia di una preparazione matematica adeguata rispetto alla scuola militare di ingegneria di Vienna. Per questo la scelta si orientò verso quest'ultima dove János si arruolò nell'agosto 1818.

Di poco successiva all'arrivo a Vienna è una lunga lettera (10 settembre 1818) di Farkas al figlio dalla quale emerge una costante attenzione per la formazione matematica del giovane János. "Mio caro figlio! Noi, tuoi genitori affezionatissimi, con grande

([16]) Il motto greco significa: "Niente di troppo", un invito a rifuggire dalle esagerazioni che, secondo la tradizione, era scolpito all'interno del tempio di Apollo a Delfi.

([17]) [Engel, Stäckel 1913, p. 54].

([18]) [Schmidt e Stäckel, Ed. 1899, p. 98-101].

gioia abbiamo ricevuto le tue due lettere. Aspettiamo con impazienza (se già non possiamo vederti di persona) la terza lettera e speriamo che in questa ci informerai in modo più dettagliato sulla tua salute, sul tuo alloggio e sui pasti, sui tuoi preparativi e sul tuo aspetto e che ci darai così una quiete maggiore. [...] il tempo che ti è concesso dallo studio, dedicalo alla lingua latina, francese e inglese, ma soprattutto allo studio di altri matematici. Leggi le opere di Karsten, Kästner, Pasquich, Euler, La Croix (Traité Élémentaire du Calcul différentiel et intégral) Lagrange (Théorie des Fonctions) ecc. [...] Preferirei se leggessi La Croix, che presto capirai anche in francese. È un vero piacere leggere in gioventù questo e altri lavori simili. Da parte mia, ho imparato tardi e senza istruzione e somiglio a un violinista che ha imparato a suonare questo strumento soltanto da adulto [...]. Sei in una posizione felice, conserva la tua felicità [...]. Credimi, nulla solleva l'uomo al di sopra della terra come la matematica superiore, come l'aquila nel cielo profondo, così l'uomo si eleva e lascia dietro di sé il mondo intero. Puoi certamente raggiungere questo obiettivo; usa il tempo che scorre ora e solo una volta per te; questo è il momento d'oro della tua vita, corri verso la meta e non soffermarti inutilmente su queste o quelle cose che trovi lungo la via e che ti portano fuori strada [...]. Prega e lavora! Non temere nulla; fa ciò che la provvidenza ti ha predisposto. Se ti prepari bene per ciò che, lì dove ti trovi, puoi preparare al meglio, potrai scegliere tra molte professioni redditizie. Scrivimi quello che senti ora e quello che vorresti fare in futuro. Forse una cattedra locale? Credo sempre di più che possa diventare un grande matematico soltanto colui che, dandosi da fare con una mente eccellente al momento giusto e nel modo giusto, sin da adolescente assume quell'atteggiamento per il quale, come per le api in primavera, esiste un solo obiettivo e, come con una nuova lingua, acquisirà le abilità attraverso una pratica costante." ([19])

Nel settembre del 1822 János concluse gli studi all'Accademia militare. I brillanti risultati che aveva ottenuto gli consentirono tuttavia di trascorrere a Vienna un ulteriore anno di formazione accademica in seguito al quale fu arruolato nel Genio Militare dell'esercito asburgico con il grado di sottotenente. Dapprima fu chiamato a collaborare ad alcune opere di fortificazione presso Temesvár, per poi essere trasferito nel 1826, dopo una lunga licenza trascorsa con il padre a Marosvásárhely, nella non lontana cittadina di Arad. Qui János rincontrò Johann Wolther von Eckwehr, suo docente di matematica all'Accademia Militare di Vienna, con il quale ebbe occasione di confrontarsi sul tema dei fondamenti della geometria e della teoria delle parallele. È improbabile tuttavia che Jànos possa aver trovato in lui un interlocutore particolarmente attento.

Proprio ad Arad, la salute fisica di János cominciò a mostrare segni di debolezza. Le febbri malariche intermittenti che lo colpirono dovettero contribuire ad acuire una connaturata insofferenza per le gerarchie e la scarsa attitudine alle relazioni interpersonali, tanto che i rapporti con commilitoni e superiori divennero via via sempre più difficili. Probabilmente anche per tali ragioni, Jànos fu nuovamente trasferito dapprima a Lemberg (1830) e un paio di anni più tardi presso Olmütz (1832), dove nel 1833, pur giovanissimo, ottenne il pensionamento per motivi di salute, dopo solo 10 anni di servizio nei ranghi dell'esercito asburgico. I registri militari di quell'ultimo periodo trascorso nell'esercito descrivono un giovane ben lontano dal vigore e dalla determinazione dell'adolescenza: "taciturno, irritabile, irascibile, senza alcuno zelo nei lavori di ingegneria". ([20])

Seguirono anni di relativo isolamento dapprima a Domáld e poi a Marosvásárhely dove il padre risiedeva. I rapporti con Farkas tuttavia si fecero sempre più tesi, probabilmente per dissapori di natura finanziaria e certamente per il fatto che Farkas non approvava la relazione del figlio con una certa Rozália Orbán dalla quale, pur non essendo sposato, János ebbe tre figli. In tale situazione, e nonostante la delusione per lo scarso riconoscimento del valore della sua *Appendix*, János continuò a occuparsi di matematica. Oltre che a questioni di geometria neutrale e al problema della determinazione del volume del tetraedro in ambiente non euclideo, egli si dedicò con particolare attenzione al tema dei

([19]) [Weszely 2013, pp. 28-29].

([20]) [Engel, Stäckel 1913, p. 73].

fondamenti dei numeri complessi e della loro rappresentazione geometrica e a problemi di teoria dei numeri.

Oltre alle trenta pagine scarse di cui l'*Appendix* si compone, null'altro fu pubblicato da János nel corso della sua vita. A testimonianza dei suoi numerosi interessi di ricerca (ivi inclusi anche quelli di natura non matematica) restano migliaia di pagine manoscritte, per la maggior parte ancora scarsamente studiate, che sono oggi preservate presso la Biblioteca Teleki-Bolyai di Marosvásárhely.

4. – La teoria delle parallele

In numerosi scritti autobiografici rinvenuti tra le sue carte private, János riferì alcuni dettagli sui contenuti delle lezioni di matematica che il padre gli impartì durante la sua adolescenza, sulle sporadiche discussioni che con lui intrattenne sul tema della parallele e più in generale sull'origine della proprie ricerche sulla geometria assoluta. Proprio a partire da tale materiale, è possibile ricavare un quadro affidabile del percorso intellettuale che avrebbe condotto il giovane János alla redazione dell'*Appendix*.

Apprendiamo che in svariate occasioni il padre aveva richiamato la sua attenzione sullo stato in cui versava la teoria delle parallele, delle linee rette e di altre dottrine di base. Pare tuttavia che, almeno inizialmente, Farkas abbia mantenuto un certo riserbo con il figlio circa i propri tentativi di dimostrazione dell'assioma euclideo e che solo in seguito abbia condiviso con lui alcuni frammenti delle proprie idee. Agli inizi del 1820 risale un primo confronto esplicito sul tema del quinto postulato allorquando János informò il padre del proposito di dedicarsi alla teoria delle parallele con l'intento di pervenire a una dimostrazione del postulato euclideo.

A giudicare da una lettera che scrisse al figlio nell'aprile dello stesso anno, l'impressione che la notizia esercitò su Farkas dovette essere profonda: "Non devi investigare la teoria delle parallele seguendo quel percorso; conosco questa via sino alla fine – anch'io ho attraversato questa notte senza fine, ogni luce, ogni gioia della mia vita si è spenta in essa – ti supplico, per Dio! Lascia in pace la dottrina delle parallele: dovresti provare per questa lo stesso orrore che provi per i rapporti dissoluti; essa può privarti di tutto il tuo tempo, della salute, della quiete e di tutta la tua felicità". ([21])

A dispetto di questi enfatici avvertimenti, János non si scoraggiò e si dedicò con maggiore lena al problema dei fondamenti della geometria. Come ebbe a scrivere, le parole del padre ebbero semmai l'effetto opposto di accrescere intensamente il desiderio e l'impegno. Negli anni successivi (1820-1825) il punto di vista delle sue ricerche subì una decisa inversione di rotta che lo spinse ad abbandonare il tentativo di pervenire a una prova diretta del postulato euclideo delle parallele per dedicarsi alla elaborazione sistematica delle conseguenze imposte dalla sua negazione. Nel volgere di pochi anni tale progetto avrebbe assunto la forma di una breve appendice ad una monumentale opera sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria che il padre Farkas pubblicò nel 1832.

Durante gli anni trascorsi a Vienna, János discusse del problema delle parallele con un certo Karl Szász, un compatriota di poco più anziano di lui che allora svolgeva l'attività di tutore a Vienna presso la dimora del conte Alexius Teleki. Pare che le frequenti conversazioni tra i due possano aver suggerito a János l'idea di definire la retta parallela ad una retta data r come la retta che assume la posizione limite di una secante s libera di ruotare intorno ad un punto fissato (non appartenente a r). Secondo quanto lo stesso János riferì, Szász avrebbe osservato che la retta s diventa parallela esattamente quando essa si stacca (*absprinqe*) da r. Inoltre, entrambi intuirono l'importanza teorica che la considerazione di circoli di raggio infinito avrebbe potuto assumere per la teoria delle parallele, ritenendo che il V assioma potesse essere pienamente giustificato una volta che si fosse dimostrato il fatto che tali circonferenze con raggio infinito (che prendono il nome di orocicli o paracicli) sono in effetti linee rette. ([22]).

([21]) [Engel, Stäckel 1913, p. 76].

([22]) [Engel, Stäckel 1913, p. 80]. Secondo quanto attesta una lettera (gennaio 1855) di János al padre, in anni successivi Szász tentò di assicurarsi il riconoscimento di un qualche merito nella scoperta della nuova geometria. János tuttavia fu estremamente duro nel contenere le rivendicazioni dell'amico di gioventù].

È difficile determinare con precisione quando János abbia compiuto il passo decisivo verso l'assunzione dell'ipotesi alternativa di parallelismo, che lo avrebbe condotto a sviluppare la "teoria assoluta dello spazio". In tale riguardo, viene spesso citata una lettera dello stesso János al padre (novembre 1823) nella quale vengono menzionati, in maniera piuttosto vaga per la verità, alcuni progressi compiuti nella teoria delle parallele. "Sono ormai risoluto a pubblicare un'opera sulla teoria delle parallele, appena avrò ordinato la materia e le circostanze me lo permetteranno. Non l'ho ancora fatto, ma la via che ho seguito ha certamente, per così dire, quasi raggiunto lo scopo; lo scopo proprio non è raggiunto, ma ho scoperto cose sì belle che ne sono rimasto abbagliato, e che sarebbero rimpiante in eterno se sventuratamente andassero perdute. Quando le vedrete, lo riconoscerete voi pure. Nell'attesa non vi posso dire altro che questo: ho dal nulla creato un nuovo universo. Tutto ciò che vi ho comunicato fino ad ora non è che un palazzo di carta di fronte a questa torre. Sono tanto persuaso che questo mi farà onore come se ciò fosse già avvenuto". ([23])

Non è dato tuttavia sapere con certezza in che cosa consistesse la scoperta alla quale Bolyai accennava in questo frangente né quale fosse l'obiettivo da lui menzionato. Non sembra, ad esempio, che si possa escludere l'ipotesi secondo la quale János alludesse ancora alla possibilità di ottenere delle contraddizioni a partire dalla negazione del postulato, e dunque che l'obiettivo in vista del quale le sue ricerche muovevano fosse (ancora nel 1823) una dimostrazione indiretta dell'assioma euclideo.

È certo invece che un paio di anni più tardi (1825), egli poté consegnare al padre una bozza del lavoro contente il nucleo essenziale della sua "scienza assoluta dello spazio". Secondo quanto János riferisce in un manoscritto databile intorno al 1834, la reazione di Farkas fu in un primo tempo poco favorevole. "In ogni modo immaginabile, egli [Farkas] tentò di sminuirne il valore e con tutto l'ardore di cui era capace sbraitava contro [il nuovo edificio]. Le ragioni di un tale atteggiamento io le ricercavo nella sua incapacità di penetrare l'essenza della questione. Anche in seguito alle mie spiegazioni [...], disse che questo era soltanto una rielaborazione del sistema anti-euclideo. Ma poniamo pure che si sia trattato di questo; non gli sarebbe parso una cosa di poco conto se la sua capacità di comprensione lo avesse afferrato più chiaramente e la sua mente fosse stata più aperta". ([24])

Ciò che più di ogni altra circostanza suscitò lo scetticismo di Farkas, fu l'esistenza di infiniti sistemi non euclidei (corrispondenti all'infinite scelte possibili per il parametro arbitrario k che interviene ad esempio nella espressione per la lunghezza di una L-linea ([25])). I tentativi di persuasione profusi da János per superare le perplessità del padre non riscossero il successo sperato, tanto da indurlo a interpellare l'autorità di Gauss per cercare un sostegno al nuovo e più generale edificio geometrico da lui creato.

In un manoscritto risalente al 1834, leggiamo: "Giunto alla conclusione che in quella situazione nulla poteva essere raggiunto mediante argomenti, sperai di poter instillare in lui [Farkas] la dovuta considerazione per la nozione di linee asintotiche (*Asymptoten*) facendo appello al principio di autorità. Menzionai il nome di Gauss osservando che questo colosso della geometria non solo avrebbe compreso facilmente ma avrebbe anche applaudito e riconosciuto il vero valore dell'opera. Suggerii così che il lavoro fosse inviato a questo grande uomo." ([26]) Come János cinicamente osservò, è probabile che, almeno in un primo momento, Farkas avesse assecondato questa idea per trovare in Gauss una conferma alle sostanziali riserve che egli avanzava nei confronti delle idee del figlio. Gradualmente tuttavia, Farkas dovette convincersi della straordinarietà dell'opera di János tanto che egli stesso gli suggerì di affrettarsi a renderla pubblica, poiché, come scrisse, "[...] le idee passano facilmente in un altro che subito le pubblica e [...] inoltre c'è del vero nell'affermazione secondo la quale alcune cose hanno, per così dire, una loro epoca in cui vengono scoperte in più luoghi, quasi come le violette che in primavera spuntano in quantità." ([27])

([23]) [Engel, Stäckel 1913, p. 85].

([24]) [Engel, Stäckel 1913, p. 87].

([25]) Per la definizione di L-linea, si veda §5.

([26]) [Engel, Stäckel 1913, p. 71].

([27]) [Engel, Stäckel 1913, p. 86].

Con un cospicuo contributo finanziario dello stesso János, l'opera vide la luce e fu infine pubblicata in appendice al primo volume del monumentale *Tentamen* (1832) di Farkas. Ancor prima della pubblicazione del lavoro, una copia manoscritta era stata inviata a Gauss ma, probabilmente a causa di una epidemia di colera che aveva reso precari i collegamenti postali, essa andò perduta. Una seconda copia del lavoro giunse effettivamente a destinazione qualche mese più tardi per il tramite di un nobil uomo ungherese, Josef von Zeyk, figlio del barone Daniel von Zeyk che era stato compagno di studi a Gottinga di Gauss e di Farkas. Il secondo invio era stato preceduto da una lettera dello stesso Farkas (gennaio 1832) nella quale traspariva, insieme all'alta ammirazione che János nutriva nei confronti del "colosso" di Gottinga, anche l'impazienza con la quale i due attesero l'arrivo del suo giudizio: "Mio figlio scrive da Lemberg che dopo aver reso alcune dimostrazioni più semplici ed eleganti, ha dimostrato l'impossibilità di determinare a priori se l'Assioma XI sia vero o meno. Perdonami per questo inconveniente; egli tiene più al tuo giudizio che a quello di tutta l'Europa, è la sola cosa che gli interessa. Ti chiedo sinceramente di inviarmi presto il tuo parere, che poi gli scriverò a Lemberg." ([28])

Una vivida descrizione della reazione che la lettura dell'*Appendix* suscitò in Gauss ci viene consegnata da una lettera dello stesso von Zeyk ai propri genitori. Raccontando di un incontro con Gauss, von Zeyk scrisse: "[...] si è avvicinato a me, chiedendomi se conoscevo personalmente il figlio di Wolfgang Bolyai. Gli risposi di sì. Egli allora ha esclamato: 'È una testa davvero eccellente, sì, molto eccellente'. Mi ha anche regalato una sua opera, che consegnerò ai Bolyai quando tornerò a casa. Non so se ho già scritto che quando gli ho consegnato per la prima volta il lavoro di Johann e lui ha letto il titolo, ha sorriso e ha fatto un sommesso 'Hm, hm' come se volesse dire: *magna petis, Phaëton*. ([29]) Ma a giudicare da come si è espresso ora, deve averla ritenuta corretta." ([30]) Un apprezzamento altrettanto convinto del lavoro può essere rinvenuto in una lettera all'amico Gerling ove Gauss si spinse sino a definire János "un genio di prima grandezza." ([31])

Per qualche imperscrutabile motivo intorno al quale gli storici ancora si arrovellano, nella risposta a Farkas Gauss scelse di impiegare toni meno entusiastici. Pur riconoscendo l'alto valore scientifico dell'opera, egli rivendicò una sorta di diritto di paternità sulle scoperte contenute nell'*Appendix*: "Se comincio col dire che non posso lodare questo lavoro [di János], tu certamente per un istante resterai meravigliato; ma non posso dire altra cosa, lodarlo sarebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dell'Opera, la via percorsa da tuo figlio, i risultati ai quali egli fu condotto coincidono quasi interamente con le mie meditazioni, che hanno occupato in parte la mia mente da trenta a trentacinque anni a questa parte. Così sono rimasto pienamente stupefatto. Quanto al mio lavoro personale, del quale fin qui ho ben poco affidato alla carta, era mia intenzione di non lasciare che si pubblicasse nulla durante la mia vita. Infatti la maggioranza degli uomini non ha idee chiare sulle questioni di cui si parla, ed io ho trovato ben poche persone che prestassero uno speciale interesse a ciò che comunicai loro su tale soggetto. Per poter coltivare questo interesse bisogna prima di tutto aver sentito molto vivamente ciò che manca di essenziale, e su questa materia quasi tutti brancolano in una completa oscurità. Al contrario era mia idea di scrivere, col tempo, tutto ciò, perché esso almeno non perisse con me. È dunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può ora essermi risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico ad avermi preceduto in modo così notevole." ([32])

Gauss proseguiva la lettera con considerazioni più puntuali sul contenuto dell'*Appendix*, suggerendo l'introduzione di nuovi termini, quali "paraciclo, parasfera e iperciclo" per indicare alcuni enti geometrici che János aveva definito senza tuttavia

([28]) [Engel, Stäckel 1913, p. 91].

([29]) Il riferimento è al mito di Fetonte. Una delle versioni più note è quella fornita da Ovidio in apertura del secondo libro delle *Metamorfosi*.

([30]) [Engel, Stäckel 1913, p. 92].

([31]) [Engel, Stäckel 1913, p. 72].

([32]) [Schmidt e Stackel, Ed. 1899, p. 109].

impiegare una denominazione particolare per designarli, ed osservando che proprio nell'impossibilità di decidere a priori sulla validità del sistema Σ o dei sistemi S ([33]) si poteva rinvenire una prova del fatto che Kant si era sbagliato allorquando nella sua estetica trascendentale aveva sostenuto che lo spazio è soltanto una forma della nostra intuizione (*Anschauung*).

Le rivendicazioni di Gauss hanno trovato una sostanziale conferma. Infatti, l'esame delle lettere e delle carte private pubblicate in [Gauss Werke 1863-1933, Vol. VIII] dimostra al di là di ogni dubbio che, ben prima di leggere l'*Appendix*, egli aveva ricavato un buon numero di proprietà caratteristiche della geometria iperbolica. Tuttavia, appare incerto, se non improbabile, che egli abbia condotto le proprie ricerche sul tema sino ad un livello di sistematicità e di estensione paragonabile a quello raggiunto da János.

Al di là di tali incertezze, è certo invece che la risposta di Gauss ebbe un effetto deleterio sulla fragile psicologia di János, gettandolo in un penoso stato di isolamento e di delusione. Egli giunse persino a sospettare che Gauss con l'appoggio di Farkas mirasse ad appropriarsi della paternità dei risultati dell'*Appendix*. In seguito, pur convintosi dell'infondatezza di un tale sospetto, criticò con asprezza l'atteggiamento di estremo riserbo che Gauss aveva assunto nei riguardi della proprie idee sull'argomento, imputandogli di contribuire in tal modo a relegare la scienza in uno stato dormiente, quasi "letargico".

Un nuovo motivo di risentimento nei confronti del matematico di Gottinga si originò molti anni più tardi quando nel 1848 per il tramite di Farkas e indirettamente dello stesso Gauss, János giunse a conoscenza dell'opera di Lobačevskij e in particolare delle sue *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (1840). La scoperta dell'esistenza di questo lavoro acuì il senso di frustrazione che la celebre risposta di Gauss aveva suscitato in lui nel 1832. Accanto al mancato riconoscimento per l'alto valore della sua opera, si aggiungeva ora il rischio concreto che qualcun altro si appropriasse della paternità dei risultati dell'*Appendix*.

Un cospicuo numero di pagine manoscritte (redatte in ungherese) rinvenute tra le carte private ([34]) del *Nachlass* documentano con grande dettaglio il corso dei pensieri che la lettura di [Lobačevskij 1840] suscitò in János. La reazioni oscillarono dai paranoici sospetti sulla reale identità del loro autore, dietro la quale si sarebbe celato lo stesso Gauss, a considerazioni più ponderate con le quali János intendeva marcare significative divergenze di vedute rispetto ad alcuni procedimenti adottati da Lobačevskij. È forse lecito guardare alle *Bemerkungen* come a una sorta di "lamento tragico" ([35]) con il quale János si affannò di ricercare quell'approvazione e quel riconoscimento che sarebbero arrivati soltanto dopo la sua morte, qualche decennio più tardi.

5. – Il contenuto dell'Appendix

Con l'espressione *scienza assoluta dello spazio* che compare nel sottotitolo dell'*Appendix* János si riferiva al sistema deduttivo di proposizioni che egli dimostrò indipendentemente dalla particolare ipotesi adottata sul parallelismo. La geometria euclidea (indicata con il simbolo Σ) da un lato e quella iperbolica (indicata con S) dall'altro si configuravano nell'approccio del giovane Bolyai come specializzazioni di tale scienza assoluta (ciò che oggi chiameremmo geometria neutrale). Come giustamente rilevato in [Bonola 1906, p. 92], a differenza di Lobačevskij il quale fu maggiormente interessato a sviluppare le conseguenze della "geometria immaginaria", János esaminò con maggiore cura "le proposizioni e le costruzioni [...] che non dipendono dal postulato" delle parallele. Tra i teoremi assoluti spiccano le seguenti proposizioni trigonometriche: i) In un triangolo rettilineo le circonferenze di raggio uguale ai lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti [Bolyai J. 1832, §25]; ii) in un triangolo sferico i seni degli angoli e i seni dei lati sono proporzionali [Bolyai J. 1832, §26].

([33]) Si veda §5.

([34]) Esse sono raccolte sotto il titolo seguente che riportiamo nella traduzione tedesca di Stäckel: "*Bemerkungen über Nicolaus Lobatschefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*".

([35]) L'espressione si trova in [Kagan 1948].

Quanto ai sistemi S (infiniti in numero, poiché la geometria dipende da un parametro indeterminato che retrospettivamente può essere identificato con la curvatura dello spazio), Bolyai presentava un notevole numero di costruzioni tra le quali riveste un particolare rilievo la quadratura di *alcuni* cerchi iperbolici.

Al di là dei singoli risultati di dettaglio, è opportuno riflettere sul significato che Bolyai accordò ai sistemi geometrici del tipo S. Hanno eguale legittimità di Σ? È possibile provare l'indimostrabilità del postulato delle parallele (a partire dai restanti assiomi euclidei)?

Nella sezione finale dell'*Appendix*, Bolyai aveva menzionato il problema di decidere quale fra i diversi sistemi geometrici sviluppati sussista effettivamente, rimandando la dimostrazione della impossibilità di una tale decisione ad un momento più opportuno. Sembra infatti che sin dalla redazione conclusiva dell'*Appendix*, Bolyai fosse convinto di tale impossibilità e addirittura di poter produrne una dimostrazione. Ciò risulta confermato anche da una serie di note a margine alla edizione tedesca della stessa opera, alla quale Bolyai lavorò fra il 1833 e il 1835. In una di queste si legge: "Se ora entra in gioco la prova della impossibilità di decidere fra Σ e S (prova di cui l'autore dispone), allora l'essenza dell'Assioma XI è pienamente spiegata e l'intricata materia delle parallele compresa appieno [...]. L'autore ha la ferma convinzione che attraverso il chiarimento di questa materia sarà realizzato uno dei contributi più importanti e più luminosi al vero arricchimento della Scienza e quindi all'elevazione del destino dell'Uomo". ([36])

Non sono noti gli argomenti che spinsero Bolyai a riporre tanta fiducia nella possibilità di fornire una tale dimostrazione di impossibilità. Come osservano Stäckel e di riflesso anche Bonola, è probabile che una tale sicurezza gli derivasse dalla convinzione che non era possibile dedurre contraddizioni a partire dalle applicazioni stereometriche della trigonometria iperbolica. In ogni caso, in anni successivi, le ricerche di Bolyai subirono un radicale cambiamento di rotta che lo condusse a esplorare nuovamente la possibilità di dimostrare il postulato delle parallele. Per qualche tempo, egli fu addirittura convinto di aver ottenuto il risultato mediante la scoperta (evidentemente erronea) di una contraddizione nelle relazioni trigonometriche che sussistono fra 5 punti dello spazio. Accortosi dell'errore, egli tuttavia non procedette oltre in questa direzione.

Tralasciando la questione dello status epistemologico che Bolyai attribuì ai sistemi S, ci rivolgiamo ad esaminare i principali risultati dell'*Appendix*. Occorre però sin da subito rilevare una caratteristica fondamentale dell'approccio di Bolyai, proprio per la verità anche delle contemporanee ricerche di Lobačevskij, e cioè il ricorso a considerazioni di natura tridimensionale. È questo un punto di svolta decisivo che aprì di fatto alla possibilità di assumere la geometria dei sistemi S come un candidato idoneo a descrivere le proprietà dello spazio fisico. Come giustamente viene sottolineato in [Gray 2011, p. 105]: "Bolyai [...] made a vital shift into three dimensions. No previous investigations of the parallel postulate had taken this route, and it shows that Bolyai was concerned that his new geometry be taken as a possible geometry of physical space. It also allowed him to develop crucial results that gave his results any chance of convincing a skeptical public. It also makes the exposition quite unlike Euclid's Elements."

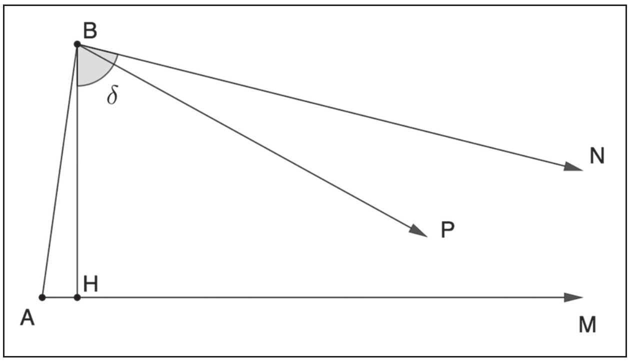

FIGURA 1 – La definizione di parallelismo.

Il punto di partenza di Bolyai fu una nuova definizione per il parallelismo tra semirerette. Una prima distinzione importante rispetto al caso euclideo, chiaramente messa in luce nei primi paragrafi dell'*Appendix*, era la necessità di considerare il parallelismo in un dato verso, distinguendo tra parallelismo destro e parallelismo sinistro. La definizione adottata è la seguente (si veda la figura figura 1): "se una semiretta $\overrightarrow{BN}$ non interseca la

([36]) [Stäckel 1900, pp. 290-291].

semiretta complanare $\overrightarrow{AM}$, mentre ogni altra semiretta $\overrightarrow{BP}$ in ABN la interseca, allora scriveremo $\overrightarrow{BN}|||\overrightarrow{AM}$." ([37])

Sulla base di questa definizione Bolyai dedusse un certo numero di proprietà fondamentali tra le quali spiccano la transitività del parallelismo in un verso fissato e l'esistenza di punti A, B cosiddetti corrispondenti che giacciono su due parallele e che inoltre sono tali che l'angolo $\angle MAB$ e l'angolo $\angle ABN$ sono congruenti.

La nozione di punti corrispondenti consentì a János di introdurre due enti fondamentali del proprio sistema: una curva piana e una superficie dello spazio che nel caso dei sistemi S sono oggi note con la denominazione (introdotta da Lobačevskij) di oprociclo e orosfera (il riferimento è alla figura figura 2): presa una semiretta $\overrightarrow{AM}$ di origine A e una semiretta $\overrightarrow{BN}$ complanare ad $\overrightarrow{AM}$ e ad essa parallela nel senso della definizione sopra riportata, sia B quell'unico punto di $\overrightarrow{BN}$ tale che gli angoli in A e in B (individuati dalla retta $\overrightarrow{AB}$ e dalle semirette $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$) siano congruenti. Al variare della semiretta $\overrightarrow{BN}$ tra le parallele ad $\overrightarrow{AM}$ nel medesimo piano, i punti B così individuati descrivono una curva che Bolyai indicò con il simbolo L. Al variare del piano passante per la retta AM le curve L così ottenute descrivono una superficie nello spazio che Bolyai designò con il simbolo F (probabilmente dalla iniziale della parola tedesca *Fläche* che appunto significa superficie).

L'importanza di tale superficie risiede nel fatto che, pur di considerare come linee rette segmenti di L-linea che uniscono due punti qualsiasi della superficie F, valgono su di essa tutti i risultati della geometria euclidea. In particolare, impiegando un linguaggio palesemente anacronistico, si può dire che la geometria di incidenza determinata su una superficie F dai suoi punti e dalle L-linee su di essa tracciate soddisfa all'assioma delle parallele. La dimostrazione di Bolyai faceva leva su considerazioni di natura spaziale che si

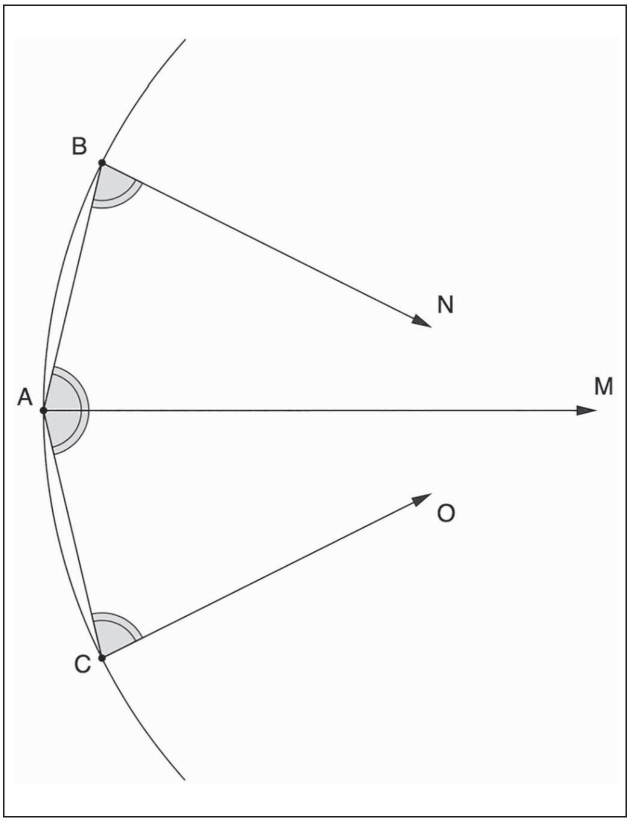

FIGURA 2 – La definizione di L-linea.

riducevano in buona sostanza al contenuto del seguente teorema, valido indipendentemente dall'assunzione del postulato delle parallele e che rappresenta una sorta di estensione in dimensione tre del postulato di Playfair: data una retta r parallela un piano Π esiste uno ed un solo piano passante per r e parallelo a Π. Alla luce di questo risultato, che Bolyai enunciò nella §9 in termini leggermente diversi da quelli qui adottati, si poteva concludere che:

> Duae lineae L-formes $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BD}$ in eodem F, cum tertia L-formi $\overrightarrow{AB}$ summam internorum $< 2R$ efficientes, se mutuo secant [...]. ([38])

che in effetti stabilisce la validità del postulato delle parallele sulla superficie F proprio nella formulazione con la quale l'assioma è assunto negli *Elementi*.

([37]) Bolyai impiegò il più familiare simbolo || solo per indicare la relazione di equidistanza, ad esempio tra un arco di iperciclo e il segmento di retta corrispondente oppure tra due archi concentrici di orocicli (L-linee). A tal riguardo, occorre segnalare una certa incoerenza (di notazione e di concetto) nella edizione italiana [Pettoello Ed. 2009]. I simboli ||| e || non vengono distinti; sono resi entrambi con la notazione ||.

([38]) Due L-linee $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BD}$ tracciate sulla medesima F-superficie, che formino con una terza L-linea $\overrightarrow{AB}$ angoli interni la cui somma è $< 2R$, si intersecano [...]. [Bolyai J. 1832, §21, p. 9].

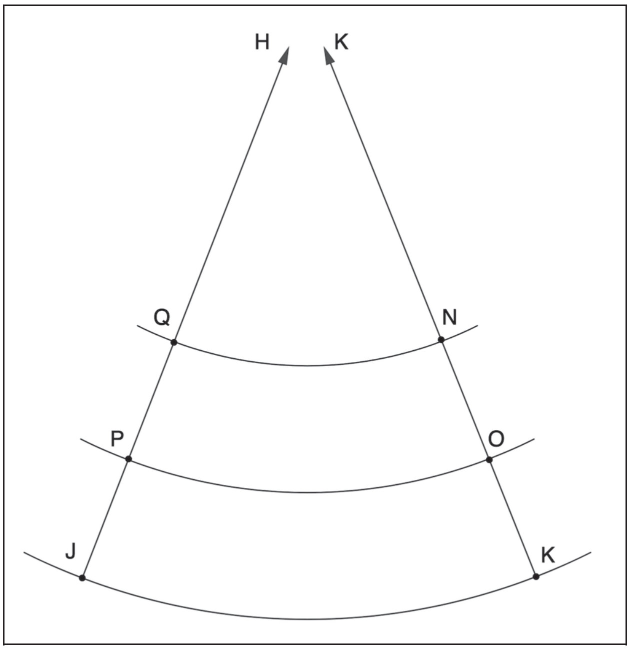

FIGURA 3 – Archi concentrici di L-linee. Posto $\widehat{JK}/\widehat{PO} = X$ e $\overline{JP} = \overline{OK} = x$, si ha $X = e^{x/k}$.

Bolyai sfruttò tale proprietà per ricavare un numero considerevole di risultati: in primo luogo, le relazioni trigonometriche per il sistema S, ivi incluso il citato teorema, valido sia nel sistema euclideo che nei sistemi S, secondo il quale "in un triangolo rettilineo le circonferenze di raggio uguale ai lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti"; quindi, la misura della circonferenza (iperbolica) in funzione del raggio: $C(r) = 2\pi k \sinh r/k$.

Un ruolo essenziale nello struttura deduttiva dell'*Appendix* riveste la determinazione dell'angolo di parallelismo cioè della espressione $\tan(\angle HBN) = 1/\sinh(y/k)$ per l'angolo $\delta = \angle HBN$ in funzione della distanza $y := \mathrm{d}(H,B)$ tra il punto B e la sua proiezione ortogonale H sulla retta AM (si veda la figura 1). Si tratta di una argomentazione complessa che si articola lungo varie sezioni, 21-29§§, nelle quali Bolyai ricavò alcuni risultati preliminari tra i quali: la determinazione della relazione funzionale che lega da un lato il rapporto X fra la misura di due archi concentrici di L-linee e dall'altro la distanza relativa x tra tali archi: $X = e^{x/k}$, §§23-24, (figura 3); e la determinazione del rapporto tra arco di iperciclo e la corrispondente proiezione su una retta equidistante, §27.

La successiva sezione 32 è particolarmente significativa. In essa viene affrontato il problema della determinazione dell'area del cerchio e del volume della sfera. Per questo scopo, Bolyai introdusse un sistema di coordinate oggi dette ipercicliche, che costituisce una naturale generalizzazione di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali: con riferimento alla figura 4, la posizione di un generico punto P è individuata dalle coordinate x e y che denotano rispettivamente la distanza (con segno) del punto M, piede della proiezione perpendicolare di P sulla retta di riferimento OM, da O e la misura (con segno) della distanza PM.

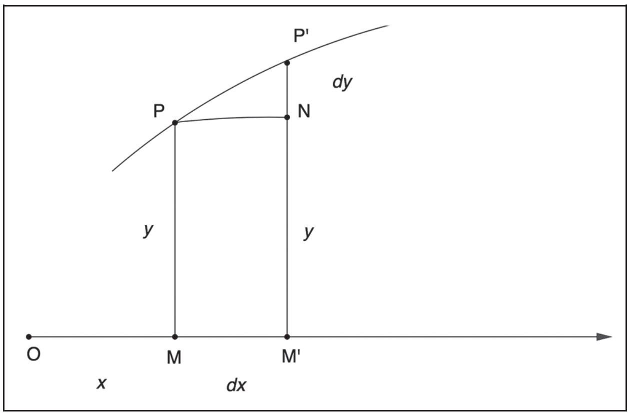

FIGURA 4 – Le misure dei segmenti OM e PM dotate di un segno opportuno individuano le coordinate ipercicliche (x, y) del piano iperbolico. $\widehat{PN}$ denota l'arco di iperciclo a distanza y dai punti dell'asse delle x.

In realtà Bolyai affrontò in questa sezione il problema ben più generale di fornire una espressione esplicita per la lunghezza di archi e per l'area di figure individuate da curve qualunque nel piano. Per risolvere la prima questione, egli considerò due punti $P = (x, y)$ e $P' = (x + dx, y + dy)$ posti a distanza infinitesima l'uno dall'altro, su di una curva qualunque descritta dall'equazione $y = f(x)$ e affermò, senza peraltro fornire alcuna spiegazione, il sussistere della relazione seguente:

$$\frac{\widehat{PP'}^2}{dy^2 + \widehat{PN}^2} \to 1, \tag{1}$$

che consente di esprimere la misura dell'arco infinitesimo $\widehat{PP'}$ in funzione dei differenziali delle coordinate. [Kárteszi Ed. 1987, pp. 166-167] ha proposto una ricostruzione convincente dell'argomento che Bolyai potrebbe aver seguito nella deduzione di (1), che è basata su considerazioni trigonometriche piuttosto complesse. Una dimostrazione più diretta della relazione equivalente $\widehat{PP'}^2 = dy^2 + \widehat{PN}^2$ può tuttavia essere ricavata a partire dalla proprietà secondo la quale nell'infinitamente piccolo la geometria dei sistemi S si riduce alla geometria euclidea. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo infinitesimo $\triangle PP'N$, si ha infatti: $\overline{P'N}^2 + \widehat{PN}^2 = \widehat{PP'}^2$.

A partire da (1) e dal fatto che $\widehat{PN} = \cosh \dfrac{y}{k}\,\mathrm{d}x$, il calcolo dell'arco di una qualunque curva poteva in effetti essere effettuato determinando il valore dell'integrale:

$$\int \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cosh^2 \frac{y}{k}}\,\mathrm{d}x,$$

entro opportuni estremi di integrazione.

In maniera analoga, Bolyai procedette a ricavare l'espressione per l'area $A(y)$ sottesa dalla curva $y(x)$ entro l'intervallo $a \leq x \leq b$, che dimostrava essere uguale a:

$$A(y) = \int_a^b k\sinh \frac{y(x)}{k}\,\mathrm{d}x;$$

ciò dipende dal fatto che l'area della striscia infinitesima $MPNM'$, individuata dal segmento di iperciclo $\widehat{PN}$, è pari a $k\sinh y(x)/k\mathrm{d}x$. (39) Tra le conseguenze più significative dell'espressione per $A(y)$, spicca la possibilità di determinare la misura dell'area del cerchio (iperbolico) di raggio r. Lo stesso Bolyai, pur non fornendo alcun dettaglio, spiegò che a tal fine era sufficiente considerare la curva $y(x)$ che descrive il profilo di una circonferenza con centro nell'origine e raggio r. In effetti, è agevole verificare che $y(x)$ risulta descritta implicitamente dalla relazione $\cosh r/k = \cosh x/k \cdot \cosh y(x)/k$, che è una conseguenza immediata del teorema di Pitagora (iperbolico) – ricavato in §31. Dal che si ricava l'espressione esplicita:

$$\sinh y(x)/k = \sqrt{\left(\frac{\cosh(r/k)}{\cosh(x/k)}\right)^2 - 1},$$

e infine il valore dell'area:

$$A(r) = 4k \int_0^r \sqrt{\left(\frac{\cosh(r/k)}{\cosh(x/k)}\right)^2 - 1}\,\mathrm{d}x = 4\pi k^2 \sinh^2(r/2k).$$

Il contenuto della sezione 32 può agevolmente essere interpretato alla luce degli strumenti della teoria delle varietà. Così, ad esempio, l'espressione analitica per il quadrato della lunghezza dell'arco $\widehat{PP'}$, che può essere ricavata a partire da (1), è identificabile con $\boldsymbol{g} = \cosh^2 \dfrac{y}{k}\, dx \otimes dx + dy \otimes dy$, espressione in coordinate ipercicliche della metrica di una varietà bidimensionale (superficie astratta) a curvatura costante e negativa (pari a $-1/k^2$). Allo stesso modo, è possibile interpretare $A(y)$ come l'integrale della forma invariante $\sqrt{\det \boldsymbol{g}}\, dx \wedge dy$ associata a $\boldsymbol{g}$.

Occorre tuttavia precisare che nell'*Appendix* e più in generale nei manoscritti rinvenuti nel *Nachlass* di Bolyai non vi è traccia alcuna di una identificazione della geometria dei sistemi S con la geometria di una superficie (astratta o immersa), con curvatura costante negativa. Del resto tale circostanza non dovrebbe apparire sorprendente. Il ricorso sistematico alle nozioni e ai metodi della geometria differenziale nel contesto dello studio delle geometrie non euclidee si sarebbe affermato soltanto qualche decennio più tardi per opera di Riemann e di Beltrami. (40) L'approccio di Bolyai alla geometria dovrebbe piuttosto essere descritto nei termini di un visione prevalentemente sintetica nella quale tuttavia assumono un ruolo non trascurabile l'impiego di opportuni sistemi di coordinate e i metodi del calcolo infinitesimale.

6. – La "quadratura" del cerchio

Tra i risultati più sorprendenti dell'*Appendix* vi è senza dubbio la costruzione con riga e compasso di un cerchio e di un quadrato di uguale area (pari πk^2). Bolyai dovette essere ben consapevole della straordinarietà della costruzione che contraddistingue i sistemi S rispetto al sistema Σ, tanto da inserire un

(39) L'area individuata da due ipercicli che distano y e $y + \mathrm{d}y$ dalla retta $y = 0$ e dalle rette $x = x_0$, $x = x_0 + dx$ è pari a $\cosh(y/k)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Integrando in $\mathrm{d}y$ tra 0 e y, si ottiene l'area della striscia infinitesima $MPNM'$, $A(MPNM') = \int_0^y \cosh(y/k)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\sinh y(x)/k\mathrm{d}x$.

(40) La questione dei rapporti fra teoria delle superfici e geometria non euclidea sarà riesaminata in una sezione successiva.

riferimento esplicito nel titolo dell'opera: "Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipendentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica". È questa probabilmente un'indicazione del fatto che la quadratura del cerchio rappresentasse agli occhi di Bolyai una sorta di culmine deduttivo della trattazione dell'*Appendix*. In effetti, è lecito interpretare la struttura delle sezioni §§34-42 come interamente orientata allo svolgimento della sezione conclusiva (§43), dedicata al problema della quadratura del cerchio.

La quadratura proposta da Bolyai, limitata al cerchio e al quadrato di area πk^2, consiste in due costruzioni distinte che consentono di determinare (con riga e compasso) un cerchio e un quadrato equivalenti. Bolyai accennò inoltre al problema di stabilire per quali altri valori dell'area comune del cerchio e del quadrato esiste una costruzione siffatta. Tuttavia egli si limitò ad enunciare, senza dimostrazione, il risultato (corretto) secondo il quale essi sono dati dai valori $\pi k^2 \tan^2 z$ per i quali $\tan^2 z$ è una frazione m/n (ridotta ai minimi termini), dove n è un intero tale che il corrispondente poligono regolare di n lati può essere costruito con riga e compasso nel piano euclideo. ([41])

Rivolgiamoci dapprima alla costruzione del cerchio di area πk^2. L'idea alla base del ragionamento proposto da Bolyai consiste nell'introduzione di un angolo ausiliario z, univocamente associato al cerchio di raggio r, e tale da rendere soddisfatta la seguente relazione:

$$\pi k^2 \tan^2 z = 4\pi k^2 \sinh^2 \frac{r}{2k} = A(r). \tag{2}$$

La proprietà fondamentale di tale angolo è descritta dal seguente risultato (riformulato in termini moderni) che stabilisce il sussistere di una piena equivalenza fra la costruibilità di z e quella di un segmento di lunghezza r:

TEOREMA 6.1. – (Bolyai, §43) *Dato un angolo acuto la cui misura in radianti è z esiste una costruzione con riga e compasso di un segmento di lunghezza r tale che* $\tan^2 z = 4\sinh^2 r/2k$. *Viceversa, dato un segmento di lunghezza r esiste una costruzione con riga e compasso dell'angolo di misura (in radianti) pari a z e tale che* $\tan^2 z = 4\sinh^2 r/2k$.

([41]) A tal proposito si può consultare [Jagy 1995].

Se si assume la validità di questo risultato, la costruibilità del cerchio di area πk^2 è subito ottenuta a partire dalla semplice osservazione che l'angolo di $\pi/4$ è costruibile con riga e compasso. Infatti, l'angolo retto è costruibile (come nel sistema Σ così anche nei sistemi S) e inoltre l'operazione di bisezione di un angolo è effettuabile mediante l'impiego di riga e compasso.

Vediamo come a partire dall'angolo z, che è supposto dato, si giunga alla costruzione del segmento di lunghezza r corrispondente. Per quanto elementare, la procedura è piuttosto articolata; essa sfrutta alcune costruzioni caratteristiche della geometria dei sistemi S: in primo luogo, a) la costruzione di una retta passante per un punto dato e parallela (asintotica) a una retta data (§34); quindi, b) la costruzione del segmento di parallelismo corrispondente ad un angolo dato (§35) e infine c) la costruzione di punti corrispondenti su due rette parallele date (§37).

Esaminiamo a titolo di esempio la costruzione a). ([42]) Sia $\overrightarrow{MN}$ la (semi)retta data e D un punto ad essa esterno. Si tracci la perpendicolare ad $\overrightarrow{MN}$ da D e sia B il suo piede. Si scelga, ad arbitrio, un punto A dalla parte opposta di N rispetto a DB. E da A si tracci la perpendicolare $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{MN}$. A partire da D si tracci quindi la perpendicolare ad $\overrightarrow{AC}$; sia F il piede di D su tale perpendicolare. Il quadrilatero $DBAF$ così individuato avrà tre angoli retti e un angolo acuto in D. Ora la misura del segmento FD è tale da soddisfare la seguente relazione (§27): ([43]) $\sinh\left(\overline{FD}/k\right) : \sinh\left(\overline{AB}/k\right) = 1 : \sin\Pi(\overline{DB})$; ne deriva che se si traccia il cerchio con centro A e raggio $\overline{FD}$, esso intersecherà il segmento BD in un punto O che è tale da rendere l'angolo $\angle AOB$

([42]) Il riferimento è alla figura 5.

([43]) Una presentazione succinta dell'argomento (stereometrico) svolto da Bolyai per dimostrare tale risultato può essere rinvenuta in [Bonola 1906, pp. 95-96]. Una dimostrazione alternativa, di natura trigonometrica, è fornita invece in [Martin 1998, pp. 435-436].

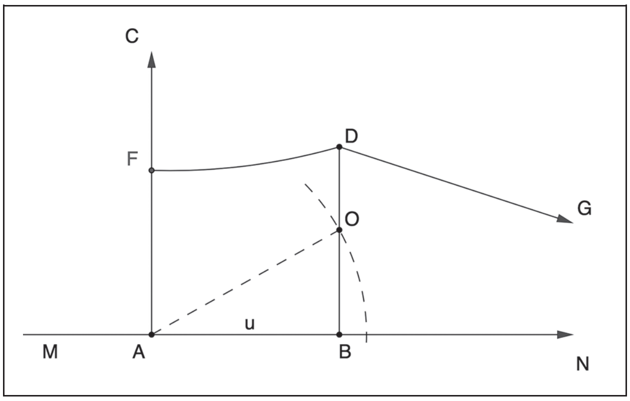

FIGURA 5 – La costruzione della parallela $\overrightarrow{DG}$. $\angle BDG = \angle AOB$.

uguale a $\Pi(\overline{DB})$. Ciò è una conseguenza del citato teorema dei seni (§25) applicato al triangolo rettangolo $\triangle AOB$. Infatti, si ha: $\sinh\left(\overline{AO}/k\right) : \sinh\left(\overline{AB}/k\right) = 1 : \sin(\angle AOB)$; e tenuto conto che $\overline{AO} = \overline{FD}$, si ricava immediatamente che è $\angle AOB = \Pi(\overline{DB})$.

Si conclude che ai fini della costruzione della retta $\overrightarrow{DG}$ è sufficiente trasportare l'angolo $\angle AOB$ in maniera tale che il lato AO coincida con il lato BD. La direzione del secondo lato OB fornisce la direzione della parallela $\overrightarrow{DG}$ richiesta.

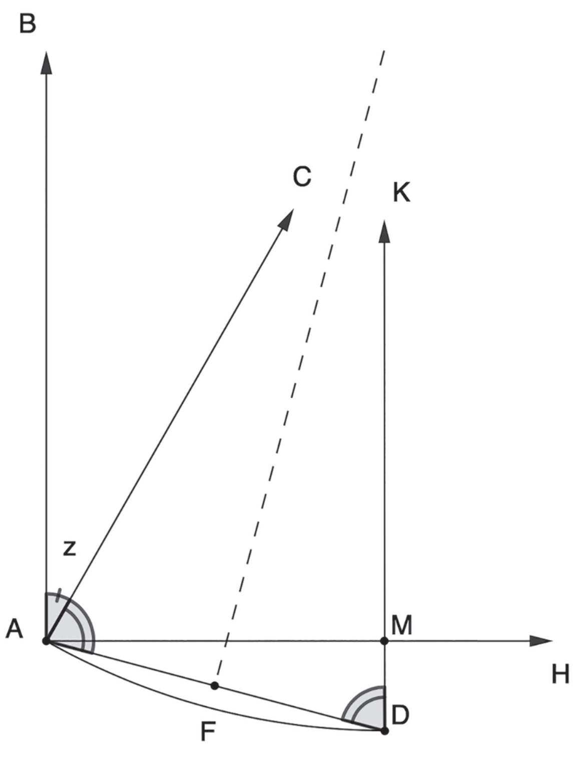

FIGURA 6 – La costruzione di r a partire da z. La retta tratteggiata passante per F è asse del segmento AD.

Con riferimento alla figura 6, torniamo ora alla costruzione di r a partire da z, supponendo di disporre oltre che della costruzione a) anche di b) e c). Sia $z = \angle BAC$ l'angolo acuto dato. Tracciamo la perpendicolare $\overrightarrow{AH}$ al lato $\overrightarrow{AB}$. Quindi, servendoci di b) tracciamo la semiretta $\overrightarrow{MK}$, perpendicolare ad $\overrightarrow{AH}$ e parallela ad $\overrightarrow{AC}$. Infine, mediante la costruzione c), è possibile determinare il punto D, che è il punto corrispondente ad A rispetto alle parallele $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DK}$. La misura r del segmento AD soddisfa alla relazione $\tan^2 z = 4\sinh^2 r/2k$. Infatti, ponendo $s := \overline{AM}$:

$$\begin{aligned} \tan z &= \cot\Pi(s) = \sinh(s/k) = \\ &= \sinh(r/k)\sin(\Pi(r/2)) = 2\sinh(r/2k). \end{aligned} \tag{3}$$ [44]

Occorre infine esaminare la costruzione di un quadrato di area πk^2. Tale "quadrato", che ha angoli di $\pi/4$, è costruito mediante giustapposizione di otto triangoli rettangoli (congruenti [45]) tra loro) aventi angoli di $\pi/2, \pi/4, \pi/8$. Il fatto che l'area di questo quadrato è proprio pari a πk^2 dipende dalla formula per l'area di un triangolo che è proporzionale al suo difetto angolare [Bolyai J. 1832, §43]. [46] In questo modo, il problema può essere ricondotto alla costruzione con riga e compasso di un triangolo rettangolo opportuno.

La soluzione che rinveniamo in [Bolyai J. 1832, §43] è piuttosto sintetica e non particolarmente chiara. Forse anche per questo motivo [Bonola 1906, pp. 98-99] evita di proporre un commento dettagliato del passo, limitandosi ad offrire una dimostrazione alternativa che consiste nella determinazione dei segmenti di parallelismo corrispondenti agli angoli $\pi/4$ e $3/8\pi$.

È tuttavia possibile proporre una interpretazione della costruzione più aderente al testo dell'*Appendix*.

---

(44) Evidentemente, $z = \pi/2 - \Pi(s)$. Inoltre, nella terza uguaglianza si è tenuto conto del fatto che $\angle ADM = \Pi(r/2)$. Infatti la retta tratteggiata, che è l'asse del segmento AD, è parallela alle rette $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DK}$.

(45) La specificazione è ovviamente superflua.

(46) L'area di un triangolo di angoli $\pi/2, \pi/4, \pi/8$ è data da $k(\pi - \pi/2 - \pi/4 - \pi/8) = k\pi/8$.

Il passo è il seguente ([47]):

> Porro (Fig. 23) construitur quadrilaterum ex. gr. regulare $= \square$, ut sequitur. Sit $\angle ABC = R, \angle BAC = 1/2R, \angle ACB = R/4$, et $BC = x$; poterit X (ex §31.II) per meras radices quadraticas exprimi, et (per §37) constitui: habitoque X, (per §38, sive etiam 29 et 35) x ipsum determinari potest. Estque octuplum $\triangle ABC$ manifesto $= \square$ [...]. ([48])

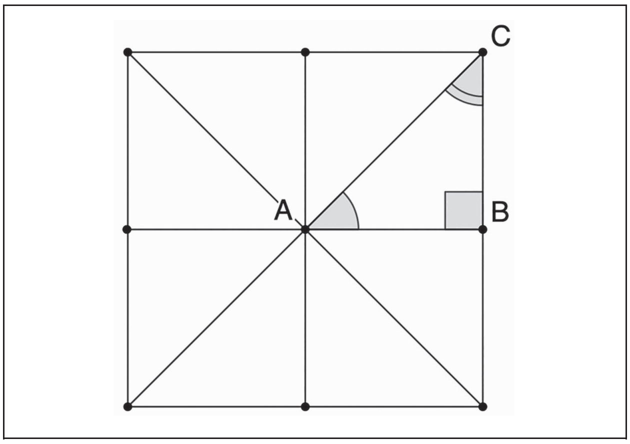

FIGURA 7 – $\angle CAB = \pi/4$, $\angle ACB = \pi/8$, $\angle ABC = \pi/2$.

L'intero problema della costruzione del triangolo ABC è ricondotto alla determinazione con riga e compasso del lato BC. Avendo posto $x := BC$ e denotando con X la quantità $e^{x/k}$, che rappresenta il rapporto tra archi concentrici di L-linee posti a distanza x, si ha: $\cos\pi/4 : \sin\pi/8 = \cosh x/k = 1/2\left(X + X^{-1}\right)$. Ne deriva, come si evidenzia nel testo sopra riportato, che X è esprimibile mediante radici quadrate. ([49]) Quindi, ponendo $\sin u := 1/X$, si ricava che u è un angolo costruibile nel piano euclideo. Ora entra in gioco un risultato cruciale che Bolyai aveva esposto

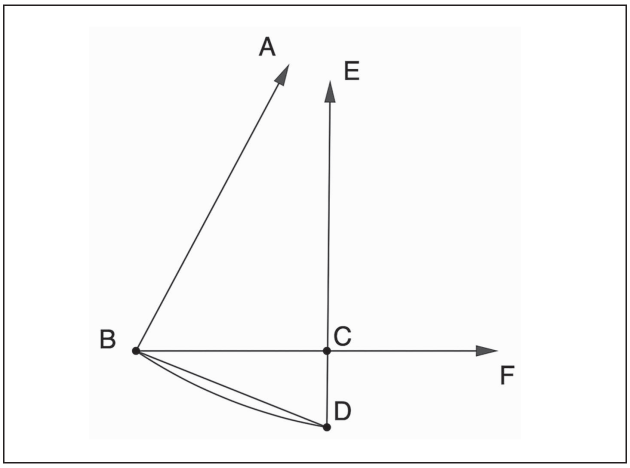

FIGURA 8 – $\angle ABF = u$, con $1/\sin u = X$. I punti B e D sono punti corrispondenti, cioè: $\angle ABD = \angle BDE$. $CD = x$ è tale che $X = e^{x/k}$.

in §37: se un angolo è costruibile nel piano euclideo (nel sistema Σ) esso è costruibile nel piano iperbolico (nei sistemi S). Dunque, u è costruibile anche nei sistemi geometrici S. ([50]) Finalmente, a partire da u, è possibile costruire x. La procedura, descritta in §38, è la seguente. Con riferimento alla figura 8, si consideri l'angolo $\angle ABF = u$ e, applicando la procedura b), si tracci la semiretta $\overrightarrow{CE}$ parallela ad $\overrightarrow{BA}$ e ortogonale a $\overrightarrow{BF}$. Quindi si individui mediante c) il punto D sulla parallela $\overrightarrow{CE}$ che corrisponde a B. Il segmento CD ha misura pari alla x richiesta. Infatti, effettuando le seguenti posizioni: $z := \overline{BD}, y := \overline{BC}, \alpha := \angle BDE$ si ricava facilmente: ([51])

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sinh(z/2k)},$$

$$\tan\alpha = \frac{\tanh(y/k)}{\sinh(x/k)},$$

$$\cosh(z/k) = \cosh(x/k)\cosh(y/k);$$

([47]) (Fig. 23) coincide essenzialmente con la figura 7 qui di seguito riportata.

([48]) "D'altronde (Fig. 23) si costruisce il quadrilatero p. e. regolare $= \square$ come segue. Sia $\angle ABC = R, \angle BAC = 1/2R$, $\angle ACB = R/4$, e $BC = x$; potrà esprimersi X (per §31.II) per sole radici quadrate, e (per §37) costruirsi: ottenuto X, (per §38, o ancora 29 e 35) può determinarsi lo stesso x. È l'ottuplo del $\triangle ABC$ manifestamente $= \square$ [...]" [Bolyai J. 1832, §43].

([49]) Cioè X è costruibile, infatti: $\deg \mathbb{Q}(X)/\mathbb{Q}$ è una potenza di 2.

([50]) L'argomento impiegato da Bolyai è di natura stereometrica e fa leva sul fatto che ogni angolo costruibile nel piano euclideo è costruibile anche su una F-superficie. Per una dimostrazione di tale risultato che sfrutta i modelli $\mathbb{H}$ o $\mathbb{D}$ si può consultare [Greenberg 2008, p. 525].

([51]) La prima delle tre relazioni seguenti è conseguenza del fatto che nella configurazione geometrica descritta in figura 8, l'asse del segmento BD è parallelo alle semirette $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{DE}$. Le altre due equazioni sono conseguenza di ben note relazioni trigonometriche per il triangolo rettangolo $\triangle BCD$.

da cui si ottiene:

$$\frac{\tanh(y/k)}{\sinh(x/k)} = \sqrt{\frac{2}{\cosh(x/k)\cosh(y/k) - 1}}.$$

Finalmente, ricordando che è $\cosh(y/k) = 1/X$, si deduce la relazione:

$$\frac{1 - X^2}{\sinh^2(x/k)} = \frac{2X}{\cosh(x/k) - X},$$

che restituisce, come unica soluzione accettabile ($X \geq 1$), $X = e^{x/k}$. In tal modo il problema della costruzione con riga e compasso di un quadrato e di un cerchio di area πk^2 può dirsi risolto.

7. – Gauss e la geometria non euclidea: le lettere a Schumacher (1831)

Il problema storiografico di valutare la natura e la rilevanza delle ricerche di Gauss nel campo delle geometrie non-euclidee non è banale. Esso si deve confrontare con la sua ritrosia a pubblicare i risultati non adeguatamente rifiniti delle proprie ricerche e con il timore esplicitamente confessato di attirare le "strida" dei critici. Tale circostanza ci ha consegnato una scarna traccia di materiale manoscritto, per lo più lettere, dalle quali è possibile desumere solo una vaga e imprecisa idea dell'estensione e della profondità delle ricerche di Gauss sul tema della teoria delle parallele.

Al di là di queste oggettive difficoltà storiografiche, un fatto sembra stabilito con certezza: fin da giovanissimo, Gauss ebbe piena consapevolezza dello stato insoddisfacente delle ricerche intorno ai fondamenti della geometria e dei problemi posti dall'assioma delle parallele. Ciò emerge in maniera chiara ad esempio proprio dalla corrispondenza epistolare con Farkas Bolyai.

Col trascorrere degli anni, la convinzione che il postulato delle parallele non potesse essere dimostrato si consolidò sempre più. Una testimonianza esplicita in tal senso si può rinvenire ad esempio in una lettera che Gauss scrisse all'amico Wilhelm Olbers nell'aprile del 1817: "Sono sempre più convinto che la necessità della nostra geometria [cioè della geometria euclidea] non possa essere dimostrata, almeno non dall'intelletto umano e comunque non per la comprensione umana. Chissà, forse in un'altra vita perverremo ad altre visioni circa la natura dello Spazio che ora ci appaiono irraggiungibili. Sino a quel momento, non si dovrebbe porre la Geometria sullo stesso piano dell'Aritmetica, che è puramente a priori, bensì accanto alla Meccanica." ([52])

Passo ulteriore nella revisione delle tradizionali concezioni geometriche fu il riconoscimento della non-contradditorietà della geometria che scaturisce dalla negazione del postulato euclideo, che Gauss aveva dapprima denominato con l'espressione di geometria "anti-euclidea" quindi di "geometria astrale" e in seguito di geometria "non euclidea".

Documenti particolarmente significativi per comprendere la natura e l'estensione di tali ricerche sono offerti dalla corrispondenza di Gauss con l'amico e collega astronomo Heinrich Schumacher. Quest'ultimo nel maggio 1831 aveva interpellato Gauss per sottoporgli un proprio tentativo di dimostrazione del postulato delle parallele.

> Mi concedo la libertà di inviarvi un tentativo di dimostrazione del teorema che la somma di tutte e tre gli angoli di un triangolo rettilineo $= 180°$, che non fa uso di rette parallele e della loro teoria. Da cui seguirebbe la prova dell'assioma euclideo. Altro non suppongo che la somma di tutti gli angoli attorno a un punto $= 360° = 4R$ e che gli angoli opposti sono uguali. Dal momento che so per esperienza quanto si possa essere ciechi (almeno nel mio caso) nei confronti del proprio lavoro, ho molta paura che alla sua base via sia una *petitio principii*. Ma ora non sono in grado di rintracciarla e aspetto dunque da voi istruzioni.
>
> [Supplemento] Si prolunghino i lati di un triangolo rettilineo ABC qualunque oppure, il che è lo stesso, si consideri un sistema di tre rette in un piano, le cui intersezioni determinano il triangolo ABC; allora i tre angoli al vertice ci restituiscono le equazioni:
>
> $$\begin{aligned} 2a + 2\alpha &= 4R, \\ 2b + 2\beta &= 4R, \\ 2c + 2\gamma &= 4R; \end{aligned} \tag{4}$$
>
> allora sarà:
>
> $$\alpha + \beta + \gamma = 6R - (a + b + c).$$

([52]) [Gauss Werke 1863-1933, VIII, p. 177].

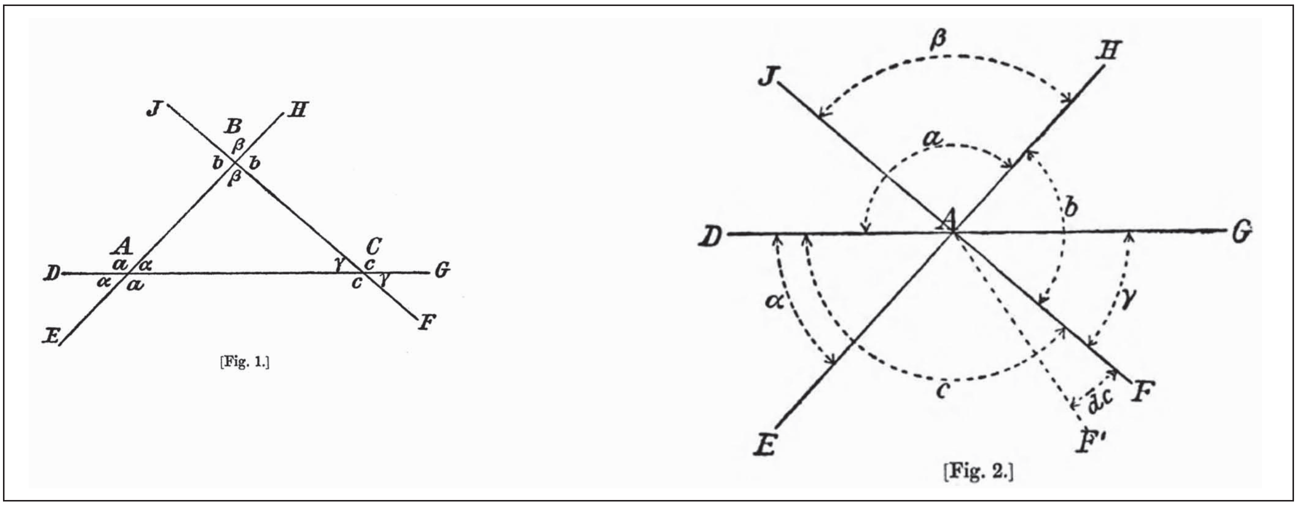

FIGURA 9 – Le immagini sono tratte da [Gauss Werke 1863-1933, VIII].

> Poiché questa relazione sussiste qualunque sia la posizione dei punti A, B, C, o ciò che è indifferente, comunque siano tracciate le linee nello spazio, si lascino le rette $\overline{DG}, \overline{EH}$ immutate e si tracci la retta $\overline{JF}$ in maniera che formi con EH, lo stesso angolo individuato nella precedente posizione o, poichè questo angolo è arbitrario purché cada entro l'angolo a, abbiamo [...] $a + b + c = 4R$, e dunque $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ Ma a partire dall'ipotesi che b [Figura 1] $= b$ [Figura 2] l'affermazione che c [Figura 1] $= c$ [Figura 2] deve essere dimostrata? A me pare che per l'arbitrarietà dell'angolo questa dimostrazione non sia necessaria. Queste sono le idee direttrici della dimostrazione. Aspetto il tuo parere [...]. ([53])

In realtà, come lo stesso Gauss spiegò nella risposta a questa lunga lettera, i timori di Schumacher di aver compiuto una *petitio principii* si rivelarono fondati. Nel tentativo di dimostrazione proposto si era insinuato un argomento fallace con il quale Schumacher aveva accolto una proprietà equivalente a quella prescritta dal V postulato.

> Rispetto a quanto mi scrivete sulle parallele avete visto bene. Nei vostri sillogismi avete fatto uso di un'affermazione intermedia (*Zwischensatz*) senza che la abbiate resa esplicita. È la seguente: se due rette (1) e (2) formano con una terza retta (3), che le taglia, rispettivamente angoli A' e A'' e se una quarta (4), nel medesimo piano, è tagliata da (1) sotto il medesimo angolo, allora (4) sarà tagliata da (2) sotto l'angolo A''.
>
> Il fatto è che questa affermazione non solo necessita di una dimostrazione ma anzi, si può dire, che è essa stessa l'affermazione che si intende dimostrare. ([54])

L'osservazione di Gauss può essere compresa alla luce del ragionamento seguente. Indipendentemente dalla validità del V postulato la configurazione descritta delle rette r_1, r_2, r_3, r_4 è tale che le rette r_3 e r_4 sono parallele. È infatti sufficiente invocare la proposizione I.28 degli *Elementi* la quale stabilisce che se due rette qualsiasi tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti uguali allora le rette sono parallele. Ciò che dipende dal V postulato è l'asserzione che la retta r_4 è tagliata da r_2 sotto l'angolo l'angolo A''. In effetti, quest'ultima affermazione è equivalente alla richiesta che due rette parallele tagliate da un trasversale determinino angoli corrispondenti congruenti (Proposizione I.29 degli *Elementi* ([55])).

Nelle righe finali della medesima lettera a Schumacher, Gauss informò l'amico circa il proposito di dare forma scritta ai propri pensieri sul tema:

> Da alcune settimane ho cominciato a scrivere qualcosa delle mie riflessioni a riguardo, ormai vecchie (almeno in parte) di 40 anni, delle quali non ho mai scritto nulla e che per 3 o 4 volte ho

([53]) [Gauss Werke 1863-1933, pp. 210-212].

([54]) [Gauss Werke 1863-1933, pp. 212-213].

([55]) Come è noto, questa è la prima proposizione degli *Elementi* nella quale si fa uso del postulato V.

dovuto ripensare da capo. Non vorrei che questi miei pensieri scomparissero con me. (56)

Una chiara indicazione del contenuto di tali riflessioni può essere ricavata dalla lettura di alcuni appunti manoscritti rinvenuti nel *Nachlass* (57) dello stesso Gauss, dai quali emerge una definizione del parallelismo tra semirette (orientate) equivalente a quella proposta da János nelle sezioni iniziali dell'*Appendix* e l'individuazione di alcune proprietà cruciali quali la simmetria e la transitività (in un verso fissato) del parallelismo.

A stretto giro, Schumacher sottopose a Gauss un nuovo tentativo di dimostrazione che sfruttava la nozione di circolo con raggio infinito. Il ragionamento proposto era il seguente:

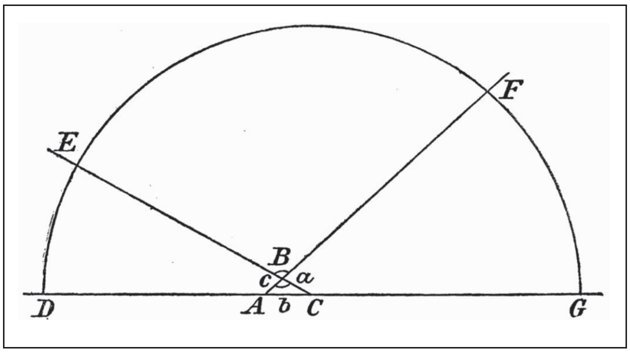

FIGURA 10 – Tratta da [Gauss Werke 1863-1933, VIII, p. 213].

Si prolunghino i lati di un triangolo rettilineo qualunque e si prenda un raggio R così grande che $a/R, b/R, c/R$ sono più piccoli di qualunque grandezza data. Con questo raggio e con centro in C si descriva la semicirconferenza $DEFG$. Poiché rispetto a questa semicirconferenza i lati a, b, c possono essere trattati come nulli, così che i punti A, B risultano coincidere con C, allora questa semicirconferenza è la misura dei tre angoli del triangolo, che dunque non possono differire da $180°$. Mi sembra pertanto che se non si esclude il concetto di una crescita indefinita, allora questa dimostrazione molto semplice prova che in ogni triangolo finito e rettilineo la somma degli angoli è $= 180°$ [...]. (58)

Alla seconda lettera di Schumacher Gauss rispose puntualmente in una lunga missiva che costituisce uno dei documenti più significativi per ricostruire le sue ricerche in materia di geometria non euclidea. In particolare, il testo della lettera fornisce indicazioni esplicite sul fatto che, ben prima di venire a conoscenza dell'opera di Bolyai e di Lobačevskij, Gauss avesse esplorato alcune delle conseguenze imposte dalla negazione del postulato euclideo.

Per quanto riguarda le linee parallele, mi sarebbe piaciuto molto scrivervi il mio giudizio sulla vostra prima lettera, se non avessi dovuto presumere che vi sarebbe stato di scarsa utilità senza sviluppi completi. Tali sviluppi completi, se vogliono essere veramente convincenti, richiederebbero forse argomenti concernenti la lunghezza di arco in risposta a ciò che in sostanza avete accennato solo in poche righe, ma per i quali attualmente non ho la disposizione mentale richiesta. Per assicurarvi della mia buona volontà, vorrei aggiungere quanto segue. Voi considerate subito punti propri su ogni triangolo, ma potreste impiegare sostanzialmente il solito ragionamento se consideraste dapprima il caso più semplice e formulaste il teorema: 1) In ogni triangolo un lato del quale è finito, mentre il secondo lato, e di conseguenza anche il terzo sono infiniti, la somma dei due angoli è $= 180°$. Dimostrazione secondo la vostra maniera:
L'arco di circonferenza CD dà la misura dell'angolo CAD così come dell'angolo CBD, giacché in una circonferenza di raggio infinito uno spostamento finito del centro deve essere considerato come nullo. Così:

$$CAD = CBD, CAD + CBA = CBD + CBA = 180°.$$

Il resto si ottiene da sè facilmente. Infatti da questo teorema si ha:

$$(5) \qquad \alpha+\beta+\delta=180°,\ 180°=\varepsilon+\delta,\ \gamma+\varepsilon=180°.$$

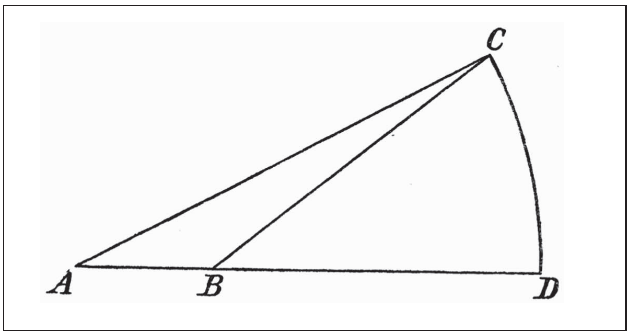

FIGURA 11 – Tratta da [Gauss Werke 1863-1933, VIII, p. 215].

(56) [Gauss Werke 1863-1933, p. 213].
(57) [Gauss Werke 1863-1933, VIII, pp. 202-209].
(58) [Gauss Werke 1863-1933, pp. 213-214].

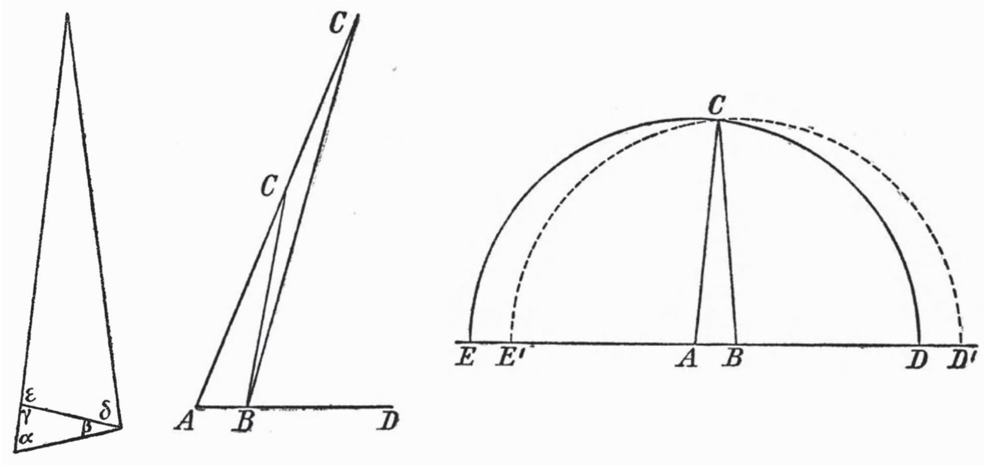

FIGURA 12 – Le immagini sono tratte da [Gauss Werke 1863-1933, VIII, p. 216-217].

Così sommando si ha: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ Ma per quanto riguarda la vostra dimostrazione per 1), in primo luogo protesto contro l'uso di una grandezza infinita come di una finita, cosa che non è mai consentita in matematica. L'infinito è solo una *façon de parler*, quando si parla in realtà di limiti a cui certi rapporti si avvicinano, mentre altri crescono senza restrizioni. In questo senso, la geometria non euclidea non contiene nulla di contraddittorio in se stessa, anche se coloro [che imparano a conoscerla] devono inizialmente considerare molti dei suoi risultati come paradossali, ma ciò che è considerato contraddittorio sarebbe solo un inganno, causato dalla precedente abitudine di considerare la geometria euclidea come rigorosamente vera. Nella geometria non euclidea [Nicht-Euklidischen Geometrie] non esistono figure simili senza uguaglianza, ad es., gli angoli di un triangolo equilatero non sono solo diversi da $2/3R$, ma [in triangoli diversi] a seconda delle dimensioni dei lati, se il lato cresce indefinitamente, possono diventare piccoli quanto si voglia. [...]
Nella geometria euclidea non esiste una grandezza assoluta come invece accade nella geometria non euclidea; questo è precisamente il suo carattere essenziale e coloro che non lo ammettono presuppongono già, *eo ipso*, l'intera geometria euclidea. Tuttavia, come detto, secondo me si tratta di un semplice autoinganno.
Per il caso in questione, non vi è alcuna contraddizione nel fatto che se i punti A, B e la direzione AC sono dati, e se C può crescere senza restrizioni, allora, sebbene DBC si avvicini a DAC, la differenza non può mai essere portata sotto una certa differenza finita.
Il tuo ricorso all'arco CD rende la conclusione tanto più capziosa, ma se vuoi sviluppare chiaramente ciò che hai soltanto accennato, dovresti procedere così. Vale

$$CAB : CBD = \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{E'CD'}$$

e al crescere di AC all'infinito, CD e $C'D'$ da un lato e $ECD, E'CD'$ dall'altro tendono ad avvicinarsi sempre più.
Entrambe queste circostanze non si presentano nella geometria non euclidea, se si intende con ciò che i rapporti geometrici si avvicinano quanto si voglia alla uguaglianza. Infatti, nella geometria non euclidea la semicirconferenza di un circolo, il cui raggio è $= r$ è:

$$= \frac{1}{2}\pi k\left(e^{r/k} - e^{-r/k}\right), \tag{6}$$

dove k è una costante, della quale attraverso l'esperienza sappiamo che essa deve essere enormemente grande rispetto a tutto ciò che possiamo misurare. Nella geometria di Euclide è infinita. ([59])

Una prima indicazione utile per comprendere la natura delle ricerche di Gauss può essere rintracciata nell'affermazione sull'esistenza di una unità di misura assoluta, una "caratteristica essenziale" della nuova geometria che egli spiegò alla luce del fatto che triangoli simili tra loro sono necessariamente anche congruenti. Non sappiamo come Gauss sia

([59]) [Gauss Werke 1863-1933, VIII, pp. 215-218].

giunto a sviluppare una tale convinzione che pure è documentata nei suoi scritti già a partire dal 1808. È probabile che essa sia stata ricavata come conseguenza diretta della negazione del postulato euclideo. Tuttavia non è da escludere che egli possa averla tratta dalla lettura della *Theorie der Parallellinien* di Lambert dove tale proprietà fu esplicitamente discussa nell'ambito della cosiddetta "terza ipotesi", corrispondente ai sistemi S di Bolyai. ([60])

Proponendo una confutazione dettagliata della dimostrazione del postulato delle parallele che Schumacher gli aveva sottoposto, Gauss accennò ad altre tre proprietà caratteristiche della geometria non euclidea. Esse possono essere sintetizzate nel modo seguente: (A) angoli corrispondenti individuati da una trasversale che taglia due rette parallele non sono congruenti; (B) la misura di una circonferenza (iperbolica) di raggio r è data da $C(r) = 2\pi k \sinh(r/k)$; e infine (C) l'affermazione secondo la quale, contrariamente al caso euclideo, le semicirconferenze ECD e $E'CD'$ (e gli archi CD, CD') hanno rapporto distinto dall'unità al tendere di C all'infinito.

Non disponiamo di informazioni che consentono di ricostruire con precisione il corso delle argomentazioni svolte da Gauss. È tuttavia possibile azzardare qualche congettura.

La più immediata tra le proprietà appena richiamate è certamente la (A). Per convincersene, è sufficiente osservare che la validità della proposizione (I.29 di *Elementi*) che assicura l'uguaglianza di angoli corrispondenti individuati da una trasversale e da due rette parallele, è equivalente all'assunzione del postulato euclideo delle parallele. Ne deriva dunque che se si nega il V postulato "non vi è alcuna contraddizione nel fatto che se i punti A, B e la direzione AC sono dati, e se C può crescere senza restrizioni, allora, sebbene DBC si avvicini a DAC, la differenza non può mai essere portata sotto una certa differenza finita."

Più complessa è la deduzione di (B) e (C). In entrambi i casi, sembra ragionevole supporre che Gauss possa essersi servito, in una qualche forma, delle relazioni caratteristiche della trigonometria iperbolica che Bolyai e Lobačevskij avrebbero dedotto solo qualche anno più tardi a partire da principi generali e da considerazioni di natura spaziale. A questo proposito, occorre tenere presente che Franz Taurinus nei suoi *Geometriae prima elementa* (1826) si era servito di alcune formule di trigonometria iperbolica per descrivere il sistema geometrico corrispondente alla cosiddetta ipotesi dell'angolo acuto. Taurinus sfruttò l'idea, già avanzata da Lambert, ([61]) secondo la quale questa nuova geometria può essere descritta in termini di una sfera di raggio immaginario. Ne derivava la possibilità di ricavare le citate formule trigonometriche a partire dalle analoghe relazioni della trigonometria sferica. Con ogni probabilità Gauss potè disporre delle formule della "trigonometria iperbolica" ben prima di Taurinus. È difficile tuttavia stabilire se egli le avesse dedotte a partire da principi fondamentali (come fecero Bolyai e Lobačevskij) o se invece si fosse limitato ad ottenerle attraverso la medesima sostituzione formale di cui Taurinus aveva fatto uso.

In ogni caso, proprio a Taurinus ([62]) si deve la prima deduzione esplicita per la misura della circonferenza (iperbolica) come limite, al tendere del numero di lati all'infinito, del perimetro di un poligono regolare inscritto. Indicato con r il raggio della circonferenza e con l_n il lato del poligono regolare con n vertici, una delle citate formule trigonometriche restituisce facilmente: $\cosh l_n/k = \cosh^2 r/k - \sinh^2 r/k \cos 2\pi/n$; proprio a partire da questa relazione, Taurinus ottenne l'espressione per il lato

$$l_n \sim_{n\to\infty} r \log\left(\frac{2\pi}{n}\sqrt{\cosh^2\left(\frac{r}{k}\right) - 1} + 1\right)$$

e quindi la misura della circonferenza: $C(r) = \lim_{n\to\infty} n l_n = 2\pi k \sinh\ r/k$. È probabile che Gauss, che pure ebbe modo di conoscere l'opera di Taurinus, abbia svolto considerazioni analoghe in maniera del tutto autonoma.

Similmente, (C) può essere dedotta sulla scorta di osservazioni trigonometriche elementari. Per sem-

([60]) Si veda [Lambert 1786, pp. 192-207]. Sulla possibilità che Gauss fosse giunto a conoscenza di [Lambert 1786] si può consultare [Abardia et al. 2012, pp. 295-296].

([61]) [Lambert 1786, §82].

([62]) Si veda [Taurinus 1826, p. 73], in particolare la sezione 3 che reca il titolo: "Inveniatur peripheria circuli, cujus radius datus sit".

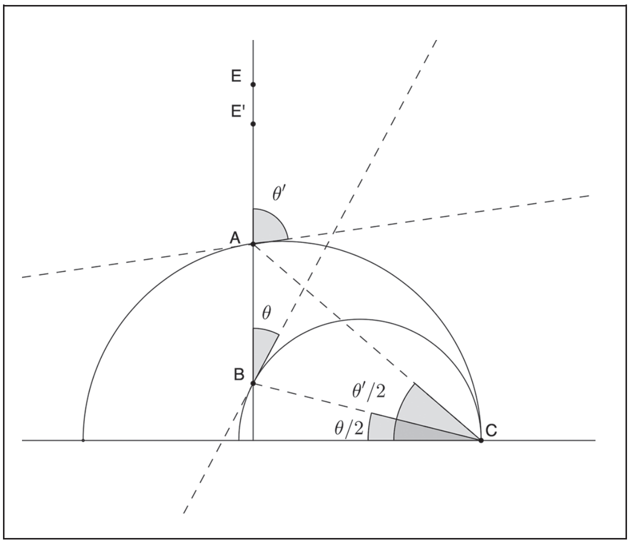

FIGURA 13 – Nella situazione descritta in figura, sia $s = \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(A, B)$. Si verifica facilmente che $\tan\dfrac{\theta'}{2}/\tan\dfrac{\theta}{2} = e^{s/k} > 1$. Ciò consente di ottenere una specificazione quantitativa (che Gauss non fornì) dell'affermazione (A).

plicità, tuttavia, ci limiteremo a fornire una verifica diretta di tale proprietà mediante l'impiego, *palesemente anacronistico*, del modello di geometria iperbolica del semipiano complesso superiore $\mathbb{H}$.

Consideriamo a tal fine tre punti $z_A = (x_A, y_A), z_B = (x_B, y_B), z_C = (x_C, y_C) \in \mathbb{H}$, tali che $x_A = x_B = 0$. La metrica in $\mathbb{H}$ è data da $\cosh \mathrm{d}_{\mathbb{H}}(z, w)/k = \dfrac{|z - w|}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}$. Indicate con $\Gamma_{A,C}, \Gamma_{B,C}$ le misure delle semicirconferenze di centro rispettivamente A e B e raggio $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(z_A, z_C)$ e $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}(z_B, z_C)$, si ricava (alla luce di (6)) al tendere di C all'infinito:

$$\lim_{C\to\infty} \frac{\Gamma_{A,C}}{\Gamma_{B,C}} = \frac{y_A^2 + x_C^2}{y_B^2 + x_C^2} \cdot \frac{y_B}{y_A} = \frac{\sin^2\theta/2}{\sin^2\theta'/2} e^{s/k},$$

dove θ' e θ indicano rispettivamente gli angoli $\angle EAC$ e $\angle EBC$ mentre s designa la misura del segmento AB; in accordo con l'affermazione di Gauss, tale rapporto oltre che dalla posizione dei punti A e B, dipende anche dalla direzione delle rette AC, BC rispetto alle retta passante per A, B.

8. – Alcune questioni interpretative

I documenti utili a delineare un quadro delle ricerche di Gauss nel campo delle geometrie non euclidee sono tutto sommato esigui e di modesta rilevanza. Come nel caso delle lettere a Schumacher analizzate nel paragrafo precedente, si tratta per lo più di riferimenti estemporanei, risultati sparsi e frettolosamente accennati, che non consentono di elaborare un giudizio univoco sulla natura delle sue riflessioni sull'argomento. Numerose domande paiono destinate a rimanere senza risposta: in quale misura la reazione di Gauss all'invio dell'*Appendix* di János rifletteva il reale stato delle sue conoscenze in materia? i risultati che egli asserì di aver ottenuto erano parte di un edificio teorico più ampio? o erano piuttosto il frutto di ricerche solo abbozzate? e ancora, le relazioni trigonometriche implicite ad esempio nella determinazione della misura di una circonferenza iperbolica furono dedotte a partire da principi generali o sulla base di considerazioni euristiche che impiegavano la sfera immaginaria?

Una discussione esaustiva di questi interrogativi esula dagli obiettivi di questo contributo. ([63]) Pertanto, ci limiteremo ad esaminare il tema dei rapporti fra le ricerche di Gauss in materia di geometria non euclidea e quelle nel campo della teoria delle superfici.

Si è spesso sostenuto ([64]) di poter rinvenire indirette indicazioni a supporto della tesi secondo la quale le ricerche di Gauss dovrebbe essere inserite entro il quadro della teoria delle superfici da lui stesso sviluppata nelle *Disquisitiones generales*. Una prima testimonianza a riguardo sarebbe costituita da una lettera di Gauss all'indirizzo dello stesso Schumacher nella quale egli rifletteva sui rapporti fra le ricerche che Lobačevskij aveva consegnato al trattato *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (1840) e i propri studi sulle geometrie non euclidee. Scrisse:

> Di recente ho avuto l'occasione di rivedere il lavoro di Lobačevskij [...]. Esso contiene le caratteristiche essenziali della geometria che dovrebbero avere luogo e potrebbero aver luogo rigorosamente se la geometria euclidea non fosse quella vera. Schweikart chiamava tale geometria, geometria astrale, geometria immaginaria la

([63]) Per una interessante trattazione di alcuni dei quesiti prima sollevati si può consultare [Gray 2002].

([64]) Si veda ad esempio [Stäckel 1917, pp. 39-40].

chiama Lobačevskij. Sai che ho coltivato la stessa convinzione per 54 anni (dal 1792) (con una certa estensione successiva, che non menzionerò qui) [...]. ([65]).

La generica allusione alla "spätern Erweiterung" (estensione successiva) viene interpretata come un riferimento alle *Disquisitiones* che segnala una connessione fra la teoria delle superfici e la geometria non euclidea.

Ulteriore indicazione di questa connessione sarebbe offerta dall'impiego della lettera K per designare una costante di integrazione adottata in alcuni appunti privati nei quali Gauss propose una deduzione generale per le formule della trigonometria non euclidea. Tale notazione viene interpretata come il segno che Gauss identificò tale costante con la curvatura (*Krümmung*) gaussiana di una superficie.

Un illustre sostenitore di questa posizione storiografica fu proprio Beltrami che, in una lettera ([66]) a Hermann von Helmholtz dell'aprile nel 1869, osservò che assai probabilmente Gauss era riuscito a "penetrare" nelle geometrie di Bolyai e Lobačevskij proprio attraverso la teoria intrinseca delle superfici che egli aveva elaborato nelle *Disquisitiones*. È tuttavia verosimile che questa interpretazione riflettesse più le personali convinzioni di Beltrami che non il punto di vista originario di Gauss.

In tempi più recenti, [Abardia et al 2012] hanno ripreso tale approccio interpretativo avanzando l'idea secondo la quale, motivato dalla volontà di realizzare la geometria di Bolyai (e Lobačevskij) su una superficie a curvatura costante e negativa, Gauss avrebbe interpretato il contenuto dell'*Appendix* proprio alla luce delle sue conoscenze nel campo della geometria differenziale. Ciò varrebbe in particolare per il contenuto della sezione 32 dove Bolyai introdusse il limite:

$$\frac{\widehat{PP'}^2}{dy^2 + \widehat{PN}^2} \to 1, \tag{7}$$

che, come si è visto, si traduce facilmente nella introduzione della metrica $ds^2 = dy^2 + \cosh^2(x/k)dx^2$, caratteristica di una varietà a curvatura costante e negativa. Proprio la lettura di questa sezione avrebbe condotto Gauss alla identificazione della geometria dei sistemi S con la geometria di una superficie a curvatura costante e negativa.

Una tale interpretazione imporrebbe tuttavia di attribuire a Gauss l'idea secondo la quale una superficie può essere definita in maniera puramente astratta sulla base del semplice dato di una metrica e di un opportuno ambito di variabilità per le coordinate dei punti del piano. Ma questa è una prospettiva che appare totalmente estranea al punto di vista elaborato nelle *Disquisitiones*, dove nonostante l'enfasi posta sullo studio delle proprietà intrinseche, Gauss si limitò a considerare superfici immerse nello spazio euclideo.

In conclusione, ogni tentativo di argomentare in favore di una identificazione da parte di Gauss della geometria di Bolyai e Lobačevskij con la geometria di una superficie con misura di curvatura negativa pare destinato ad arrestarsi ad un livello puramente congetturale. In effetti, gli argomenti a supporto di tale punto di vista appaiono deboli e di natura indiziale. Manca cioè una indicazione chiara ed esplicita di una simile identificazione che si sarebbe realizzata compiutamente soltanto con il *Saggio di Interpretazione* di Beltrami (1868).

([65]) [Gauss Werke 1863-1933, VIII, 238]

([66]) Lettera a Helmholtz 24 aprile 1869, [Boi, Giacardi, Tazzioli, ed. 1998, pp. 204-205].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Abardia et al. 2012] J. Abardia, A. Reventós, C. Rodríguez, What did Gauss read in the *Appendix*?, *Historia Mathematica*, 39, 292-323, 2012.

[Boi, Giacardi, Tazzioli, ed. 1998] L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli, *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère*, Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881), Libraire Scientifique et Technique, Paris, 1998.

[Bolyai F. 1832] W. Bolyai, *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, Tomus Primus, Maros Vásárhelyini, 1832.

[Bolyai F. 1851] W. Bolyai, *Kurzer Grundri§s eines Versuchs*, Maros Vásárhely, 1851.

[Bolyai J. 1832] J. Bolyai, Appendix. Scientiam Spatii absolute vera exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipedentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica, in [Bolyai F. 1832]. Traduzione italiana in *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane*, 97-114, vol. 6, 1868. Una traduzione più recente è: *La scienza assoluta* *dello spazio*, traduzione e cura di R. Pettoello, Edizioni Melquíades, Milano, 2009.

[Bonola 1906] R. BONOLA, *La geometria non euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Bologna, Zanichelli 1906. *Non Euclidean Geometry*, traduzione di H.S. Carslaw, Chicago, Open Court 1912.

[Breitenberger 1984] E. BREITENBERGER, Gauss's Geodesy and the Axiom of Parallels, *Archive for History of exact Sciences*, 31, 273-289, 1984.

[De Risi Ed. 2014] V. DE RISI (Editor), *Euclid Vindicated from Every Blemish*, edited and Annotated by Vincenzo De Risi, Translated by G. B. Halsted and L. Allegri, Birkhäuser Springer, 2014.

[Engel, Stäckel 1895] F. ENGEL, P. STÄCKEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Teubner, Lepzig, 1895.

[Engel, Stäckel 1913] F. ENGEL, P. STÄCKEL (Herausgegeben von), *Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie, II, Wolfang und Johann Bolyai*, Teubner, Lepzig und Berlin, 1913.

[Frischauf 1872] J. FRISCHAUF, *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, bearbeitet von Dr. J. Frischauf, Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1872.

[Gauss Werke 1863-1933] F. GAUSS, *C. F. Gauss Werke*, 12 Volumi, edite da Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Teubner, 1863-1933.

[Gray 2002] J. GRAY, Gauss and non-Euclidean geometry, in [Prépoka e Molnár Ed. 2002, pp. 61-81].

[Gray 2004] J. GRAY, *János Bolyai. Non-Euclidean Geometry and the Nature of Space*, Burndy Library Publications, 2004.

[Gray 2011] J. GRAY, *Worlds out of nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century}, Springer, London, 2011.*

[Greenberg 2008] M. J. GREENBERG, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Freeman and Company, New York, IV Edition, 2008.

[Jagy 1995] W. C. JAGY, Squaring Circles in Hyperbolic Plane, *The Mathematical Intelligencer*, 17, 31-39, 1995.

[Kagan 1948] V. F. KAGAN, The construction of non-Euclidean geometry by Lobačevskij, Gauss and Bolyai (Russo), *Proc. Inst. History of Science*, 2, 323-399, 1948.

[Kárteszi Ed. 1987] F. KÁRTESZI (editore), *Appendix, The Theory of Space*, North-Holland, Elsevier, 1987.

[Lambert 1786] J. H. LAMBERT, Die Theorie der Parallellinien, *Leipziger Magazine für die reine und angewandte Mathematik*, 137-164, 325-35, 1786. La redazione dell'opera risale al 1766. Essa fu pubblicata postuma da J. Bernoulli and C.F. Hindenburg. Anche in [Engel, Stäckel 1895, pp. 152-207]. I riferimenti nel testo seguono la paginazione di [Engel, Stäckel 1895, pp. 152-207].

[Lobačevskij 1840] N. LOBAČEVSKIJ, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin, 1840.

[Martin 1998] G. MARTIN, *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, Springer, New York, Quarta Edizione, 1998.

[Miller 1972] A. MILLER, The Myth of Gauss' Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space, *Isis*, 63, 345-348.

[Pettoello Ed. 2009] R. PETTOELLO (Editore), *János Bolyai. La scienza assoluta dello spazio*, traduzione e cura di R. Pettoello, Melquíades Edizioni, Milano 2009.

[Prépoka e Molnár Ed. 2002] A. PRÉPOKA e E. MOLNÁR Ed., *Non-Euclidean geometries. János Bolyai memorial volume*, Springer, 2002.

[Saccheri 1733] G. SACCHERI, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Ex Typographia Pauli Antonii Montani, Mediolani, 1733.

[Sartorius 1856] W. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, Hirzel, 1856.

[Schmidt e Stäckel, Ed. 1899] F. SCHMIDT, P. STÄCKEL Ed., *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfang Bolyai*, Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1899.

[Scholz 2004] E. SCHOLZ, C. F. GAUSS' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren, in *Form, Zahl, Ordnung. Studien zur Wissenschaftsgeschichte. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag*, R. Seising, M. Folkerts, U. Hashagen editori, Stuttgart, Steiner, pp. 355-380, 2004.

[Stäckel 1900] P. STÄCKEL, Untersuchungen aus der absoluten Geometrie, *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 18, 280-307, 1900.

[Stäckel 1917] P. STÄCKEL, *Gauss als Geometer*, Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Teubner, 1917. Ristampato in [Gauss Werke 1863-1933], 10, 2, p. 1-123.

[Taurinus 1826] F. TAURINUS, *Geometriae Prima Elementa*, Coloniae Agrippinae, Typis J. P. Bachemii, 1826.

[Weszely 2013] T. WESZELY, *János Bolyai. Die ersten 200 Jahre*, Birkhäuser, 2013. Traduzione dell'edizione ungherese *Bolyai János. Az elsö 200*, 2002.

Alberto Cogliati

Alberto Cogliati è professore associato di Matematiche Complementari presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa. I suoi interessi di ricerca riguardano la storia della matematica nel XIX secolo, con particolare riguardo alla storia della geometria non euclidea e della geometria differenziale. Nel 2017 gli è stato attribuito il premio UMI–SISM (Unione Matematica Italiana-Società Italiana di Storia delle Matematiche) per la storia della matematica.